КУРСЪ

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.

СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ

у Бр. БАШМАКОВЫХЪ.

Москва—Казань.

КНИГА ИМѢЕТСЯ

у Я. БАШМАКОВА и К°.

С.-Петербургъ.

КУРСЪ

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.

СОСТАВИЛЪ

А. К. ВЛАСОВЪ,

ПРОФ. МОСКОВСКАГО КОММЕРЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ТОМЪ I.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ,

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ и ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ (ПЕРВАЯ ЧАСТЬ)


РУССКАГО
ТОВАРИЩ
МОСКВА

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящій „Курсъ высшей математики" написанъ для моихъ слушателей въ пособіе къ лекціямъ, которыя я читаю въ Московскомъ Коммерческомъ Институтѣ и на Архитектурномъ Отдѣленіи Училища Живописи, Ваянія и Зодчества. Для студентовъ, спеціальные интересы которыхъ сосредоточены внѣ математики, изученіе послѣдней не имѣетъ самодовлѣющей цѣли. Но тѣ требованія, которыя предъявляются къ математикѣ науками о природѣ или инженернымъ искусствомъ и техникой, не могутъ быть сведены къ простому собранію формулъ, имѣющихъ то или иное прикладное значеніе. Математику нельзя изучить какъ сборникъ рецептовъ потребныхъ на всякій случай. Не только самодовлѣющее, но и служебное значеніе математики заключается въ выработкѣ привычки къ математическому мышленію. Даже при маломъ запасѣ свѣдѣній математически воспитанная мысль позволяетъ использовать этотъ запасъ въ надлежащихъ цѣляхъ, а безъ привычки къ математическому мышленію и большой запасъ теоремъ и формулъ является безцѣльнымъ, втуне лежащимъ, ненужнымъ богатствомъ.

Пособіе къ лекціямъ должно преслѣдовать ту цѣль, чтобы вызвать мысль изучающаго къ самостоятельной работѣ, и потому не можетъ не выходить за предѣлы экзаменаціонныхъ программъ и требованій, чтобы студентъ могъ найти въ немъ ту или иную мысль, затронутую на лекціи, развитою до конца, могъ найти въ немъ и матеріалъ для самостоятельной работы въ видѣ вопросовъ и задачъ. Чтобы ввести въ эту необходимую при изученіи математики самостоятельную работу, въ предлагаемомъ пособіи дано много примѣровъ, рѣшенныхъ задачъ, представляющихъ практическій или теоретическій интересъ и приноровленныхъ къ ходу развитія математическихъ идей курса. Съ тою же цѣлью болѣе или менѣе выдержанъ характеръ изложенія — отъ конкретнаго къ отвле-

ченному и обратное примѣненіе отвлеченнаго къ конкретному; много вниманія удѣлено предварительному выясненію самой постановки вопроса и его значенія, а потомъ уже слѣдуетъ развитіе вопроса.

Курсъ разбитъ на два тома. Въ первый томъ вошли 1) аналитическая геометрія на плоскости и въ пространствѣ и 2) первая часть дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Въ этой первой части устанавливаются основныя понятія анализа: понятіе функціи (одного независимаго перемѣннаго), теорія предѣловъ, понятіе производной, дифференціала и интеграла и ихъ геометрическое значеніе; указаны способы дифференцированія и интегрированія (безъ подробнаго разсмотрѣнія интегрированія раціональныхъ дробей и трансцендентныхъ функцій) и геометрическія приложенія интегральнаго исчисленія. Вторая часть дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій (интегрированіе раціональныхъ дробей и трансцендентныхъ функцій, функціи многихъ перемѣнныхъ, разложеніе функцій въ ряды и пр.) составитъ содержаніе второго тома, куда отнесено также и приложеніе анализа къ геометріи. Такимъ образомъ задача перваго тома установленіе основныхъ положеній и методовъ, задача второго развитіе тѣхъ и другихъ.

А. Власовъ.

Москва.
10 Іюня 1914 г.

СОДЕРЖАНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

ЗНАЧЕНІЕ МАТЕМАТИКИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОРЪ ЕЯ ОСНОВНЫХЪ ПОНЯТІЙ.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

МЕТОДЪ КООРДИНАТЪ.

ГЛАВА II.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

Стр.

ГЛАВА III.

КРУГЪ.

ГЛАВА IV.

ЭЛЛИПСЪ, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА.

ГЛАВА V.

ОЧЕРКЪ ОБЩЕЙ ТЕОРІИ КРИВЫХЪ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

ГЛАВА VI.

ПОЛЯРНЫЯ КООРДИНАТЫ.

ГЛАВА VII.

МЕТОДЪ КООРДИНАТЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

ГЛАВА VIII.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЯ.

Первая часть.

ГЛАВА I.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ФУНКЦІИ.

ГЛАВА II.

ОСНОВАНІЯ УЧЕНІЯ О ФУНКЦІЯХЪ. ТЕОРІЯ ПРЕДѢЛОВЪ.

ГЛАВА III.

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

ГЛАВА IV.

НАЧАЛА ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ. ОПРЕДѢЛЕННЫЙ И НЕОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ.

ГЛАВА V.

ОСНОВНЫЯ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.

ГЛАВА VI

ДОПОЛНЕНІЯ КЪ ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

(Обобщенія, приближенное вычисленіе и оцѣнка).

ГЛАВА VII

ПРИЛОЖЕНІЕ ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ КЪ ГЕОМЕТРІИ.

Стр.

Замѣченныя опечатки въ концѣ книги

КУРСЪ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.

ВВЕДЕНІЕ.

ЗНАЧЕНІЕ МАТЕМАТИКИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОРЪ ЕЯ ОСНОВНЫХЪ ПОНЯТІЙ.

§ 1. **Отношеніе математики къ наукамъ о природѣ и наукамъ прикладнымъ.** Натуралистъ, изучающій природу, все равно въ теоретическихъ ли интересахъ, или въ цѣляхъ утилитарныхъ, какъ только вступаетъ на путь точнаго знанія, необходимо сталкивается съ такого рода количественными соотношеніями, которыя не укладываются въ рамки простой ариѳметики.

Идеализируя результаты непосредственныхъ изслѣдованій, строя тѣ или иныя гипотезы, онъ ограничивается сначала простыми соотношеніями, но дальнѣйшая теоретическая обработка опытныхъ данныхъ приводитъ къ такимъ зависимостямъ между различнаго рода величинами, которыя требуютъ для своего выраженія и изслѣдованія усовершенствованнаго языка математики. И этотъ усовершенствованный языкъ часто является необходимымъ ключемъ, открывающимъ его обладателю дальнѣйшія перспективы строимой теоріи. Натуралистъ долженъ такимъ образомъ понимать языкъ математики.

Съ другой стороны — инженеръ, техникъ, архитекторъ — при созданіи своихъ произведеній стремятся использовать данныя природы для цѣлей служенія человѣку. Въ этомъ стремленіи одна изъ первыхъ ихъ заботъ — придать предметамъ такую форму или расположить ихъ въ такой порядокъ, чтобы распредѣленіе тѣхъ или иныхъ входящихъ сюда величинъ было наиболѣе цѣлесообразнымъ, наиболѣе выгоднымъ и требовало наименьшей затраты человѣческаго труда. Возможность достигнуть такого рода цѣлесообразности обу-

словливается существующими зависимостями между формою предметовъ и различнаго рода величинами. Для выраженія и изученія этихъ зависимостей необходимъ усовершенствованный языкъ математики. Инженеръ, техникъ, архитекторъ въ такой же, если не большей степени, чѣмъ натуралистъ, должны быть и математиками. Математика даетъ имъ средство предсказать напередъ чертежами и расчетами, какова будетъ форма ихъ созданія и цѣлесообразно ли будетъ въ немъ распредѣленіе силъ, массъ и другихъ какихъ-либо величинъ.

Но математика, преслѣдующая свои теоретическія цѣли, цѣли чистаго знанія, служитъ для нихъ лишь вспомогательной наукой. Практикъ долженъ понимать языкъ вспомогательныхъ средствъ практическихъ примѣненій математическаго вычисленія, долженъ умѣть обращаться со всевозможными таблицами, графическими вычисленіями (номографіей), сокращенными вычисленіями, различнаго рода діаграммами и т. п. Однимъ словомъ, практикъ долженъ взять отъ теоріи прежде всего то, что ему необходимо. Но чтобы **умѣть взять** отъ математики необходимое, онъ долженъ быть **оріентированъ въ основныхъ понятіяхъ ея**, долженъ научиться **мыслить въ своихъ задачахъ математически**, т.-е. умѣть примѣнять къ своимъ задачамъ **математическіе** методы изслѣдованія.

Самое трудное при изученіи всякой вспомогательной науки— это войти въ интересы этой науки, которые при первомъ взглядѣ кажутся далеко лежащими отъ ближайшихъ интересовъ изучающаго. На математику нельзя смотрѣть какъ на сборникъ готовыхъ рецептовъ, нельзя **изучить** математику, какъ такой сборникъ, но можно только **изучать**: цѣнность заключается не въ пріобрѣтенныхъ свѣдѣніяхъ, какъ таковыхъ,—свѣдѣніяхъ, многія изъ которыхъ быть можетъ и не имѣютъ непосредственныхъ приложеній, а **въ пріобрѣтенномъ при изученіи навыкѣ мыслить тѣми понятіями и образами, которые составляютъ эти свѣдѣнія**. Ближайшимъ побужденіемъ къ пріобрѣтенію такого навыка и служитъ пониманіе интересовъ изучаемой науки и обратно—пріобрѣтаемый навыкъ расширяетъ пониманіе интересовъ и цѣлей математики. Но съ чего начать? гдѣ нужно искать начальнаго интереса, вводящаго въ изученіе математики? Основныя понятія, возникающія въ нашей мысли вмѣстѣ съ представленіемъ о математикѣ, суть число и вычисленіе, величина и измѣреніе, геометрическіе образы и построеніе.

Прежде всего и должно отдать себѣ отчетъ въ томъ, что раз-

умѣютъ подъ этими терминами, какіе возникаютъ здѣсь вопросы и затрудненія, какія новыя идеи надо присоединить къ этимъ понятіямъ, чтобы войти въ дальнѣйшіе интересы математики. Въ нашу задачу не входитъ всесторонній анализъ ея основъ, преслѣдующій цѣли философскія, или цѣли чистаго знанія. Наша цѣль лишь выяснить генезисъ основныхъ понятій, намѣтить путь постепеннаго формированія математическихъ представленій.

§ 2. **Число и вычисленіе.** То, что разумѣется подъ числомъ въ математикѣ, представляется очень сложнымъ понятіемъ. Это понятіе образовалось путемъ постепенныхъ обобщеній, диктуемыхъ потребностями и теоріи и практики. Первоначально составляется понятіе о цѣломъ числѣ путемъ счета предметовъ, составляющихъ то или другое собраніе, совокупность будемъ говорить—множество. Число и характеризуетъ въ соотвѣтствующемъ —количественномъ—отношеніи это множество. Счетъ же сообщаетъ этому понятію числа другой характеръ, характеръ порядковый, именно—*число является отмѣткой того мѣста, которое занимаетъ послѣдній* элементъ множества, расположеннаго въ какой-либо порядокъ. Это понятіе о числѣ и является прототипомъ общаго понятія о немъ, а счетъ, какъ элементарная операція, элементарное дѣйствіе надъ числомъ,—прототипомъ общаго понятія объ операціяхъ надъ числами, прототипомъ *общаго понятія о вычисленіи.*

Соотвѣтственно количественному и порядковому характеру понятія числа можно установить двѣ точки зрѣнія и на тѣ отношенія между числами, которыя характеризуются словами: больше, равно, меньше. Съ одной точки зрѣнія—это отношенія величинъ между собой, съ другой—распредѣленіе сравниваемыхъ чиселъ по мѣсту, занимаемому ими въ опредѣленномъ рядѣ.

§ 3. **Прямыя дѣйствія съ цѣлыми числами. Законы вычисленія.** Прямыя дѣйствія надъ цѣлыми числами—сложеніе и умноженіе—сводятся, согласно первоначальнымъ опредѣленіямъ этихъ дѣйствій, къ простому счету, являются комбинированнымъ счетомъ: приложить одно цѣлое число къ другому, умножить одно цѣлое число на другое въ концѣ концовъ значитъ сосчитать. Свойства, которыми обладаютъ эти дѣйствія, являются въ то же время и основными свойствами множествъ и счета или логически выводятся изъ этихъ основныхъ свойствъ и составляютъ основные законы вычисленія, которые въ расширеніи понятія числа играютъ существенную роль. Вотъ эти законы:

А. Основные законы сложенія.

1. Сложеніе двухъ чиселъ всегда выполнимо безъ ограниченій, иначе—сумма двухъ цѣлыхъ чиселъ есть тоже цѣлое число.

2. Сложеніе двухъ чиселъ — дѣйствіе однозначное, т.-е. существуетъ только одно цѣлое число, являющееся суммою двухъ данныхъ цѣлыхъ чиселъ.

3. Законъ сочетательный: $a+(b+c)=(a+b)+c$, т.-е. сложить данное число съ суммою двухъ другихъ можно, прибавляя къ данному числу первое слагаемое прикладываемой суммы и къ полученному результату второе.

4. Законъ перемѣстительный: $a+b=b+a$, т.-е. сумма не мѣняется отъ перестановки слагаемыхъ.

5. Законъ монотоніи: если $a>b$, то и $a+c>b+c$, т.-е. сумма увеличивается съ увеличеніемъ слагаемаго.

Тѣ же законы, но съ другимъ содержаніемъ, имѣютъ мѣсто и для умноженія.

В. Основные законы умноженія.

1. Умноженіе одного числа на другое всегда выполнимо, т.-е. произведеніе двухъ чиселъ есть то же число.

2. Умноженіе одного числа на другое—дѣйствіе однозначное, т.-е. существуетъ только одно число, являющееся произведеніемъ одного числа на другое.

3. Законъ сочетательный: $a.(b.c)=(a.b).c=abc$, т.-е. умножить число на произведеніе двухъ другихъ можно, умножая на множимое этого произведенія и полученный результатъ на множителя.

4. Законъ перемѣстительный: $a.b=b.a$, т.-е. произведеніе не мѣняется отъ перестановки множимаго и множителя.

5. Законъ монотоніи: если $a>b$, то и $ac>bc$, т.-е. произведеніе увеличивается съ увеличеніемъ одного изъ сомножителей

Наконецъ, для умноженія и сложенія имѣетъ мѣсто такъ называемый:

6. Законъ распредѣлительный: $a.(b+c)=a.b+a.c$, т.-е. чтобы умножить число на сумму двухъ другихъ, должно умножить его на каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

Эти законы имѣютъ опредѣляющее значеніе при логическомъ

построеніи ариѳметики *), но и при элементарномъ ея изложеніи они имѣютъ существенное значеніе, такъ какъ на нихъ зиждется теорія дѣйствій надъ числами, теорія приведенія этихъ дѣйствій къ основнымъ таблицамъ сложенія и умноженія.

§ 4. **Обратныя дѣйствія и путь обобщенія понятія числа.** Обратныя дѣйствія — вычитаніе и дѣленіе цѣлыхъ чиселъ — не подчиняются прежде всего первому закону: дѣйствія эти выполнимы лишь при нѣкоторыхъ условіяхъ, которымъ должны подчиняться уменьшаемое и вычитаемое, дѣлимое и дѣлитель. Чтобы освободить эти дѣйствія отъ ограничительныхъ условій, нужно ввести новыя числа, нужно расширить понятіе числа. Такимъ образомъ вводятся съ одной стороны дробныя числа, съ другой нуль и отрицательныя числа.

Смотря по тому, какая тенденція преслѣдуется при этомъ расширеніи понятія о числѣ, содержаніе этихъ новыхъ понятій можно характеризовать различно —болѣе отвлеченно или болѣе конкретно. Конкретная почва больше соотвѣтствуетъ цѣлямъ настоящаго курса, поэтому мы и будемъ придерживаться болѣе конкретнаго толкованія новыхъ чиселъ.

§ 5. **Дробныя числа.** Если исходить изъ понятія множества, какъ собранія отдѣльныхъ предметовъ, единицъ, то для опредѣленія дробныхъ чиселъ нужно ввести понятіе сложной единицы, дѣлимой на части. Понятіе сложной единицы входитъ уже въ самую систему счисленія: десятокъ, сотня, тысяча и т. д. суть примѣры сложныхъ единицъ. Такимъ образомъ имѣется возможность ввести дробныя числа. Знаменатель характеризуетъ соотвѣтствующія части единицы, а числитель играетъ ту же роль, какъ цѣлое число по первоначальному опредѣленію.

Послѣ введенія дробныхъ чиселъ нужно опредѣлить дѣйствія надъ ними, установить признаки, характеризующіе тѣ отношенія ихъ между собою и отношенія къ цѣлымъ числамъ, которыя мы выражаемъ словами: больше, равно, меньше, и показать, что законы вычисленія съ дробными числами остаются тѣ же самые, какъ и для цѣлыхъ чиселъ. Послѣ этого цѣлое и дробное числа объединяются въ одну категорію понятія числа.

---

*) Относительно различныхъ точекъ зрѣнія на число и законы вычисленія, см. проф. Ф. Клейнъ. Вопросы элементарной и высшей математики, часть I, стр. 8—24.

§ 6. **Величина и измѣреніе. Раціональныя и ирраціональныя числа.** Къ болѣе обширнымъ слѣдствіямъ приводитъ разсмотрѣніе непрерывной, сплошной величины. Примѣрами такихъ величинъ могутъ служить длина, площадь, объемъ, время, масса, вѣсъ и т. п.

Дѣлимость единицы входитъ въ самое понятіе такой величины. Число получается при измѣреніи непрерывной величины, напр. длины. Операція измѣренія состоитъ не въ простомъ счетѣ, который по предыдущему приводитъ къ числу, но въ предварительномъ разбіеніи измѣряемой величины на части, равныя другой однородной величинѣ, принятой за единицу измѣренія, въ разбіеніи остатка на доли единицы, соотвѣтственно принятой системѣ счисленія, напр., десятыя доли, новаго остатка на сотыя доли первоначальной единицы и т. д. и, наконецъ, въ счетѣ полученныхъ единицъ и долей единицы мѣры. Полученное въ результатѣ измѣренія число характеризуетъ измѣряемую величину въ отношеніи къ величинѣ, принятой за единицу мѣры. Число и можетъ быть, въ этомъ смыслѣ, опредѣлено, какъ отношеніе двухъ однородныхъ величинъ, какъ отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры.

Но при измѣреніи двухъ величинъ можетъ быть два случая: измѣряемая величина и величина, принятая за единицу мѣры, могутъ быть соизмѣримыми или несоизмѣримыми.

Въ случаѣ соизмѣримости операція измѣренія можетъ быть доведена до конца*). Остатки въ концѣ концовъ будутъ исчерпаны и въ результатѣ измѣренія въ этомъ случаѣ получится цѣлое или дробное число, короче—раціональное**) число, которое и выражаетъ отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры.

Въ случаѣ несоизмѣримости операція измѣренія не можетъ быть доведена до конца, является процессомъ безконечнымъ, и такимъ образомъ приходится постулировать существованіе числа, характеризующаго отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры. Но что же разумѣть въ этомъ случаѣ подъ словомъ „число“?

---

*) Если разбивать остатки обязательно на десятичныя доли единицы, т.-е. выражать результатъ измѣренія въ видѣ десятичной дроби, то и при соизмѣримости можетъ случиться, что операція измѣренія продолжается безгранично, именно когда отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры выражается безконечной періодической дробью. Но вводя иныя доли единицы, не десятичныя, можно избѣжать этого безконечнаго процесса.

**) Отношеніе двухъ однородныхъ величинъ, напр., отрѣзковъ, у геометровъ античной эпохи называлось по-гречески λόγος (букв. значеніе—слово), а въ латинскомъ переводѣ ratio (букв. значеніе—разумъ).

При разбіеніи измѣряемой величины на части, равныя единицѣ мѣры и ея долямъ—десятымъ, сотымъ и т. д., можно остановиться на доляхъ любой величины, отбрасывая соотвѣтствующій остатокъ, и сосчитать полученныя части; получимъ такимъ образомъ число въ прежнемъ смыслѣ, т.-е. раціональное число, соотвѣтствующее меньшей величинѣ, а если прибавить одну долю, бо́льшую остатка, то раціональное же число, соотвѣтствующее большей величинѣ. Эти раціональныя числа будутъ выражать приближенно отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры и будутъ приближенными значеніями этого отношенія одни съ недостаткомъ, другія съ избыткомъ. Всякое число первой группы меньше любого числа второй. При продолженіи операціи измѣранія приближенныя значенія съ недостаткомъ увеличиваются, а приближенныя значенія съ избыткомъ уменьшаются. Въ случаѣ несоизмѣримости измѣряемой величины и единицы мѣры приближенныя значенія съ недостаткомъ увеличиваются, но увеличиваются безгранично и не имѣютъ послѣдняго значенія, не имѣютъ maximum'а, а приближенныя значенія съ избыткомъ уменьшаясь не имѣютъ послѣдняго значенія, не имѣютъ minimum'а. Въ случаѣ соизмѣримости раціональное число, точно выражающее отношеніе измѣряемой величины и единицы мѣры, и будетъ maximum'омъ однихъ приближенныхъ значеній и minimum'омъ другихъ, и такимъ образомъ это число раздѣляетъ одну группу приближенныхъ значеній отъ другой.

Въ случаѣ несоизмѣримости всякое раціональное число обладаетъ однимъ и только однимъ изъ слѣдующихъ двухъ свойствъ: или оно меньше всякаго приближеннаго значенія второй группы (съ избыткомъ), или оно больше всякаго приближеннаго значенія первой группы (съ недостаткомъ). Въ случаѣ соизмѣримости можно сказать то же самое относительно всякаго раціональнаго числа, кромѣ только того, которое точно выражаетъ разсматриваемое отношеніе: оно одновременно меньше всякаго приближеннаго значенія съ избыткомъ и больше всякаго приближеннаго значенія съ недостаткомъ. Такимъ образомъ самый способъ измѣренія, будетъ ли онъ конечнымъ процессомъ (случай соизмѣримости), или безконечнымъ (случай несоизмѣримости), распредѣляетъ всѣ раціональныя числа на два класса, такъ что каждое раціональное число принадлежитъ одному классу и лишь въ случаѣ соизмѣримости самое число, точно выражающее отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры, можетъ быть по произволу отнесено къ любому изъ этихъ двухъ классовъ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ не только спо-

собъ измѣренія, но самое число, являющееся результатомъ измѣренія, распредѣляетъ всѣ раціональныя числа на два класса, производитъ, по выраженію Дедекинда (Dedekind), сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ. Въ случаѣ несоизмѣримости, хотя числа въ прежнемъ смыслѣ, т.-е. числа раціональнаго, производящаго сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ, и не существуетъ, но самое сѣченіе, самое распредѣленіе раціональныхъ чиселъ на два класса, распредѣленіе, вытекающее изъ самаго способа измѣренія, существуетъ. Такое распредѣленіе раціональныхъ чиселъ на два класса и кладется въ основаніе обобщенія понятія „числа". Для каждаго даннаго случая измѣренія одного отрѣзка другимъ, несоизмѣримымъ съ нимъ, мы постулируемъ „число", производящее соотвѣтствующее сѣченіе, въ области раціональныхъ чиселъ, число въ обобщенномъ смыслѣ, число не въ прежнемъ смыслѣ, не раціональное, иначе —число ирраціональное. Разъ указанъ способъ распредѣленія всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса, мы, несмотря на безконечность процесса измѣренія, можемъ считать сѣченіе произведеннымъ и соотвѣтствующее ирраціональное число даннымъ.

Дѣйствія надъ ирраціональными числами по опредѣленію сводятся къ дѣйствіямъ надъ раціональными приближенными ихъ значеніями и подчиняются тѣмъ же законамъ вычисленія, какъ и дѣйствія надъ цѣлыми числами. Опредѣлены такъ же могутъ быть и тѣ отношенія ирраціональныхъ чиселъ къ раціональнымъ и между собою, которыя мы выражаемъ словами: больше, равно, меньше. Какъ и для цѣлыхъ чиселъ, на эти отношенія можно установить двѣ точки зрѣнія: или какъ на отношенія величинъ между собою, какъ на сравненіе чиселъ по величинѣ, или какъ на распредѣленіе сравниваемыхъ чиселъ по мѣсту, занимаемому ими въ опредѣленномъ рядѣ.

Такимъ образомъ, исходя изъ понятія цѣлаго числа, мы пришли къ числамъ дробнымъ, которыя вмѣстѣ съ цѣлыми числами составляютъ классъ чиселъ раціональныхъ, а потомъ и къ числамъ ирраціональнымъ. Къ такому обобщенію понятія числа приводитъ съ одной стороны стремленіе освободить дѣленіе отъ ограничительныхъ условій, иначе—принятіе дѣлимости единицы на части, съ другой — измѣреніе непрерывной, сплошной величины. Теперь послѣ такихъ обобщеній можно установить слѣдующее основное предложеніе,— обусловливающее приложимость вычисленія къ геометріи:

Всякому прямолинейному отрѣзку при данной

единицѣ мѣры соотвѣтствуетъ опредѣленное число, и обратно—всякому числу (раціональному или ирраціональному) при данной единицѣ мѣры соотвѣтствуетъ опредѣленной длины отрѣзокъ.

Первая часть этого предложенія, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, является въ случаѣ несоизмѣримости постулатомъ, вводящимъ при измѣреніи ирраціональное число, вторая часть является соотвѣтствующимъ геометрическимъ постулатомъ, опредѣляющимъ существованіе отрѣзка, имѣющаго съ данной единицей мѣры данное (ирраціональное) отношеніе.

Всякій способъ, помимо измѣренія, раздѣляющій раціональныя числа на два класса указаннаго выше свойства, способъ, производящій сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ, опредѣляетъ число въ обобщенномъ смыслѣ, число, которое можетъ быть раціональнымъ или ирраціональнымъ. Такой способъ могутъ дать, напр., обратныя дѣйствія высшаго рода, какъ извлеченіе корней, рѣшеніе уравненій высшихъ степеней. Такъ, напр., извлеченіе квадратнаго корня изъ 2, обозначаемое знакомъ $\sqrt{2}$, даетъ такой способъ и, слѣдовательно, опредѣляетъ число. Задача состоитъ въ томъ, чтобы найти число x, квадратъ котораго равнялся бы 2. Среди цѣлыхъ чиселъ очевидно нѣтъ такого числа, но и среди дробныхъ такого числа нѣтъ, ибо допущеніе, что искомое число x равняется несократимой дроби $\frac{a}{b}$, приводитъ къ абсурду, что несократимая дробь $\frac{a^2}{b^2}$ должна равняться цѣлому числу 2. Несмотря на то, поставленная задача даетъ способъ раздѣлить раціональныя числа на два класса: всякое раціональное число, квадратъ котораго меньше 2, принадлежитъ къ одному классу, а всякое число, квадратъ котораго больше 2, принадлежитъ къ другому. Не трудно убѣдиться, что всякое число перваго класса меньше любого числа другого класса и что всегда можно подобрать два числа изъ разныхъ классовъ такъ, чтобы разность между ними была достаточно мала. Каждое изъ этихъ чиселъ будетъ приближеннымъ значеніемъ $\sqrt{2}$. Пусть, напр., требуется найти два приближенныхъ значенія: одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ и отличающихся одно отъ другого на $^1/_{10}$ Если x^2 должно равняться 2, то $(10x)^2$ должно равняться 2.10^2 или 200. Непосредственно подбираемъ два числа, квадраты которыхъ одинъ меньше, другой больше 200; такими числами оказываются 14 и 15:

$$14^2 = 196, \quad 15^2 = 225, \quad 14^2 < 200 < 15^2.$$

Слѣдовательно, 14 и 15 отличаются отъ $10x$ меньше, чѣмъ на 1, а 1,4 и 1,5 отличаются отъ искомаго числа меньше, чѣмъ на $^1/_{10}$:

$$1{,}4 < x < 1{,}5.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что рѣшеніе уравненій *первой* степени съ раціональными коэффиціентами всегда приводитъ въ результатѣ къ раціональному числу, а рѣшеніе уравненій *второй и высшихъ* степеней можетъ привести и къ раціональнымъ и къ ирраціональнымъ числамъ, ибо для рѣшенія уравненій первой степени достаточно имѣть въ распоряженіи лишь раціональныя операціи, т.-е. сложеніе и умноженіе, вычитаніе и дѣленіе, а для рѣшенія уравненій высшихъ степеней этихъ операцій недостаточно.

§ 7. **Нуль и отрицательныя числа. Полный рядъ дѣйствительныхъ чиселъ.** Стремленіе освободить обратное дѣйствіе вычитанія отъ ограничительныхъ условій (уменьшаемое больше вычитаемаго) приводитъ къ иного рода обобщенію понятія числа, именно вводитъ *въ рядъ чиселъ нуль* и подъ именемъ *отрицательныхъ* чиселъ — разности, невозможныя съ первоначальной точки зрѣнія, разности, у которыхъ уменьшаемое меньше вычитаемаго. Этимъ самымъ въ понятіе числа вводится оперативное начало: отрицательныя числа являются символами невыполненныхъ еще дѣйствій — прибавленія уменьшаемаго и вычитанія вычитаемаго. Въ сущности и въ предыдущемъ обобщеніи введено въ понятіе числа оперативное начало: дробь можно разсматривать, какъ символъ невыполненнаго еще умноженія на числителя и дѣленія на дѣлителя.

Отрицательныя числа могутъ быть введены и конкретнымъ путемъ какъ *относительныя* числа изъ разсмотрѣнія противоположныхъ величинъ, какъ, напр., капиталъ и долгъ, прибыль и убытокъ и т. п. или, противоположныхъ понятій, какъ впередъ и назадъ, вправо и влѣво, вверхъ и внизъ и т. д. Положительное или отрицательное число характеризуетъ не только *величину*, но и *отношеніе* ея къ этимъ противоположнымъ состояніямъ, поэтому они и могутъ быть названы относительными числами.

Послѣ введенія относительныхъ (положительныхъ и отрицательныхъ) чиселъ должно опредѣлить дѣйствія надъ ними и показать, что законы вычисленія и для этихъ чиселъ остаются тѣ же самые, кромѣ закона монотоніи для умноженія. Нужно замѣтить, что тѣ отношенія между числами, которыя отмѣчаются словами: больше, равно, меньше, указываютъ теперь не на сравненія чиселъ по ве-

личинѣ въ первоначальномъ смыслѣ этого слова, а на распредѣленіе сравниваемыхъ чиселъ по мѣсту, занимаемому ими въ опредѣленномъ рядѣ; поэтому законъ монотоніи при умноженіи (§ 3) имѣетъ мѣсто лишь для абсолютныхъ значеній относительныхъ чиселъ.

Нуль имѣетъ первоначальное значеніе цифры, указывающей на отсутствіе единицъ того или другого разряда. Но разъ введены разности, какъ числа отрицательныя, при уменьшаемомъ меньшемъ вычитаемаго, мы должны разсматривать, какъ „число" и разность съ уменьшаемымъ, равнымъ вычитаемому, и воспользоваться для обозначенія этого „числа" цифрою 0. Опредѣленія дѣйствій надъ этимъ числомъ въ той или другой мѣрѣ должны быть обобщены. Въ результатѣ этихъ опредѣленій получаемъ:

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

гдѣ a какое угодно число. Но обращеніе умноженія, т.-е. дѣленіе, если дѣлителемъ является нуль, невозможно или неопредѣленно.

Такимъ образомъ мы имѣемъ теперь рядъ дѣйствительныхъ чиселъ, этотъ рядъ безграниченъ въ ту и другую сторону, нѣтъ въ немъ перваго числа и нѣтъ послѣдняго. Каждое число этого ряда конечно Всякое изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ этими числами выполнимо и выполнимо однозначно за однимъ исключеніемъ: невозможно въ установленномъ до сихъ поръ смыслѣ дѣленіе на нуль.

Въ самомъ дѣлѣ, нѣтъ ни одного конечнаго числа, которое, будучи умножено на нуль, давало бы по опредѣленію дѣйствія дѣленія дѣлимое a, ибо произведеніе множителей, изъ которыхъ одинъ равенъ нулю, равно также нулю: $a \cdot 0 = 0$ или $0 \cdot a = 0$. Если же $a = 0$, то всякое число удовлетворяетъ поставленному условію и, слѣдовательно, результатъ такого дѣленія $^0/_0$ не можетъ быть опредѣленнымъ.

Здѣсь мы вступаемъ на послѣднюю ступень обобщенія понятія дѣйствительнаго числа. Если мы хотимъ придать смыслъ дѣленію конечнаго числа на нуль, мы должны разсматривать предварительно дѣленіе конечнаго числа на перемѣннаго безгранично уменьшающагося по абсолютной величинѣ дѣлителя и сохраняющаго, по крайней мѣрѣ съ нѣкотораго момента, свой знакъ: $\frac{a}{x}$. Этотъ-то сложный образъ — перемѣнное частное, которое безгранично увеличи-

вается и можетъ быть сдѣлано больше любого напередъ заданнаго большого числа, мы назовемъ безконечно большимъ числомъ и вводимъ для него символъ ∞. При такомъ пониманіи знаковъ дѣйствій и символовъ мы можемъ теперь написать равенство.

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

а если принять во вниманіе знаки чиселъ a и x, то

$$\frac{a}{0} = +\infty \text{ или } \frac{a}{0} = -\infty;$$

знакъ $+$ берется при одинаковыхъ знакахъ a и x, а знакъ $-$ при разныхъ; при чемъ имѣются ввиду лишь достаточно малыя значенія x.

Теперь мы имѣемъ весь рядъ дѣйствительныхъ чиселъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Дѣйствія надъ любою парою этихъ чиселъ имѣютъ вполнѣ опредѣленный смыслъ за нѣкоторыми исключеніями; такъ, напр., не представляютъ опредѣленныхъ значеній выраженія: $\frac{0}{0}$, какъ было уже разсмотрѣно выше; $0 . \infty$, ибо при всякомъ a имѣетъ мѣсто равенство $\frac{a}{0} = \infty$; $\infty - \infty$, ибо при всякомъ a имѣетъ мѣсто $a + \infty = \infty$. Возможны и другія неопредѣленности $\left[\frac{\infty}{\infty}, \infty^0, 0^0, 1^\infty\right]$, которыхъ здѣсь пока мы не разсматриваемъ, такъ какъ въ сущности весь этотъ вопросъ относится къ теоріи предѣловъ, о которой рѣчь впереди.

При изображеніи чиселъ въ видѣ десятичныхъ дробей раціональныя числа представляются **конечными** десятичными дробями, или безконечными, но **періодическими** (напр., $^2/_3 = 0,666......$; $^5/_6 = 0,8333.....$). Ирраціональныя числа изображаются безконечными **непеміодическими** десятичными дробями.

На практикѣ ирраціональныя числа замѣняются конечно раціональными, и даже раціональныя числа, изображенныя въ видѣ десятичныхъ дробей съ большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ, замѣняются десятичными дробями съ меньшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ. по характеру вопроса въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ опредѣляется, какою степенью точности можно удовлетвориться. Такимъ образомъ мы здѣсь сталкиваемся съ вопросомъ о точности вычисленія. Отбрасывая или не зная напередъ мало цѣнныхъ по

существу задачи разрядовъ данныхъ чиселъ, мы допускаемъ въ нихъ погрѣшность и въ результатѣ дѣйствій съ такими приближенными значеніями получимъ, конечно, тоже погрѣшность, оцѣнить которую и составляетъ существенную задачу практическихъ вычисленій. Часто бываетъ важно знать или оцѣнить не абсолютную погрѣшность, а относительную, т.-е. не просто отброшенную или неизвѣстную часть точнаго значенія числа, а отношеніе этой абсолютной погрѣшности къ величинѣ самого числа. Абсолютная погрѣшность можетъ быть велика, а относительная очень мала и удовлетворять требованіямъ точности, предъявляемымъ въ данномъ практическомъ вопросѣ.

Ирраціональныя числа служатъ не практическимъ цѣлямъ, а теоретическимъ. Введеніе ирраціональнаго числа даетъ опредѣленное ариѳметическое содержаніе идеѣ непрерывности. Изученіе величинъ, непрерывно мѣняющихся, каковыми онѣ постулируются при построеніи теоріи, можетъ быть сведено теперь къ изученію непрерывно мѣняющихся чиселъ.

§ 8. **Постоянныя и перемѣнныя величины. Функція.** При постановкѣ той или другой математической задачи нѣкоторыя величины являются данными или извѣстными, другія искомыми или неизвѣстными. Элементарная математика и обращаетъ вниманіе на такое именно раздѣленіе величинъ. При полномъ числѣ условій, если условія эти достаточно простыя, можно составить достаточное число уравненій, изъ которыхъ искомыя или неизвѣстныя величины и опредѣляются; такъ, для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ необходимо составить два независимыхъ уравненія, для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ—три уравненія и т. д.

Высшая математика переноситъ вниманіе на другую сторону постановки той или иной задачи. Конечно, раздѣленіе величинъ на извѣстныя и неизвѣстныя, данныя и искомыя остается въ силѣ, но главный интересъ она сосредоточиваетъ на зависимости однѣхъ величинъ отъ другихъ, именно на зависимости измѣненія одной величины отъ измѣненія другой или другихъ, и съ этой точки зрѣнія раздѣляетъ величины (или соотвѣтствующія имъ числа) на постоянныя и перемѣнныя.

Постоянныя величины однѣ по существу имѣютъ опредѣленное числовое значеніе, напр., отношеніе окружности къ діаметру, другія вслѣдствіе условій задачи. При переходѣ къ другой аналогичной задачѣ эти послѣднія могутъ получить другіе размѣры или другое

числовое значеніе; примѣромъ можетъ служить радіусъ круга. Такого рода постоянныя часто называются **параметрами**.

Перемѣнныя величины въ одной и той же задачѣ могутъ получать различныя числовыя значенія или всевозможныя въ указанныхъ заранѣе предѣлахъ, напр., отъ -1 до $+1$, или съ какими-либо ограниченіями, напр. принимать только цѣлыя значенія, или всевозможныя безъ ограниченій отъ $-\infty$ до $+\infty$. Такъ, если въ окружности, радіусъ которой равенъ единицѣ, разсматривается подвижная хорда, выходящая изъ какой-либо точки круга, то эта хорда будетъ величиной перемѣнной, которая можетъ измѣняться отъ 0 до 2. Въ выраженіяхъ

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot+\frac{1}{x} \quad \text{или} \quad 1.2.3.4\ldots x,$$

x можетъ быть какимъ угодно, но по смыслу только цѣлымъ числомъ.

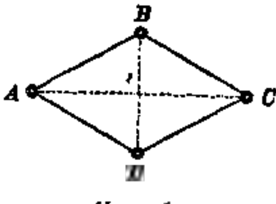
Если мы имѣемъ двѣ перемѣнныя величины, одна изъ которыхъ находится въ нашемъ распоряженіи, такъ что ей мы можемъ давать различныя числовыя значенія, а другая мѣняется только въ зависимости отъ измѣненій первой величины, то первая изъ нихъ называется **независимой перемѣнной**, или **аргументомъ**, а вторая **зависимой перемѣнной**, или **функціей**. Изученіе функцій и составляетъ главную задачу высшей математики.

Примѣры функцій. 1. Въ уравненіи

$$2x-3y-5=0$$

три постоянныхъ: 2, 3, 5 и двѣ перемѣнныхъ величины: x и y. Изъ этихъ двухъ перемѣнныхъ произвольно измѣнять мы можемъ только одну, другая же опредѣляется въ зависимости отъ первой. Давая, напр., x любое числовое значеніе, мы тѣмъ самымъ получимъ для y опредѣленное значеніе: перемѣнное число x при такомъ порядкѣ измѣненія—аргументъ, а y—функція. Измѣненія аргумента x и функціи y въ этомъ примѣрѣ **связаны** даннымъ **уравненіемъ**.

2. Пусть мы имѣемъ ромбъ $ABCD$ (черт. 1), стороны котораго въ видѣ стержней связаны въ вершинахъ шарнирами. Длину каждой стороны примемъ равною единицѣ. Такой ромбъ можетъ мѣнять свою форму; при этомъ будутъ мѣняться и его діагонали AC и BD. Пусть одна изъ діагоналей имѣетъ длину x, а другая y.



Черт. 1.

Двѣ перемѣнныя величины x и y въ своихъ измѣненіяхъ зависятъ одна отъ другой: легко себѣ представить, какъ увеличивается y при умень-

шеніи x или наоборотъ. Эту зависимость можно выразить алгебраическимъ соотношеніемъ — алгебраическимъ уравненіемъ, связывающимъ перемѣнныя величины x и y. Въ самомъ дѣлѣ, сумма квадратовъ діагоналей всякаго параллелограмма равна суммѣ квадратовъ четырехъ его сторонъ. Каждая сторона разсматриваемаго ромба равна 1. Слѣдовательно,

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Давая x различныя числовыя значенія, т.-е. принимая x за аргументъ, можно изъ этого уравненія вычислить и соотвѣтственныя значенія y, которое является функціей x:

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

Какъ видно изъ этой формулы, а также и изъ геометрическихъ соображеній, аргументу x можно давать различныя значенія въ предѣлахъ отъ 0 до 2.

3. Въ тригонометріи изучаютъ зависимость отношеній сторонъ прямоугольнаго треугольника отъ одного изъ острыхъ угловъ. Пусть данъ прямоугольный треугольникъ ABC (черт. 2). Форма этого треугольника, а стало быть и отношенія его сторонъ:

$$\frac{a}{c} = x, \quad \frac{b}{c} = y, \quad \frac{a}{b} = z$$

$$\frac{c}{a} = u, \quad \frac{c}{b} = v, \quad \frac{b}{a} = w$$

Черт. 2.

вполнѣ опредѣляются величиною одного изъ острыхъ угловъ $\varphi \doteq \widehat{CAB}$. При измѣненіи этого угла измѣняется и форма треугольника, а слѣдовательно измѣняются и отношенія сторонъ. Уголъ φ поэтому можно считать аргументомъ, а числа x, y, z, u, v, w — функціями этого угла. Зависимость этихъ функцій отъ аргумента φ нельзя выразить алгебраически подобно зависимости въ предыдущемъ примѣрѣ, и потому для выраженія ея приняты особые символы; именно, x есть синусъ угла φ и обозначается символомъ $\sin\varphi$, y есть косинусъ угла φ и обозначается символомъ $\cos\varphi$ и т. д.:

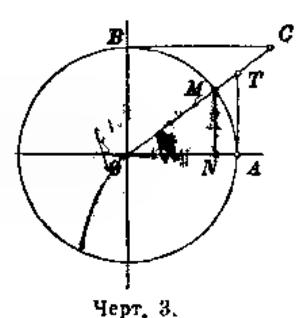
$$x = \sin\varphi, \quad y = \cos\varphi, \quad z = tg\,\varphi;$$
$$u = \sec\varphi, \quad v = cosec\,\varphi, \quad w = cotg\,\varphi.$$

Таково **первоначальное** опредѣленіе **тригонометрическихъ функцій**; по смыслу этого опредѣленія аргументъ φ долженъ быть острымъ угломъ, т.-е. мѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Для другихъ значеній аргумента функціи остаются пока безъ опредѣленія.

Распространеніе опредѣленія тригонометрическихъ функцій и для значеній аргумента, выходящихъ изъ указанныхъ границъ, приводитъ къ обычной геометрической интерпретаціи этихъ функцій въ видѣ тѣхъ или иныхъ линій въ плоскости круга, радіусъ котораго принятъ за единицу (черт. 3):



Черт. 3.

$$\frac{NM}{OM} = \sin\varphi, \quad \frac{ON}{OM} = \cos\varphi, \quad \frac{AT}{OM} = tg\,\varphi,$$

$$\frac{BC}{OM} = \cot\varphi, \quad \frac{OT}{OM} = \sec\varphi, \quad \frac{OC}{OM} = cosec\,\varphi.$$

Здѣсь уже каждому значенію аргумента φ, заключеннаго между $-\infty$ и $+\infty$:

$$-\infty < \varphi < +\infty$$

соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе функціи, и лишь при $\varphi = \pm\infty$ функціи остаются совершенно безъ опредѣленія.

Зависимость между перемѣнными величинами выражается въ томъ, что **каждому значенію аргумента соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе функціи**; это свойство и является характернымъ признакомъ, опредѣляющимъ понятіе функціи. Функціональная зависимость можетъ выражаться помощью алгебраическихъ знаковъ величинъ и операцій надъ ними, какъ въ первыхъ двухъ предыдущихъ примѣрахъ; но можетъ быть и невыразимой алгебраически, и такимъ образомъ является необходимость введенія новыхъ символовъ, какъ, напр., для тригонометрическихъ функцій: $y = \sin\varphi$; $x = \cos\varphi$ и т. д.

Если мы хотимъ выразить математическимъ символомъ, что одна величина (y) зависитъ отъ другой (x), но не знаемъ точно природы этой зависимости или не можемъ опредѣлить ее пока или совсѣмъ помощью алгебраическихъ или иныхъ извѣстныхъ знаковъ, то мы

пишемъ такъ: $y = f(x)$ и читаемъ: y есть функція отъ x или y есть функція x. Здѣсь f (начальная буква латинскаго слова functio) не величина, а символъ зависимости, и чтобы не принять правую часть за произведеніе, аргументъ x ставятъ въ скобки. Знакъ $f(x)$ обозначаетъ перемѣнную величину функціи, соотвѣтствующую перемѣнной величинѣ аргумента., а знакъ $f(a)$ представляетъ значеніе функціи, которое она принимаетъ при $x = a$.

Если въ одной и той же задачѣ разсматриваются различныя функціи (y, z, u, v и т. п.), зависящія различно отъ одного и того же аргумента (x), то эти функціи должны быть обозначены различно; напр., $y = f(x)$, $z = F(x)$, $u = \varphi(x)$ и т п. Символомъ зависимости можно выбрать любую букву, не имѣющую даже созвучія съ начальной буквой слова functio, напр. $v = g(x)$, и даже буква, обозначающая величину функціи, можетъ служить и символомъ соотвѣтствующей зависимости, напр. $v = v(x)$: здѣсь v въ лѣвой части — величина функціи, v въ правой — символъ зависимости.

§ 9. **Предѣлъ.** Вычислить по первоначальному смыслу слова значитъ выполнить то или иное ариѳметическое дѣйствіе или рядъ такихъ дѣйствій. Выполненіе ряда ариѳметическихъ дѣйствій надъ раціональными числами сводится въ концѣ концовъ къ конечному счету Но уже въ понятіи ирраціональнаго числа, какъ было отмѣчено раньше, включена идея безконечнаго процесса. Съ такимъ же безконечнымъ процессомъ имѣютъ дѣло и нѣкоторыя задачи элементарной математики. Періодическая дробь, напр. 0,2323..., которая является безконечно-убывающей прогрессіей:

$$\frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} \ldots,$$

всякая иная безконечно убывающая геометрическая прогрессія, напр. $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \ldots$, вычисленіе площади круга — представляютъ примѣры такого безконечнаго процесса. Результатъ безконечнаго процесса достигается не путемъ простого счета, а помощью перехода къ предѣлу. Такъ мы можемъ вычислить площадь вписаннаго въ данный кругъ квадрата, далѣе площадь восьмиугольника, потомъ шестнадцатиугольника и т. д, но никогда при такомъ последовательномъ вычисленіи не достигнемъ площади круга. Сужденіе о величинѣ этой площади есть переходъ къ предѣлу.

Примѣненіе безконечнаго процесса, т.-е. теоріи предѣловъ къ изученію функцій приводитъ къ такимъ понятіямъ, какъ произ-

водная, дифференціалъ и интегралъ. Смыслъ и значеніе этихъ терминовъ будутъ разъяснены и развиты далѣе Ученіе о нихъ раздѣляется на два отдѣла: дифференціальное и интегральное исчисленіе, которыя объединяются въ одну науку математическаго анализа или просто анализа.

§ 10. **Методы математики.** Расширеніе понятія числа ведетъ къ соотвѣтственному расширенію понятія вычисленія и сопровождается созданіемъ новыхъ математическихъ образовъ и понятій, служащихъ орудіемъ математическаго изслѣдованія, орудіемъ, которое и носитъ названіе аналитическаго метода. Свести какую-либо задачу хотя бы и конкретнаго, но математическаго содержанія къ задачѣ вычисленія и значитъ рѣшать эту задачу аналитически. Число представляетъ высшую степень математической абстракціи, чѣмъ и опредѣляется общность аналитическаго метода.

Но есть и другой способъ математическаго познанія, который стремится ту или иную математическую мысль воплотить въ какой-либо представимой геометрической формѣ, не готовой или данной напередъ, а созидаемой путемъ построенія соотвѣтственно взаимоотношеніямъ различныхъ сторонъ воплощаемой мысли. Такой путь познанія составляетъ методъ геометрическій. Этотъ методъ обогащается въ своемъ содержаніи и средствахъ вмѣстѣ съ развитіемъ и расширеніемъ понятій построенія и формы.

Такимъ образомъ анализъ, какъ понимается это слово въ математикѣ, можно охарактеризовать въ общихъ чертахъ однимъ словомъ— вычисленіе, понимая этотъ терминъ въ обширномъ смыслѣ. Соотвѣтственнымъ образомъ геометрія, какъ методъ, характеризуется словомъ — построеніе, если и этотъ терминъ понимать также широко.

Наглядность геометрическихъ методовъ и общность аналитическихъ - одинаково цѣнныя стороны математическаго познанія и потому важно было бы связать оба метода и получить такимъ образомъ двойную выгоду. Дѣйствительно, можно установить, такъ сказать, лексиконъ для перевода математической мысли съ языка геометрическаго на языкъ аналитическій и обратно.

Тотъ отдѣлъ математики, въ которомъ устанавливаются правила для такого перевода, носитъ названіе аналитической геометріи. Первая часть настоящаго курса и посвящена изложенію основъ этой науки.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

МЕТОДЪ КООРДИНАТЪ.

§ 1. **Предметъ аналитической геометріи.** Изслѣдованіе свойствъ геометрическихъ образовъ, иначе—пространственныхъ формъ (фигуръ, тѣлъ, линій, поверхностей и т. п.) помощью вычисленія составляетъ предметъ аналитической геометріи. При этомъ въ аналитической геометріи стараются свести къ задачѣ вычисленія всякій геометрическій вопросъ, касающійся не только величины, но также формы и положенія фигуры.

Всякая фигура опредѣляется вполнѣ со всѣми своими свойствами положеніемъ точекъ, составляющихъ ее. Поэтому при аналитическомъ изученіи геометрическихъ образовъ прежде всего надо умѣть опредѣлять помощью чиселъ положеніе точки.

Общій вопросъ объ опредѣленіи положенія точки можно разбить на три задачи: 1) опредѣлить положеніе точки на прямой, 2) на плоскости и 3) въ пространствѣ.

Рѣшеніе этихъ вопросовъ дало возможность Декарту (1637) создать методъ — методъ координатъ — не только для систематическаго изслѣдованія геометрическихъ задачъ помощью алгебры, но и обратно для геометрическаго иллюстрированія вопросовъ самой алгебры. Декартъ и считается творцомъ аналитической геометріи.

§ 2. **Опредѣленіе положенія точки на прямой** Положеніе точки на прямой можно опредѣлить одни мъ числомъ. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ на разсматриваемой прямой нѣкоторую опредѣленную точку O (черт. 4) за начальную и пусть A будетъ та точка этой прямой, положеніе которой нужно опредѣлить помощью числа. Отрѣзокъ OA представляетъ смѣщеніе точки A отъ начальной точки O. Величину этого смѣщенія можно выразить числомъ, измѣряя отрѣзокъ OA какой-либо единицей мѣры, напр.

O E A

Черт 4.

$OE = e$, а принимая во вниманіе, что отъ *начальной* точки O можно откладывать отрѣзки въ ту или другую сторону, можно приписать полученному числу тотъ или другой по условію знакъ.

Полученное такимъ образомъ положительное или отрицательное число $x = \frac{OA}{e}$ называется координатой точки A, а совокупность начальныхъ данныхъ: 1) сама прямая, на которой лежатъ опредѣляемыя точки, 2) начальная точка O этой прямой, 3) единица мѣры и 4) установленное положительное направленіе основной прямой системой координатъ на прямой. Мы будемъ считать направленіе основной прямой вправо (при горизонтальномъ направленіи ея) положительнымъ, а влѣво—отрицательнымъ.

Если система координатъ на прямой установлена, то каждой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ своя координата (опредѣленное число) и обратно—каждому числу, какъ координатѣ, соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная точка прямой (ср. введеніе § 6, основное предложеніе). Напр., точка A (черт. 5) прямой Ox, при единицѣ мѣры $e = OE$, имѣетъ координату $x = \frac{OA}{e} = 4$. Обратно, числу $x_1 = -2{,}5$ соотвѣтствуетъ точка B. Координата начальной точки O—нуль.

Черт. 5.

§ 3. **Опредѣленіе положенія точки на плоскости.** Для опредѣленія положенія точки на плоскости уже недостаточно одного числа.

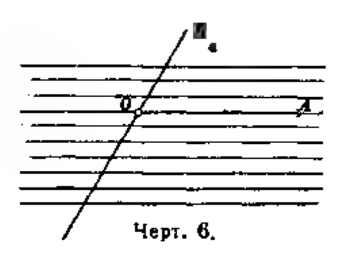
Представимъ себѣ, что на *плоскости движется прямая* параллельно самой себѣ, другими словами—пусть на плоскости имѣется непрерывный рядъ параллельныхъ прямыхъ. Положеніе точки на этой плоскости будетъ опредѣлено, если мы сумѣемъ указать: 1) на какой изъ этихъ параллельныхъ прямыхъ лежитъ точка и 2)—гдѣ на этой прямой.

Положеніе точки на прямой, какъ мы уже знаемъ, опредѣляется однимъ числомъ одной координатой. Далѣе можно ввести другое число, которое указываетъ, на какой изъ параллельныхъ прямыхъ лежитъ разсматриваемая точка. Такимъ образомъ для опредѣленія положенія точки на плоскости нужно дать два числа, двѣ координаты: одно число опредѣляетъ линію на плоскости, другое—точку на этой линіи.

Нужно теперь выбрать начальныя данныя, которыя устанавли-

вали бы опредѣленное построенiе точекъ плоскости по ихъ координатамъ.

1) Одну изъ параллельныхъ прямыхъ мы принимаемъ за начальную, напр., прямую OA (черт. 6). Прямая OA дѣлитъ плоскость на двѣ области –верхнюю и нижнюю (если параллельныя прямыя горизонтальны). Условимся смѣщенiе отъ начальной прямой OA въ верхнюю область считать положительнымъ, а въ нижнюю—отрицательнымъ. 2) Начальныя точки параллельныхъ прямыхъ предполагаемъ лежащими на одной прямой, напр. OB, и смѣщенiе отъ этихъ начальныхъ точекъ вправо будемъ считать положительнымъ, а влѣво — отрицательнымъ. 3) Условимся разстоянiя параллельныхъ прямыхъ отъ начальной OA измѣрять по направленiю OB. Наконецъ, 4) выберемъ единицу мѣры.



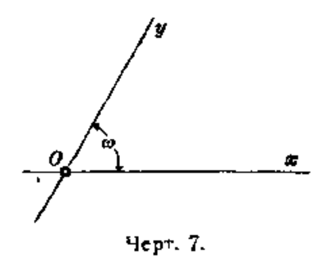
Черт. 6.

Всѣ эти начальныя данныя въ совокупности опредѣляютъ способъ опредѣленiя координатъ точки на плоскости и составляютъ **система координатъ на плоскости**. Прямыя OA и OB называются **осями координатъ**, точка O—**началомъ координатъ**.

Число, опредѣляющее положенiе точки на одной изъ параллельныхъ прямыхъ или иначе — смѣщенiе точки отъ прямой OB называется **абсциссой** этой точки и обозначается буквою x.

Число, опредѣляющее одну изъ параллельныхъ прямыхъ или иначе смѣщенiе отъ начальной прямой OA называется **ординатой** точки и обозначается буквою y.

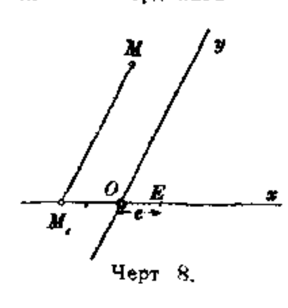
Абсцисса откладывается отъ оси OB по направленiю оси OA или на самой оси OA. Поэтому послѣдняя называется **осью абсциссъ** или осью x-овъ, и для обозначенiя ея вмѣсто буквы A въ **положительномъ** направленiи ставится буква x. Подобнымъ же образомъ ордината откладывается отъ оси абсциссъ въ направленiи оси OB или же на самой этой оси. Поэтому эта ось называется **осью ординатъ** или осью y-овъ и вмѣсто буквы B въ **положительномъ** ея направленiи ставится буква y (черт. 7). Уголъ xOy называется координатнымъ угломъ (ω).



Черт. 7.

Если координатный уголъ прямой, т.-е. $\omega = 90^0$, то такая система координатъ называется прямоугольною или декартовой, въ противномъ случаѣ—косоугольной.

Задача 1. Опредѣлить координаты данной на плоскости точки при данной системѣ координатъ.



Черт. 8.

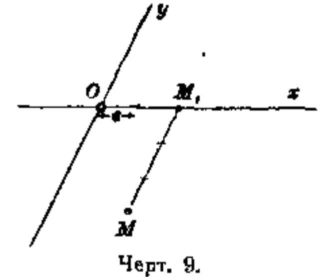
Рѣшеніе. Пусть M—данная точка, а отрѣзокъ e принятая единица мѣры. Проводимъ прямую MM_1 параллельно оси ординатъ до встрѣчи съ осью x-овъ и измѣряемъ отрѣзки OM_1 и M_1M. Полученныя числа съ соотвѣтствующими положенію точки M знаками и будутъ абсциссой и ординатой данной точки:

$$\frac{OM_1}{e} = x, \quad \frac{M_1M}{e} = y.$$

На черт. 8 $x = -1{,}5$; $y = 4$.

Задача 2. Построить точку по даннымъ ея координатамъ, напр. $x = 2$, $y = -3$.

Рѣшеніе. Откладываемъ (черт. 9) по оси абсциссъ отъ начала координатъ въ сторону, соотвѣтствующую знаку данной абсциссы (вправо), отрѣзокъ $OM_1 = 2e$, а на прямой, выходящей изъ полученной точки M_1 параллельно оси ординатъ, въ соотвѣтствующую знаку данной ординаты сторону (внизъ), отрѣзокъ M_1M, равный $3e$. M и будетъ искомой точкой. Можно было-бы откладывать сначала ординату по оси ординатъ и потомъ абсциссу по направленію оси абсциссъ; результатъ былъ бы тотъ же самый.



Черт. 9.

Примѣчаніе. Для обозначенія точки, данной координатами, будемъ ставить въ скобкахъ эти координаты, начиная съ абсциссы, рядомъ съ буквой, обозначающей точку. Напр. $M(2, -3)$ обозначаетъ, что точка M имѣетъ координаты $x = 2$, $y = -3$.

Вопросы: 1. Какъ располагаются на плоскости точки, имѣющія одну и ту же абсциссу и различныя ординаты, иначе — точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ равенству $x = a$, гдѣ a нѣкоторое постоянное?

2. Какой геометрическій образъ выдѣляется на плоскости, если въ предыдущемъ вопросѣ постоянному a давать различныя значенія, иначе — если a разсматривать, какъ параметръ? Точно также, если въ равенствѣ $y = b$, разсматривать b, какъ параметръ?

3. Какими различными способами можно построить точку по даннымъ ея координатамъ $x = a$, $y = b$ и обратно—по данной точкѣ опредѣлить ея координаты?

§ 4. **Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ.** Для опредѣленія точки въ пространствѣ двухъ чиселъ двухъ координатъ—недостаточно; для этой цѣли необходимо три числа – три координаты.

Въ самомъ дѣлѣ, пространство можно разсматривать образованнымъ движеніемъ плоскости параллельно самой себѣ, иначе — въ пространствѣ можно представить непрерывный рядъ параллельныхъ плоскостей. Одну изъ этихъ плоскостей примемъ за начальную. Положеніе всякой другой изъ параллельныхъ плоскостей опредѣляется смѣщеніемъ ея отъ положенія начальной плоскости въ ту или другую сторону. Это смѣщеніе можно опредѣлять положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Каждая точка пространства лежитъ въ одной изъ параллельныхъ плоскостей Поэтому для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ нужно знать число z, выдѣляющее одну изъ параллельныхъ плоскостей, въ которой лежитъ данная точка, и, кромѣ того, согласно предыдущему параграфу, два числа x и y, опредѣляющихъ положеніе этой точки на выдѣленной плоскости. Слѣдовательно необходимо знать три числа—три координаты x, y и z, числомъ z опредѣляется плоскость въ пространствѣ, числомъ y прямая на этой плоскости и, наконецъ, числомъ x — точка на этой прямой.

Мы оставимъ пока безъ ближайшаго разсмотрѣнія методъ координатъ въ пространствѣ и перейдемъ къ установленію основныхъ формулъ метода координатъ на плоскости формулъ, дающихъ возможность элементарные геометрическіе образы или понятія этой области переводить на языкъ аналитическій.

§ 5. **Разстояніе между двумя точками.** Даны двѣ точки своими координатами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Требуется вычисленіемъ опредѣлить разстояніе между этими точками. Будемъ предполагать, что система координатъ прямоугольная.

Построивъ координаты данныхъ точекъ (черт. 10) и проведя изъ точки A прямую, параллельную оси абсциссъ, до пересѣченія съ ординатою (или ея продолженіемъ) второй точки B, получимъ прямоугольный треугольникъ ACB. По теоремѣ Пиѳагора имѣемъ:

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2}$$

Черт. 10.

Но катеты этого прямоугольнаго треугольника можно выразить че-

резъ координаты данныхъ точекъ. Какъ слѣдуетъ изъ чертежа:

$$AC = A_1B_1 = x_2 - x_1; \qquad CB = B_1B - B_1C = B_1B - A_1A = y_2 - y_1$$

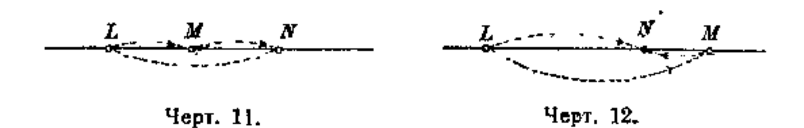
Слѣдовательно

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

т.-е. **разстояніе между двумя точками равняется корню квадратному изъ суммы квадратовъ разностей соотвѣтственныхъ координатъ этихъ точекъ.**

Предыдущій выводъ формулы разстоянія не указываетъ на ея общность, т.-е. остается еще не выясненнымъ, имѣемъ ли мы право примѣнять выведенную формулу при всякомъ положеніи точекъ A и B относительно осей координатъ. Дадимъ теперь такой выводъ, изъ котораго вытекала бы и общность формулы. Для этого нужно принять во вниманіе не только величину отрѣзковъ, съ которыми мы оперировали, но и ихъ направленіе. Въ аналитической геометріи мы имѣемъ дѣло съ отрѣзками направленными, т.-е., въ отличіе отъ элементарной геометріи, различаемъ отрѣзки не только по величинѣ, но и направленію.

Условимся буквами, стоящими у начала и конца какого-нибудь отрѣзка, обозначать не только величину его, но послѣдовательностью этихъ буквъ указывать и его направленіе. Какой-либо отрѣзокъ LM представляетъ такимъ образомъ смѣщеніе изъ начальной точки L въ конечную точку M. Два послѣдовательно произведенныхъ смѣщенія изъ точки L въ точку M, а изъ точки



Черт. 11. Черт. 12.

M въ точку N, лежащую на той же прямой (черт. 11), составляютъ сумму этихъ смѣщеній, сумму двухъ отрѣзковъ LM и MN, сумму равносильную одному смѣщенію изъ начальной точки перваго отрѣзка въ конечную точку второго. При этомъ безразлично, будетъ ли точка M лежать между точками L и N или на продолженіи отрѣзка LN (черт. 12). При такомъ опредѣленіи суммы двухъ смѣщеній или двухъ направленныхъ отрѣзковъ имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство для всякихъ трехъ точекъ L, M, N, лежащихъ на одной прямой:

$$LM + MN = LN. \qquad (2)$$

Отрѣзокъ LN, если N совпадаетъ съ начальною точкою L перваго отрѣзка, не имѣетъ длины и потому $LL = 0$. Такимъ образомъ мы получаемъ второе равенство

$$LM + ML = 0. \tag{3}$$

Отсюда

$$LM = -ML. \tag{4}$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что измѣнить направленіе отрѣзка можно или переставляя буквы въ его обозначеніи, или поставивъ знакъ минусъ передъ нимъ.

Обращаясь къ обозначеніямъ на черт. 10, легко замѣтить, что при любомъ положеніи точекъ A и B на плоскости точки B, C и B_1 лежатъ на одной прямой, точно такъ же, какъ и точки O, A_1, B_1. Слѣдовательно, всегда имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства:

$$AC = A_1B_1 = A_1O + OB_1 = -OA_1 + OB_1 = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1,$$

$$CB = CB_1 + B_1B = AA_1 + B_1B = -A_1A + B_1B = -y_1 + y_2 = y_2 - y_1$$

и, значитъ, при любомъ положеніи точекъ A и B на плоскости будемъ имѣть:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Помощью формулы (1) могутъ быть рѣшены многія задачи, гдѣ только входитъ вопросъ о разстояніи между двумя точками.

Задача 1. Данъ треугольникъ координатами своихъ вершинъ; $A(5,3)$, $B(2, -1)$, $C(-1, 4)$. Опредѣлить его стороны.

Рѣшеніе. По формулѣ разстоянія имѣемъ

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \sim 5{,}8\ ^{*)}$$

$$CA = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} \sim 6{,}1.$$

Задача 2. Вычислить координаты центра круга, описаннаго около треугольника ABC предыдущей задачи.

---

*) $\sim$ — знакъ приближеннаго равенства.

Рѣшеніе. Пусть M искомый центръ круга, имѣетъ координаты x, y. По условію $MA = MB = MC$, какъ радіусы одного круга. Но

$$MA = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}, \quad MB = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2},$$

$$MC = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ x и y имѣемъ два уравненія:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2},$$

или

$$-6x - 8y + 29 = 0 \quad \text{и} \quad -12x + 2y + 17 = 0,$$

откуда

$$x = 1\tfrac{43}{54}, \quad y = 2\tfrac{5}{18}.$$

Задача 3. Дана точка N (5,3), а другая точка P перемѣщается по кругу съ центромъ въ точкѣ N и радіусомъ ревнымъ 6 единицамъ принятаго масштаба. Какимъ уравненіемъ связаны перемѣнныя координаты движущейся точки?

Рѣшеніе. Пусть x, y—перемѣнныя координаты точки P. По условію $NP = 6$. Но по формулѣ резстоянія

$$NP = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}.$$

Слѣдовательно

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = 6$$

или

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 36.$$

Этимъ уравненіемъ и связаны измѣненія координатъ движущейся точки P. нельзя дать произвольныхъ значеній обѣимъ перемѣннымъ координатамъ x и y, а только одной; другая опредѣлится изъ предыдущàго уревненія. Такимъ образомъ кругу соотвѣтствуетъ опредѣленное уравненіе съ двумя перемѣнными координатами.

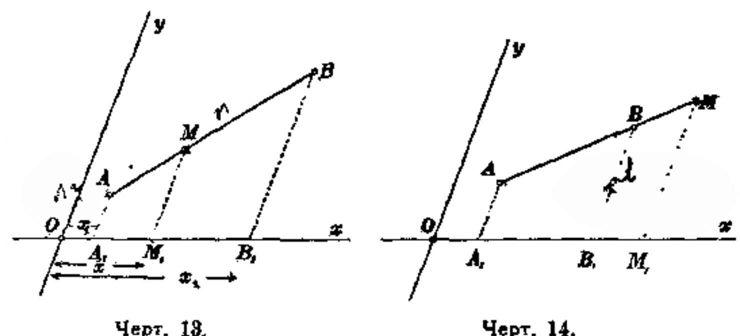
Задача 4. Опредѣлить координаты точекъ пересѣченія круга задачи 3 съ осью абсциссъ и осью ординатъ.

§ 6. Вычисленіе координатъ точки, дѣлящей данный отрѣзокъ въ данномъ отношеніи. Часто положеніе нѣкоторыхъ точекъ какой-нибудь фигуры опредѣляется координатами, измѣренными напередъ, а положеніе другихъ — какими-нибудь геометрическими условіями. Возникаетъ, такимъ образомъ, задача — вычисленіемъ опредѣлить координаты этихъ послѣднихъ точекъ. Къ числу подобнаго рода задачъ относится слѣдующая:

Даны двѣ точки своими координатами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Точка M дѣлитъ отрѣзокъ AB (черт. 13) въ отношенiи $\frac{AM}{MB}=\lambda$. Найти координаты точки M.

Можно даже считать точку M лежащей на продолженiи въ ту



Черт. 13. Черт. 14.

или другую сторону отрѣзка AB (черт. 14). Въ такомъ случаѣ мы будемъ говорить, что точка M дѣлитъ отрѣзокъ AB внѣшнимъ образомъ. При такомъ положенiи точки M отрѣзки AM и MB имѣютъ разное направленiе, и отношенiе $\frac{AM}{MB}$, обозначенное нами буквой λ, будетъ числомъ отрицательнымъ, при чемъ абсолютная величина его будетъ больше единицы, если точка M лежитъ на продолженiи AB въ сторону точки B, и меньше единицы, если точка M лежитъ на продолженiи AB въ сторону точки A.

Если точка M дана (черт. 14 или 13), то тѣмъ самымъ дается и число λ. Обратно, если дано число λ, то легко опредѣляется и положенiе точки M на прямой AB. Такого рода число, которое выдѣляетъ какимъ-либо способомъ изъ ряда однородныхъ геометрическихъ образовъ одинъ, называется параметромъ *).

Строимъ координаты точекъ A, B и M. Прямыя AA_1, BB_1 и MM_1 параллельны и, какъ параллельныя, разсѣкаютъ прямую AB и ось абсциссъ на пропорцiональныя части. Принимая во вниманiе сверхъ того и направленiе соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, будемъ имѣть, такимъ образомъ, слѣдующую пропорцiю:

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1}=\frac{AM}{MB}$$

*) Ср. введенiе § 8.

Но, согласно правиламъ вышеустановленныхъ дѣйствій съ направленными отрѣзками, имѣемъ:

$$A_1M_1 = A_1O + OM_1 = -OA_1 + OM_1 = -x_1 + x = x - x_1$$

$$M_1B_1 = M_1O + OB_1 = -OM_1 + OB_1 = -x + x_2 = x_2 - x.$$

Кромѣ того, по условію $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Слѣдовательно,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda .$$

Рѣшая это уравненіе относительно x, будемъ имѣть:

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \quad \text{или} \quad (1 + \lambda)\, x = x_1 + \lambda x_2 ,$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} .$$

Подобнымъ же образомъ, проводя черезъ точки A, B и M прямыя AA_2, BB_2, MM_2, параллельныя оси абсциссъ, найдемъ

$$\frac{A_2M_2}{M_2B_2} = \frac{AM}{MB} ,$$

а, замѣняя отрѣзки перваго отношенія черезъ ординаты данныхъ точекъ, получимъ уравненіе

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda ,$$

изъ котораго опредѣляется y:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} .$$

Если точка M лежитъ въ серединѣ отрѣзка AB, т.-е. $AM = MB$, то $\lambda = 1$. Обозначая черезъ x_0, y_0 координаты середины отрѣзка, получимъ

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} , \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} ,$$

т.-е. координаты середины отрѣзка равняются полусуммамъ соотвѣтственныхъ координатъ концовъ его.

Черт. 15.

Задача 1. Данъ треугольникъ координатами своихъ вершинъ; $A(5, 3)$, $B(2, -1)$, $C(-1, 4)$. Опредѣлить координаты точки пересѣченія медіанъ (черт. 15).

Рѣшенiе. Въ точкѣ пересѣченiя медiанъ каждая медiана раздѣляется на двѣ части, изъ которыхъ одна, считая отъ вершины, вдвое больше другой. Напр. $\frac{AM}{MM_1} = 2$. Координаты точки A даны. Координаты же x_1, y_1 точки M_1, какъ середины отрѣзка BC, легко опредѣляются:

$$x_1 = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}.$$

Слѣдовательно, опредѣляются и координаты x, y точки M, если принять во вниманiе, что $\lambda = \frac{AM}{MM_1} = 2$:

$$x = \frac{5 + 2 \cdot {}^1\!/_2}{1+2} = 2, \qquad y = \frac{3 + 2 \cdot {}^3\!/_2}{1+2} = 2.$$

Задача 2. Опредѣлить медiаны треугольника предыдущей задачи.

Рѣшенiе. Координаты вершинъ даны. Координаты основанiй медiанъ, т.-е. срединъ сторонъ даннаго треугольника опредѣляются по соотвѣтствующимъ формуламъ. Координаты точки M_1

$$x_1 = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2},$$

координаты точки M_2:

$$x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2},$$

координаты точки M_3:

$$x_3 = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}, \qquad y_3 = \frac{3+(-1)}{2} = 1.$$

Слѣдовательно,

$$AM_1 = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{90}}{2} \sim \frac{9{,}5}{2} \sim 4{,}8; \qquad BM_2 = \sqrt{0 + \frac{81}{4}} = 4{,}5;$$

$$CM_3 = \sqrt{\frac{81}{4} + 9} = \frac{\sqrt{117}}{2} \sim \frac{10{,}8}{2} = 5{,}4.$$

Задача 3. Вычислить координаты точки пересѣченiя медiанъ треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Отв. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

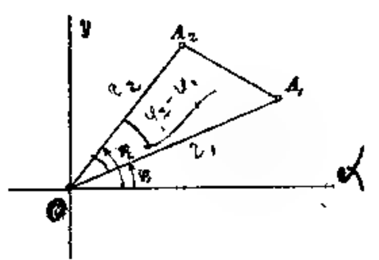
Задача 4. Въ вершинахъ треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ помѣщены одинаковыя массы. Вычислить координаты центре тяжести (точнѣе центра параллельныхъ силъ) этихъ массъ.

Отв. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Задача 5. Въ вершинахъ $A(x_1\, y_1)$, $B(x_2\, y_2)$, $C(x_3\, y_3)$ помѣщены массы m, n, l. Вычислить координаты центра тяжести этихъ массъ.

Отв. $x = \dfrac{mx_1 + nx_2 + lx_3}{m + n + l}$, $y = \dfrac{my_1 + ny_2 + ly_3}{m + n + l}$.

§ 7. Вычисленіе площади многоугольника по координатамъ его вершинъ. 1. Разсмотримъ предварительно частную задачу—задачу опредѣленія площади треугольника, одна изъ вершинъ котораго лежитъ въ началѣ координатъ. Такой треугольникъ будетъ вполнѣ опредѣленъ координатами двухъ остальныхъ своихъ вершинъ. Къ этой задачѣ сводится и общая задача опредѣленія площади любого многоугольника по координатамъ его вершинъ.



Черт. 16.

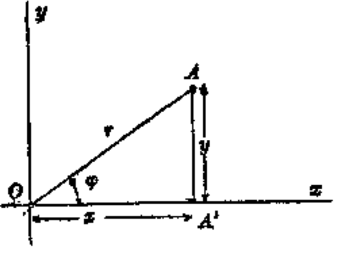
Будемъ предполагать систему координатъ прямоугольной. Пусть x_1, y_1—данныя координаты вершины A_1, а x_2, y_2—данныя координаты вершины A_2 треугольника OA_1A_2 (черт. 16). Обозначимъ стороны треугольника OA_1A_2, выходящія изъ начала координатъ, черезъ r_1, r_2, а углы ихъ наклона къ оси абсциссъ черезъ φ_1 и φ_2:

$$OA_1 = r_1, \quad OA_2 = r_2 \quad \widehat{xOA_1} = \varphi_1, \qquad \widehat{xOA_2} = \varphi_2.$$

Уголъ при вершинѣ O опредѣляется черезъ углы φ_1 и φ_2:

$$A_1\widehat{O}A_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Отрѣзокъ, соединяющій начало координатъ съ какой-либо точкой плоскости, часто называется радіусомъ-векторомъ, а уголъ его наклона къ оси абсциссъ — амплитудой. Радіусъ-векторъ r и амплитуда φ какой-либо точки A плоскости (черт. 17) связаны простымъ соотношеніемъ съ декартовыми координатами x и y этой точки—соотношеніемъ, вытекающимъ изъ разсмотрѣнія прямоугольнаго треугольника $OA'A$:



Черт. 17.

$$r \,.\, \cos\varphi = x, \qquad r \,.\, \sin\varphi = y. \tag{1}$$

Воспользуемся для вычисленія площади треугольника радіусами-векторами r_1 и r_2 и амплитудами φ_1 и φ_2, какъ вспомогательными величинами, и послѣ введемъ вмѣсто нихъ, на основаніи соотношенія (1), данныя координаты вершинъ треугольника.

Площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ его сторонъ на синусъ угла, заключеннаго между этими сторонами:

$$\triangle OA_1A_2 = \frac{1}{2} r_1 . r_2 \ sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

или

$$\triangle OA_1A_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 (sin\,\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(r_1 \cos\varphi_1 . r_2 \sin\varphi_2 - r_2 \cos\varphi_2 . r_1 \sin\varphi_1).$$

Но по формуламъ (1):

$$r_1 . \cos\varphi_1 = x_1, \quad r_2 \sin\varphi_2 = y_2, \quad r_2 \cos\varphi_2 = x_2, \quad r_1 . \sin\varphi_1 = y_1.$$

Слѣдовательно, обозначая сокращенно площадь треугольника OA_1A_2 черезъ $\triangle_{12}$, будемъ имѣть:

$$\triangle_{12} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \tag{2}$$

или символически:

$$\triangle_{12} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{2'}$$

Символическое выраженіе

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

мы будемъ понимать какъ разность произведеній составляющихъ его элементовъ, расположенныхъ по діагоналямъ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Самое выраженіе въ томъ (2) или другомъ (2′) его видѣ называется о п р е д ѣ л и т е л е м ъ или д е т е р м и н а н т о м ъ. Это одинъ изъ простѣйшихъ детерминантовъ—детерминантъ в т о р о г о порядка (по числу элементовъ въ строкѣ или столбцѣ).

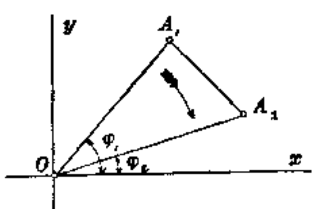
Детерминанты различныхъ порядковъ встрѣчаются при рѣшеніи уравненій первой степени со многими неизвѣстными: числители и знаменатели рѣшеній и будутъ детерминантами.

Аналитическое выраженіе для площади треугольника:

$$\frac{1}{2} r_1 . r_2 \ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

можетъ имѣть какъ положительное, такъ и отрицательное значеніе, смотря по тому, будетъ ли φ_2 больше или меньше φ_1. Какъ же понимать отрицательное значеніе площади?

Будемъ располагать вершины треугольника $A_1 A_2 O$ въ круговомъ порядкѣ: за A_1 слѣдуетъ A_2, за A_2—вершина O, за O—вершина A_1. Если $\varphi_2 > \varphi_1$, то это чередованіе вершинъ (черт. 16) обратно движенію часовой стрѣлки. Если же $\varphi_1 > \varphi_2$, то чередованіе вершинъ (черт. 18) согласно съ движеніемъ часовой стрѣлки.



Черт. 18.

Круговая перестановка вершинъ не мѣняетъ знака площади: площади треугольниковъ $A_2 A_2 O$, $A_2 O A_1$, $O A_1 A_2$ имѣютъ одинаковый знакъ. Если въ задачѣ требуется вычислить только площадь треугольника, то чередованіе его вершинъ не играетъ особой роли и въ результатѣ вычисленія по формулѣ (2) мы можемъ отбросить отрицательный знакъ, если таковой получился. Но во многихъ вопросахъ то или другое чередованіе вершинъ и, слѣдовательно, знакъ площади имѣетъ существенное значеніе, какъ, напр., въ слѣдующей задачѣ вычисленія площади многоугольника.

2. Вычисленіе площади многоугольника по координатамъ его вершинъ. Положимъ, требуется вычислить площадь пятиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, координаты вершинъ котораго даны:

$$A_1(x_1, y_1), \quad A_2(x_2, y_2), \quad A_3(x_3, y_3), \quad A_4(x_4, y_4), \quad A_5(x_5, y_5).$$

Соединяя вершины этого пятиугольника (черт. 19) съ началомъ координатъ, получимъ пять треугольниковъ:

$$OA_1A_2, \ OA_2A_3, \ OA_3A_4, \ OA_4A_5, \ OA_5A_1.$$

Площади этихъ треугольниковъ могутъ быть вычислены по формулѣ (2):

$$\triangle OA_1A_2 = \triangle_{12}, \quad \triangle OA_2A_3 = \triangle_{23}, \quad \triangle OA_3A_4 = \triangle_{34}, \quad \triangle OA_4A_5 = \triangle_{45},$$

$$\triangle OA_5A_1 = \triangle_{51}.$$

Если вершины каждаго треугольника чередуются такъ, какъ указано самымъ обозначенiемъ (напр., въ $\triangle OA_1A_2$ за O слѣдуетъ A_1, за A_1 слѣдуетъ A_2, за A_2 — вершина O), то первыя три площади положительны, а послѣднiя двѣ отрицательны. Алгебраическая сумма этихъ площадей дастъ разность абсолютныхъ значенiй площадей многоугольниковъ $OA_1A_2A_3A_4$ и $OA_1A_5A_4$, т.-е. площадь многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

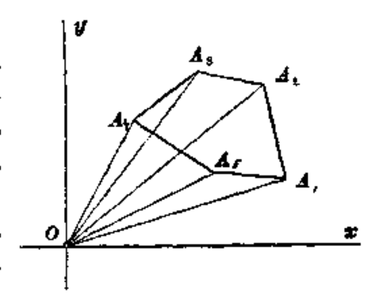
Такимъ образомъ имѣемъ:

$$пл\ A_1A_2A_3A_4A_5 = \triangle_{12} + \triangle_{23} + \triangle_{34} + \triangle_{45} + \triangle_{51} \quad (3)$$

или

$$пл.\ A_1A_2A_3A_4A_5 = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]. \quad (3')$$

Выраженiе (3) или (3') можетъ дать положительное или отрицательное значенiе такъ же, какъ въ случаѣ площади треугольника. Если чередованiе вершинъ въ указанномъ порядкѣ, которое принято во вниманiе при составленiи уравненiя (3'), обратно движенiю часовой стрѣлки то площадь многоугольника получится положительной. При чередованiи согласномъ съ движенiемъ часовой стрѣлки площадь будетъ отрицательной.



Черт. 19.

Какъ частный случай формулы (3) или (3'), можно составить выраженiе для площади любого треугольника $A_1A_2A_3$:

$$\triangle A_1A_2A_3 = \triangle_{12} + \triangle_{23} + \triangle_{31} \quad (4)$$

или

$$\triangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right]. \quad (4)$$

Задача 1. Вычислить площадь треугольника ABC, координаты вершинъ котораго даны: $A(5, 3)$, $B(2, -1)$, $C(-1, 4)$.

Рѣшенiе.

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

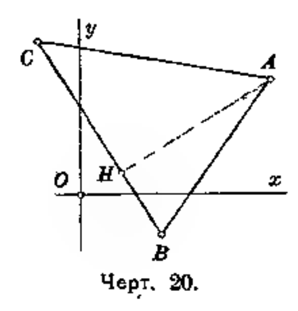
$$\triangle ABC = \triangle_{12} + \triangle_{23} + \triangle_{31}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 5, 3 \\ 2,-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2,-1 \\ -1, 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1, 4 \\ 5, 3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(-5-6)+(8-1)+(-3-20)\Big] = \frac{1}{2}(-11+7-23).$$

$\triangle ABC = -13^1/_2$ кв. ед.; абсол. величина площ. $= 13^1/_2$ кв. ед.

Задача 2. Опредѣлить высоты того же треугольника ABC (черт. 20).



Черт. 20.

Рѣшеніе. Зная площадь треугольника и его стороны (стр. 25), можно вычислить и высоты:

$$CB \sim 5{,}8\,; \qquad |\triangle ABC| = 13^1/_2\,,$$

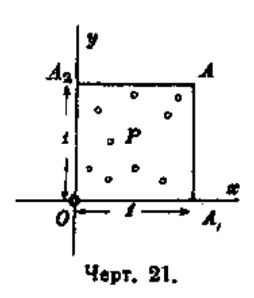
$$^1/_2\, AH\,.\,5{,}8 \sim 13^1/_2\,; \qquad AH \sim 4{,}5\,.$$

Выведенныя въ этой главѣ формулы — формула разстоянія, формула для вычисленія координатъ точки, дѣлящей данный отрѣзокъ въ данномъ отношеніи, и формула площади треугольника съ вершиной въ началѣ координатъ—даютъ возможность рѣшить цѣлый рядъ задачъ на вычисленіе, на опредѣленіе геометрическихъ величинъ, связанныхъ съ фигурой, опредѣленной координатами нѣкоторыхъ своихъ точекъ.

Слѣдующіе параграфы посвящены выясненію другой идеи аналитической геометріи,—идеи, по которой изученіе геометрическихъ формъ, именно линій, сводится къ изслѣдованію уравненій, посвящены выясненію геометрическаго значенія уравненія, связывающаго двѣ перемѣнныя величины x и y.

§ 8. Перемѣнныя (текущія) координаты. Геометрическое значеніе уравненій. Въ предыдущихъ параграфахъ мы разсматривали опредѣленныя положенія точекъ и составляли формулы для вычисленія величинъ по даннымъ (постояннымъ) координатамъ нѣкоторыхъ точекъ, опредѣляющихъ эти величины. Теперь мы будемъ разсматривать неопредѣленныя положенія точекъ, будемъ разсматривать точки, мѣняющія свое положеніе, движущіяся точки; координаты ихъ будутъ перемѣнными величинами. Если измѣненіе координатъ точки ничѣмъ не ограничено, то можно, давая произвольныя значенія координатамъ и произвольно ихъ мѣняя, перевести точку изъ одного положенія въ любое другое на той же

плоскости и какимъ угодно путемъ. Такимъ образомъ, совокупность всѣхъ точекъ плоскости можно обозначить символомъ (x, y), гдѣ x и y перемѣнныя, ничѣмъ неограниченныя въ своемъ измѣненіи. Если же измѣненіе координатъ ограничено какимъ-либо условіемъ, то и движеніе соотвѣтствующей этимъ координатамъ точки будетъ ограничено. Напр., пусть координаты x, y могутъ измѣняться каждая лишь въ предѣлахъ отъ 0 до 1: $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. При такомъ ограниченіи соотвѣтствующая точка можетъ занимать любое положеніе внутри квадрата OA_1AA_2 (черт. 21), но не внѣ его и не на его периметрѣ. Предыдущее ограниченіе измѣненій координатъ выражено **неравенствами**. Но ограничительное условіе можетъ быть выражено **уравненіемъ**, связывающимъ перемѣнныя координаты.



Черт. 21.

Такое уравненіе устанавливаетъ функціональную зависимость измѣненія одной координаты отъ измѣненія другой. Одна изъ перемѣнныхъ координатъ, напр. x, будетъ аргументомъ, другая y—функціей *). Если рѣшить данное уравненіе относительно перемѣнной координаты, принятой за функцію, то функціональная зависимость будетъ выражена **явно**, т.-е. явно будутъ указаны тѣ дѣйствія, которыя нужно совершить надъ аргументомъ для полученія **соотвѣтствующаго** значенія функціи, и порядокъ ихъ. Такимъ образомъ одна изъ перемѣнныхъ координатъ даннымъ уравненіемъ опредѣляется, какъ функція другой:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Первая часть даннаго—нерѣшеннаго еще—уравненія, устанавливающаго функціональную зависимость перемѣнныхъ координатъ, представляетъ тоже рядъ дѣйствій, совершенныхъ надъ постоянными величинами и перемѣнными x, y. Поэтому для общаго обозначенія ея можно воспользоваться такими же символами, какъ и для какой-либо функціи, ставя въ скобкахъ обѣ перемѣнныя x и y, надъ которыми совершаются предполагаемыя операціи:

$$F(x,y) = 0. \tag{2}$$

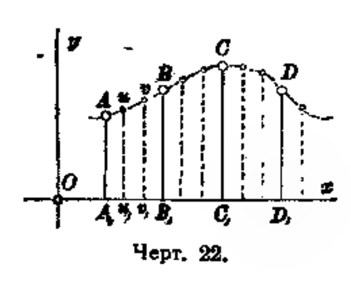
Лѣвую часть этого уравненія можно разсматривать, какъ функцію

*) Введеніе § 8.

двухъ перемѣнныхъ x и y. Различнымъ значеніямъ перемѣнныхъ x и y соотвѣтствуютъ различныя значенія этой функціи. Но такъ какъ по условію величина этой функціи все время равна нулю, то мы можемъ давать произвольныя значенія лишь одному перемѣнному, напр. x, другое уже тѣмъ самымъ будетъ опредѣлено.

Дана ли намъ зависимость перемѣнныхъ или текущихъ координатъ явно (1) или неявно, т.-е. уравненіемъ (2), мы можемъ подобрать безчисленное множество значеній для абсциссы (аргумента) и соотвѣтствующей ординаты (функціи), которыя будутъ удовлетворять данному (ограничительному) условію. Такимъ образомъ мы можемъ построить безчисленное множество точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ данному уравненію вида (1) или (2). Но какъ располагаются эти точки на плоскости? Отвѣтъ на этотъ вопросъ зависитъ отъ свойствъ того уравненія, которому должны удовлетворять координаты этихъ точекъ, иначе — отъ рода той функціи, которая опредѣляется этимъ уравненіемъ.

Изъ всей совокупности функцій, какія только можно себѣ вообразить, выдѣляется особый классъ, имѣющій особенное значеніе въ приложеніяхъ, это такъ называемый классъ непрерывныхъ функцій. Функціи раздѣляются на непрерывныя и прерывныя. Непрерывной въ какомъ-либо интервалѣ функція называется въ томъ случаѣ, если при безконечно маломъ приращеніи независимаго перемѣннаго въ этомъ интервалѣ она сама получаетъ безконечно малое приращеніе. Въ общемъ же случаѣ этого можетъ и не быть. Подъ безконечно малымъ мы понимаемъ такое приращеніе, величина котораго можетъ быть какъ угодно мала. Примѣромъ безконечно малой величины можетъ служить дробь $\frac{1}{n}$, знаменатель которой безпредѣльно увеличивается; дѣйствительно, по мѣрѣ приближенія n къ ∞ дробь будетъ стремиться къ нулю.



Черт. 22.

Если разсматриваемая функція (1) или (2)—непрерывна, то можно построить цѣлый рядъ точекъ A, B, C,....., координаты которыхъ, соотвѣтственно отличаясь очень мало одна отъ другой (черт. 22), удовлетворяютъ опредѣляющему функцію уравненію. Между этими точками можно вставить рядъ другихъ точекъ u, v,....., координаты которыхъ также удовлетворяютъ уравненію. Продолжая это построеніе безгранично

такъ, чтобы безконечно малыя разности абсциссъ сосѣднихъ точекъ стремились къ нулю, мы должны заключить, что и ординаты сосѣднихъ точекъ безконечно мало отличаются одна отъ другой, а построенныя такимъ образомъ точки располагаются все болѣе и болѣе тѣснымъ рядомъ, стремясь образовать или заполнить нѣкоторую линію.

Если—обратно дана какая-либо линія на плоскости — кривая или прямая *), то тѣмъ самымъ устанавливается функціональная зависимость координатъ точекъ, лежащихъ на этой линіи. Другими словами — при движеніи точки по линіи координаты ея мѣняются, но мѣняются въ зависимости одна отъ другой: любому произвольному значенію абсциссы, взятому въ границахъ, опредѣляемыхъ данною линіей, соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе ординаты. Такимъ образомъ ордината является функціею абсциссы:

$$y = f(x).$$

Но какова природа этой функціи, можно ли ее выразить аналитически, т.-е. помощью алгебраическихъ или вообще математическихъ символовъ, характеризующихъ рядъ дѣйствій надъ постоянными и перемѣннымъ x, это зависитъ отъ того, какъ дана намъ линія, какими геометрическими условіями она опредѣлена. Если она просто начерчена, то это еще не значитъ, что она дана, ибо начерченная линія есть въ сущности большей или меньшей ширины полоса, заполненная типографской краской, чернилами, мѣломъ и т. п., а при сильномъ увеличеніи—просто совокупность отдѣльныхъ участковъ чернилъ, мѣла и т. п. Съ этимъ даннымъ образомъ мы лишь приближенно связываемъ представленіе о линіи, и лишь приближенно можно выразить аналитически не вполнѣ опредѣленную функціональную зависимость абсциссъ и ординатъ.

Но если линія дана, какъ геометрическое мѣсто точекъ, удовлетворяющихъ какому-нибудь общему выдѣляющему ихъ условію, которое можетъ выражать или свойство геометрическаго мѣста или способъ построенія его точекъ, тогда можно перевести опредѣляющія геометрическія условія на языкъ аналитическій и составить такимъ образомъ уравненіе, которому должны удовлетворять координаты точекъ этой линіи.

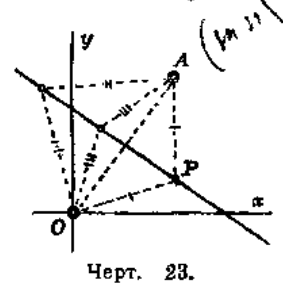
---

*) Будемъ предполагать пока, что прямая не параллельна ни оси абсциссъ, ни оси ординатъ.

Задача аналитической геометріи и состоитъ въ томъ, чтобы линіи представлять въ указанномъ смыслѣ уравненіями и, изслѣдуя свойства этихъ уравненій, дѣлать заключеніе о свойствахъ соотвѣтствующихъ линій. Съ другой стороны и при изслѣдованіи вопросовъ чисто-аналитическихъ мы можемъ иллюстрировать уравненія, содержащія двѣ перемѣнныя величины, линіями и такимъ образомъ задачи аналитическія представлять въ конкретной формѣ.

§ 9. **Примѣры составленія уравненія данной линіи.** 1. Какому уравненію удовлетворяютъ координаты точекъ, одинаково отстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ?

Рѣшеніе. Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково отстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ, есть перпендикуляръ, возставленный изъ середины отрѣзка, соединяющаго эти точки. Такимъ образомъ, прямая линія дана здѣсь нѣкоторымъ свойствомъ, которымъ обладаютъ всѣ точки ея по отношенію къ двумъ даннымъ точкамъ. Пусть одна изъ данныхъ точекъ лежитъ въ началѣ координатъ — предположеніе, нисколько не уменьшающее общности задачи. Другая данная точка A (черт. 23) пусть имѣетъ координаты m, n. Любая точка P искомаго геометрическаго мѣста, имѣющая координаты x и y, одинаково отстоитъ отъ точекъ O и A:



Черт. 23.

$$PO = PA.$$

Но по формулѣ разстоянія имѣемъ:

$$PO = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad PA = \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}$$

или

$$x^2 + y^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2,$$

откуда

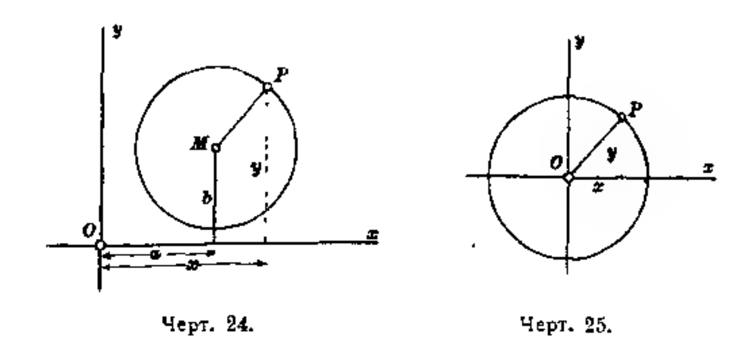
$$2mx + 2ny \quad (m^2 + n^2) = 0.$$

Получили уравненіе первой степени относительно x и y. Но вѣдь всякую прямую на плоскости можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ. Слѣдовательно, всякая прямая на плоскости

представляется уравненіемъ первой степени, связывающимъ текущія координаты x и y, т.-е. координаты различныхъ точекъ этой прямой.

2. Составить уравненіе, которому должны удовлетворять координаты точекъ круга съ центромъ въ точкѣ $M(a,b)$ и радіусомъ, равнымъ r.

Рѣшеніе. Всякая точка $P(x,y)$ (черт. 24) круга отстоитъ отъ



Черт. 24. Черт. 25.

его центра $M(a,b)$ на постоянномъ разстояніи, равномъ r. Но по формулѣ разстоянія имѣемъ

$$PM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Этому уравненію и должны удовлетворять координаты любой точки даннаго круга. Если точка перемѣщается по кругу, то координаты ея будутъ измѣняться, будутъ перемѣнными величинами, связанными уравненіемъ круга.

Въ частности, если центръ круга лежитъ въ началѣ координатъ (черт. 25), то уравненіе круга принимаетъ слѣдующій видъ

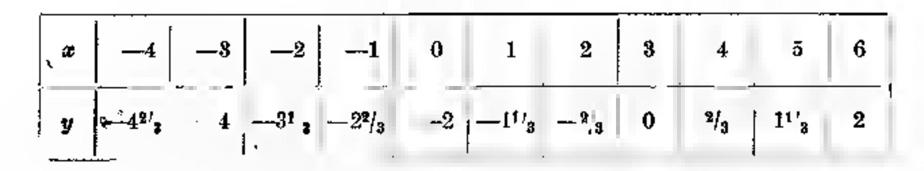
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

§ 10. **Примѣры построенія линіи по данному уравненію, связывающему текущія координаты.** 1 Дано уравненіе

$$2x \quad 3y \quad 6 = 0.$$

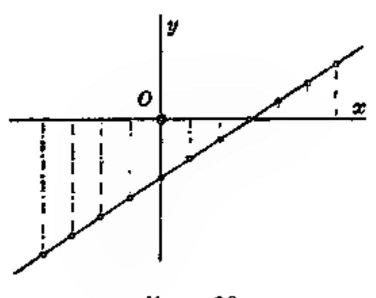
Опредѣляемъ отсюда y и, давая различныя произвольныя значенія x, вычисляемъ соотвѣтственныя значенія y:

$$y = \frac{2x-6}{3},$$



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$-4^2/_3$	4	$-3^1/_3$	$-2^2/_3$	-2	$-1^1/_3$	$-^2/_3$	0	$^2/_3$	$1^1/_3$	2

Строя точки по вычисленнымъ координатамъ, не трудно замѣтить, что онѣ располагаются по прямой линіи (черт. 26). Выше было указано, что всякая прямая представляется уравненіемъ первой степени. Но это еще не значитъ, что всякое уравненіе первой степени съ двумя текущими координатами x, y представляетъ прямую. Въ данномъ примѣрѣ мы видимъ, что это такъ, потомъ мы докажемъ, что такъ и должно быть.



Черт. 26.

2. Дано уравненіе $y = x$. Рядъ точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ этому уравненію, расположенъ на прямой, дѣлящей координатный уголъ пополамъ, ибо только для точекъ этой прямой абсцисса и ордината равны между собой.

3. Дано уравненіе

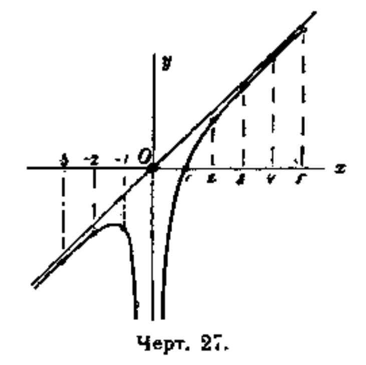
$$y = x \quad \frac{1}{x^2}.$$

Опредѣлить видъ той кривой линіи, точки которой имѣютъ координаты, удовлетворяющія данному уравненію.

Давая произвольныя значенія абсциссѣ x, вычисляемъ соотвѣтственныя значенія ординаты y:

x	3	-2	-1	$-1/2$	$-1/3$	$1/4$	0	$1/4$	$1/3$	$1/2$	1	2	3
y	$-3\,1/9$	$2\,1/4$	-2	$-4\,1/2$	$-9\,1/3$	$-16\,1/4$	$-\infty$	$-15\,3/4$	$-8\,2/3$	$-3\,1/2$	0	$2-1/4$	$3-1/9$

При построеніи точекъ этой кривой линіи должно замѣтить слѣдующее. Если бы y равнялось x, а не $x-\frac{1}{x^2}$, то точки, абсцисса и ордината которыхъ одинаковы, располагались бы на прямой линіи — биссектрисѣ координатнаго угла (черт. 27). Ординаты же строимой кривой меньше соотвѣтственныхъ ординатъ биссектрисы на $\frac{1}{x^2}$ *). Слѣдовательно, кривая располагается подъ биссектрисой координатнаго угла и тѣмъ ближе подходитъ къ этой биссектрисѣ, чѣмъ больше x по абсолютной величинѣ, ибо $\frac{1}{x^2}$ будетъ тѣмъ меньше. При x, стремящемся безгранично увеличиваться, $\frac{1}{x^2}$ стремится къ нулю и кривая безгранично стремится слиться съ прямой, никогда не сливаясь съ нею—иначе, сливается съ нею въ безконечности. Прямая, имѣющая такое отношеніе къ кривой, называется **асимптотой** **)



Черт. 27.

Въ интервалѣ отъ -1 до $+1$ x по абсолютной величинѣ меньше 1 и, слѣдовательно, $\frac{1}{x^2}$ больше 1, а при безграничномъ уменьшеніи x до нуля,—безгранично увеличивается до ∞; ордината y равная $x-\frac{1}{x^2}$, стремится къ $-\infty$.

---

*) Число $\frac{1}{x^2}$ положительно, каково бы ни было значеніе x—положительное или отрицательное.

**) Отъ греч. *συμπίπτω*—сливаюсь, совпадаю, *α*—отрицаніе; *ἡ ἀσύμπτωτος*.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Построить точки

$$A(2,3);\quad B(3{,}5;\,-4);\quad C(-3,5);\quad D(1;\,-2{,}5);\quad E(\sqrt{2},\sqrt{3}).$$

2. Что можно сказать про координаты точекъ, лежащихъ 1) на оси абсциссъ, 2) на прямой, параллельной оси абсциссъ, 3) на оси ординатъ, 4) на прямой, параллельной оси ординатъ?

3. Какое соотношеніе между координатами точекъ, лежащихъ на биссектрисѣ координатнаго угла?—на биссектрисѣ угла, смежнаго координатному?

Отвѣтъ: $y=x$; $y=-x$.

4. Точка лежитъ на прямой, выходящей изъ начала координатъ и наклоненной къ оси абсциссъ подъ угломъ $\varphi=30^0$. Какое соотношеніе между координатами этой точки, если система координатъ прямоугольная?

Отвѣтъ: $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

5. Опредѣлить стороны, медіаны, биссектрисы, высоты и площадь треугольника ABC, даннаго координатами его вершинъ; $A(2,5)$; $B(-3,7)$; $C(1,-2)$.

Отвѣтъ: $AB=\sqrt{29}=5,4...$; $BC=\sqrt{97}=9,84...$; $AC=\sqrt{50}=7,06...$;

медіана $AM_1=\frac{1}{2}\sqrt{61}\sim 3,9$; биссектриса $AA_1=\sqrt{14,29}\sim 3,77$;

высота $AH_1=\dfrac{2.18,5}{9,85}\sim 3,75$; $\triangle ABC=18,5$ кв. ед.

6. Составить уравненіе, которому удовлетворяютъ координаты точекъ, одинаково отстоящихъ отъ данныхъ точекъ $A(2,3)$ и $B(5,6)$.

Отвѣтъ: $x+y=8$
(при прямоуг. сист. коорд).

7. Опредѣлить координаты точки, одинаково отстоящей отъ точекъ $A(2,3)$, $B(5,6)$ и находящейся отъ начала координатъ на разстояніи, равномъ $\sqrt{50}$.

Отвѣтъ: (7; 1) и (1; 7).

8. Опредѣлить координаты точки D, дополняющей треугольникъ $A(5;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;4)$ до параллелограмма, для котораго сторона треугольника AB служитъ діагональю.

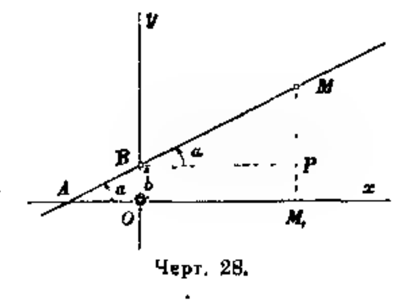
Отвѣтъ: (8; —2).

ГЛАВА II.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

§ 1. Уравненіе прямой съ угловымъ коэффиціентомъ. Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что текущія координаты точки, движущейся по прямой, связаны въ своемъ измѣненіи уравненіемъ первой степени. Это уравненіе можетъ имѣть различные виды, каждый изъ которыхъ характеризуется особымъ геометрическимъ значеніемъ его коэффиціентовъ соотвѣтственно положенію прямой.

Пусть данная прямая AB (черт. 28) пересѣкаетъ ось ординатъ въ точкѣ B, отстоящей отъ начала координатъ на разстояніи $OB=b$, и наклонена къ положительному направленію оси абсциссъ подъ угломъ α. Пусть $tg\alpha=k$. Величинами k и b вполнѣ опредѣляется положеніе прямой: k и b—параметры прямой *).



Черт. 28.

Строимъ координаты какой-нибудь точки M этой прямой: $x=OM_1$, $y=M_1M$. Изъ точки B проводимъ прямую BP, параллельную оси абсциссъ до пересѣченія въ точкѣ P съ ординатою точки M. Изъ прямоугольнаго треугольника BPM имѣемъ:

$$\frac{PM}{BP}=tg\widehat{PBM}.$$

Но

$$PM=y-b;\quad BP=OM_1=x\quad \widehat{PBM}=\alpha.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{y-b}{x}=tg\alpha.$$

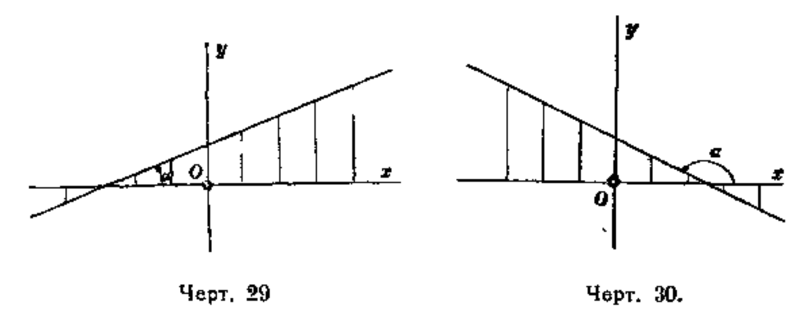
*) О параметрахъ см. введеніе § 8

Этому соотношенію удовлетворяютъ координаты любой точки прямой. Послѣ преобразованій и замѣны $tg\alpha$ его величиной k получимъ уравненіе прямой въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = kx + b.$$

Коэффиціентъ при x въ этомъ уравненіи, т.-е. k, называется **угловымъ коэффиціентомъ прямой** и геометрически означаетъ, какъ уже было замѣчено, тангенсъ угла наклона прямой къ оси абсциссъ. Величина b называется **начальной ординатой**.

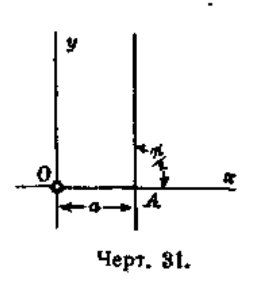
Если угловой коэффиціентъ положителенъ, то уголъ наклона прямой къ оси абсциссъ будетъ острый, ибо угловой коэффиціентъ есть тангенсъ этого угла наклона прямой къ положительному направленію оси абсциссъ. При этомъ ордината y точки, движущейся по прямой, возрастаетъ (черт. 29) вмѣстѣ съ увеличеніемъ абсциссы x. При отрицательномъ угловомъ коэффиціентѣ уголъ наклона прямой къ оси абсциссъ будетъ тупой, и съ возрастаніемъ абсциссы x ордината y убываетъ, иначе—алгебраически уменьшается (черт. 30)



Черт. 29 Черт. 30.

Если $k = 0$, то уравненіе прямой принимаетъ видъ:

$$y = b.$$



Черт. 31.

Такъ и должно быть, ибо при $k = 0$ прямая параллельна оси абсциссъ и ордината точки, движущейся по такой прямой, сохраняетъ постоянную величину.

Если прямая перпендикулярна къ оси абсциссъ, то $\alpha = \pi/2$ и $tg\,\alpha = k = \infty$, а начальная ордината b или тоже безконечно велика, или неопредѣленна, если прямая совпадаетъ съ осью ординатъ. Каждая точка прямой имѣетъ (черт. 31) одну и ту же

абсциссу, равную, напр., a:

$$x = a.$$

Это равенство, выражающее постоянство абсциссы, и будетъ уравненіемъ прямой. Оно можетъ быть получено изъ уравненія съ угловымъ коэффиціентомъ, какъ предѣльное при $k = \infty$, и b конечномъ или безконечномъ *).

Теперь мы можемъ доказать, что всякое уравненіе первой степени относительно x и y:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

есть уравненіе прямой

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣливъ изъ этого общаго уравненія первой степени y, какъ явную функцію x, иначе—рѣшивъ уравненіе относительно y, получимъ:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{2}$$

Опредѣлимъ теперь уголъ α такъ, чтобы $tg\,\alpha = -\frac{A}{B}$, и построимъ прямую, которая была бы наклонена къ оси абсциссъ подъ угломъ α и отсѣкала бы отъ оси ординатъ отрѣзокъ b, равный $-\frac{C}{B}$.

Составляя по предыдущему уравненіе этой прямой, мы получимъ уравненіе (2). Слѣдовательно, уравненіе (2) или ему равносильное (1) представляетъ прямую.

Для построенія прямой по данному ея уравненію достаточно найти координаты двухъ какихъ-нибудь точекъ прямой, давая одной изъ координатъ произвольное значеніе и опредѣляя другую изъ даннаго уравненія прямой.

Примѣръ. Построить прямую, данную уравненіемъ:

$$3x - 2y + 6 = 0.$$

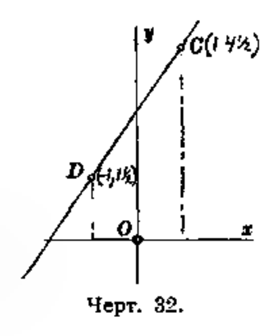
Ищемъ на прямой двѣ точки, одну съ абсциссой $x = 1$, а другую съ абсциссой $x = -1$. Какъ нетрудно видѣть изъ уравненія прямой, такими точ-

---

*) $y = kx + b$ или $\frac{y}{k} = x + \frac{b}{k}$. При $k = \infty$, $\frac{b}{k}$ или стремится къ 0, или (при $b = \infty$) неопредѣленно и можетъ быть равно, напр., $-a$. Слѣдовательно, уравненіе прямой принимаетъ видъ: $x = 0$, или $x - a = 0$.

ками будутъ $C(1; 4^1/_2)$ и $D(-1; 1^1/_2)$ (черт. 32). Построивъ эти точки и соединивъ ихъ прямой, мы тѣмъ самымъ и рѣшаемъ поставленную задачу.

Можно было бы для построенія прямой искать точки пересѣченія прямой съ осями координатъ; для этого нужно сначала положить $y = 0$ и вычислить изъ уравненія прямой x, а потомъ положить $x = 0$ и вычислить y. Такимъ образомъ найдемъ двѣ точки: $A(-2; 0)$ и $B(0; 3)$.



Черт. 32.

Вопросы: 1. Каково положеніе прямой относительно осей координатъ, если въ ея уравненіи коэффиціентъ A ревенъ нулю, т.-е. если ея уравненіе имѣетъ видъ $By + C = 0$?

2) Каково положеніе прямой, если $B = 0$?

3) Каково положеніе прямой, если $C = 0$?

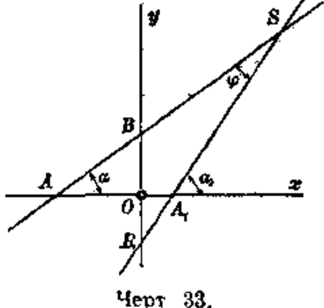
§ 2. **Опредѣленіе угла между двумя прямыми, данными своими уравненіями.** Пусть двѣ прямыя AB и A_1B_1 (черт. 33) даны уравненіями:

$$y = kx + b$$

$$y_1 = k_1x + b_1.$$

Геометрическое значеніе угловыхъ коэффиціентовъ даетъ возможность опредѣлить углы наклона α и α_1 этихъ прямыхъ къ положительному направленію оси абсциссъ:

$$tg\alpha = k, \quad tg\alpha_1 = k_1. \qquad (1)$$



Черт 33.

Требуется по этимъ даннымъ опредѣлить уголъ φ между этими прямыми. Какъ видно изъ чертежа, уголъ α_1, внѣшній для треугольника AA_1S и, слѣдовательно,

$$\alpha_1 = \alpha + \varphi,$$

откуда

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha. \qquad (2)$$

Если углы α и α_1 опредѣлены изъ уравненій (1), то формулой (2) и опредѣляется искомый уголъ между двумя прямыми.

Чаще понимаютъ поставленную задачу, какъ задачу опредѣленія

какой-нибудь тригонометрической величины искомаго угла. Найдемъ, чему равняется $tg\,\varphi$:

$$tg\,\varphi = tg\,(\alpha_1 - \alpha) = \frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha\; tg\,\alpha_1}\ ^{*)}.$$

Но

$$tg\,\alpha_1 = k_1\,, \quad tg\,\alpha = k\,;$$

слѣдовательно,

$$tg\,\varphi = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1}\,. \tag{3}$$

Формула (3) и представляетъ рѣшеніе поставленной задачи.

Примѣръ. Опредѣлить уголъ между двумя прямыми:

$$x - 3y + 3 = 0 \quad и \quad 6x - 3y + 2 = 0.$$

Рѣшеніе. Опредѣляемъ сначала угловые коэффиціенты этихъ прямыхъ, для чего рѣшаемъ данныя уравненія каждое относительно y. Изъ перваго уравненія имѣемъ:

$$y = \frac{1}{3}x + 1\,,$$

изъ второго:

$$y = 2x + \frac{2}{3}\,.$$

Слѣдовательно,

$$k = \frac{1}{3}\,; \quad k_1 = 2\,.$$

Если обозначимъ искомый уголъ черезъ φ, то по формулѣ (3) получимъ:

$$tg\,\varphi = \frac{2 - 1/_3}{1 + 2\,.\,1/_3} = \frac{1^2/_3}{1^2/_3} = 1.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi = 45^0.$$

Условіе параллельности. Если двѣ прямыя параллельны, то уголъ между ними равенъ нулю: $\varphi = 0$ и $tg\,\varphi = 0$; слѣдовательно, $k_1 - k = 0$ или $k = k_1$.

Таким образомъ, для параллельности двухъ прямыхъ необходимо равенство ихъ угловыхъ коэффиціентовъ, что, впрочемъ, выте-

---

*) См. далѣе § о тригонометрическихъ функціяхъ.

каетъ и непосредственно изъ геометрическаго значенія этихъ коэффиціентовъ.

Условіе перпендикулярности. Если двѣ прямыя перпендикулярны, то $\varphi = 90^0$ и $tg\,\varphi = \infty$, что возможно, если знаменатель въ формулѣ (3) обращается въ нуль:

$$1 + kk_1 = 0, \tag{4}$$

откуда

$$k_1 = -\frac{1}{k}. \tag{4'}$$

Формула (4') показываетъ, что угловой коэффиціентъ прямой, перпендикулярной къ данной, обратенъ по величинѣ и по знаку угловому коэффиціенту этой послѣдней.

Примѣръ. Даны прямыя:

$$1)\ y = 2x - 3. \quad 2)\ y = -\frac{1}{2}x + 1. \quad 3)\ y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

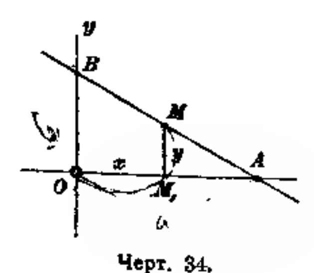
$$4)\ y = 2x + 1. \quad 5)\ y = 3x - 3.$$

Какія изъ этихъ прямыхъ параллельны между собою и какія перпендикулярны?

Отвѣтъ: параллельны прямыя: 1 и 4, 2 и 3; перпендикулярны: 1 и 2, 1 и 3, 2 и 4, 3 и 4. Прямая 5 не параллельна и не перпендикулярна ни одной изъ другихъ.

§ 3. **Уравненіе прямой въ отрѣзкахъ.** Пусть данная прямая пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкѣ A, а ось ординатъ въ точкѣ B (черт. 34):

$$OA = a, \qquad OB = b.$$



Черт. 34.

Данными a и b, если они одновременно не равны нулю, положеніе прямой вполнѣ опредѣляется.

Пусть $M(x, y)$ — какая-нибудь точка прямой:

$$OM_1 = x, \qquad M_1M = y.$$

Изъ подобія треугольниковъ OAB и M_1AM имѣемъ:

$$\frac{M_1M}{OB} = \frac{M_1A}{OA}.$$

Эта пропорція справедлива при всякомъ положеніи точки M на прямой AB, а принимая во вниманіе и направленіе отрѣзковъ, не трудно убѣдиться, что отношенія обѣихъ частей равны и по знаку.

Но

$$M_1M = y, \quad OB = b, \quad M_1A = a - x, \quad OA = a,$$

слѣдовательно,

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a},$$

или

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a},$$

откуда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравненіе и есть **уравненіе прямой въ отрѣзкахъ.** Отрѣзки a и b, отмѣчаемые прямой на осяхъ координатъ, могутъ быть какъ положительны, такъ и отрицательны.

Всякое уравненіе первой степени относительно x, y, если свободный членъ не равенъ нулю, можно привести къ виду уравненія въ отрѣзкахъ.

Примѣръ.

$$3x - 2y + 6 = 0, \qquad 3x - 2y = -6$$

$$\frac{3x}{-6} + \frac{2y}{6} = 1, \quad -\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

Слѣдовательно, $a = -2, \quad b = 3.$

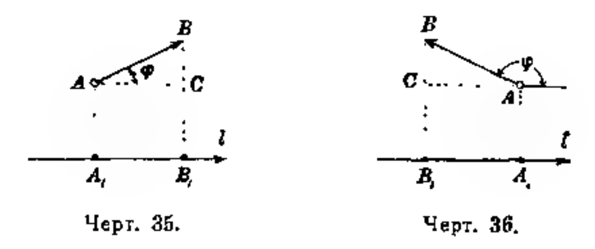
§ 4. О проекціяхъ. Установленіе соотношеній между различными отрѣзками, входящими въ фигуру, часто основывается на теоремахъ о проекціяхъ и именно объ ортогональныхъ проекціяхъ, т.-е. проекціяхъ, получаемыхъ помощью проектирующихъ лучей ортогональныхъ (подъ прямымъ угломъ) къ оси проекцій.

Если изъ концовъ отрѣзка AB опустить перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую l, то основанія этихъ перпендикуляровъ A_1 и B_1 опредѣляютъ на прямой l отрѣзокъ, который и называется проекціей AB на ось l. Проекція эта называется ортогональной, ибо проектирующіе лучи AA_1 и BB_1 перпендикулярны или ортогональны — (ὀρθός — прямой, γωνία — уголъ) къ оси проекцій l.

1. Теорема. Проекція отрѣзка равна проектируемому отрѣзку, умноженному на косинусъ угла наклона его къ оси проекцій.

Въ отличіе отъ точки зрѣнія элементарной геометріи мы должны здѣсь установить направленіе какъ проектируемаго отрѣзка, точнѣе—той прямой, на которой лежитъ проектируемый отрѣзокъ, такъ и оси проекцій. Подъ угломъ наклона проектируемаго отрѣзка къ оси проекцій и разумѣется уголъ между положительными направленіями ихъ; при этомъ начальною стороной угла считается положительное направленіе оси проекцій. Во многихъ случаяхъ положительное направленіе прямой, на которой располагается проектируемый отрѣзокъ, опредѣляется направленіемъ отрѣзка.

При такомъ опредѣленіи угла наклона содержаніе разсматриваемой теоремы совпадаетъ съ общимъ опредѣленіемъ косинуса. Дѣйствительно, если вмѣсто прямой l за ось проекцій взять прямую l', параллельную ей, съ тѣмъ же положительнымъ направленіемъ, и проходящую черезъ точку A, то мы и получимъ обычную картину, иллюстрирующую тригонометрическія функціи При постоянной ве-



Черт. 35. Черт. 36.

личинѣ AB и перемѣнномъ углѣ φ точка B опишетъ окружность съ центромъ въ точкѣ A; положительное направленіе l' будетъ направленіемъ начальнаго радіуса этого круга, а AC —линіей косинуса для угла $\varphi = (\widehat{l', AB})$. Поэтому

$$\frac{AC}{\overline{AB}} = \cos\varphi \quad \text{или} \quad AC = \overline{AB} \,.\, \cos\varphi.$$

Но AC по величинѣ и направленію равно A_1B_1, т.-е. проекціи отрѣзка AB на ось b. Слѣдовательно,

$$A_1B_1 = \overline{AB} \,.\, \cos\varphi.$$

Здѣсь $\overline{AB}$ можно разсматривать, какъ абсолютную величину проектируемаго отрѣзка, а проекцію его A_1B_1 —какъ отрѣзокъ съ направленіемъ, направленіе котораго согласное (+) или противоположное (—) положительному направленію оси проекцій l—соотвѣтствуетъ положительному или отрицательному знаку $\cos\varphi$ (черт. 35, 36).

Если проектируется на одну и ту же ось нѣсколько параллельныхъ или лежащихъ на одной и той же прямой отрѣзковъ AB, $A'B'$, $A''B''$,...., направленія которыхъ могутъ быть и противоположны, то по предыдущему углы ихъ наклона къ оси проекцій или равны между собой или отличаются на половину оборота (180^0 или π), т.-е. если для одного направленія уголъ наклона φ, то для противоположнаго $\varphi+\pi$. Но иногда удобнѣе считать всѣ параллельные отрѣзки, хотя бы и противоположныхъ направленій, одинаково наклоненными къ оси проекцій, считая за то отрѣзки одного направленія положительными, а противоположнаго — отрицательными; иными словами установить одно общее положительное направленіе всѣхъ параллельныхъ прямыхъ, на которыхъ располагаются проектируемые отрѣзки. Та и другая точка зрѣнія не противорѣчатъ одна другой. Въ самомъ дѣлѣ, если AB и $A'B'$ отрѣзки противоположныхъ направленій и первый наклоненъ къ оси проекцій подъ угломъ φ, а второй, стало-быть, подъ угломъ $\varphi+\pi$, то по предыдущему будемъ имѣть:

$$A_1B_1 = \overline{AB} \cos\varphi \quad \text{и} \quad A_1'B_1' = A'B' \cos(\varphi+\pi)$$

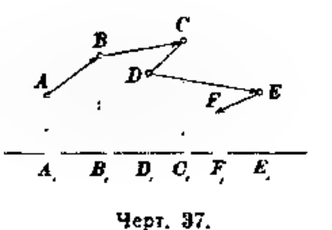
или

$$A_1B_1 = (+\overline{AB}) \cos\varphi \quad \text{и} \quad A_1'B_1' = (-\overline{A'B'}) \cos\varphi$$

Такимъ образомъ, дѣйствительно, считая оба отрѣзка одинаково (подъ угломъ φ) наклоненными къ оси проекцій, мы должны считать одинъ изъ нихъ положительнымъ, другой отрицательнымъ.

Подъ проекціей ломаной линіи разумѣется сумма проекцій отдѣльныхъ звеньевъ этой ломаной (черт. 37):

$$\text{пр. } ABCDEF = \text{пр. } AB + \text{пр. } BC + \text{пр. } CD + \text{пр. } DE + \text{пр. } EF.$$



Черт. 37.

Начальной и конечной точкой ломаной линіи опредѣляется направленіе каждаго звена этой ломаной.

Проекціи отдѣльныхъ звеньевъ ломаной расположены на одной и той же прямой -оси проекціи, и каждая изъ нихъ имѣетъ направленіе. Поэтому къ нимъ можно примѣнить правило сложенія направленныхъ отрѣзковъ (стр. 24):

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1; \; A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 = A_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1;$$

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 = A_1D_1 + D_1E_1 = A_1E_1,$$

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1F_1 = A_1E_1 + E_1F_1 = A_1F_1.$$

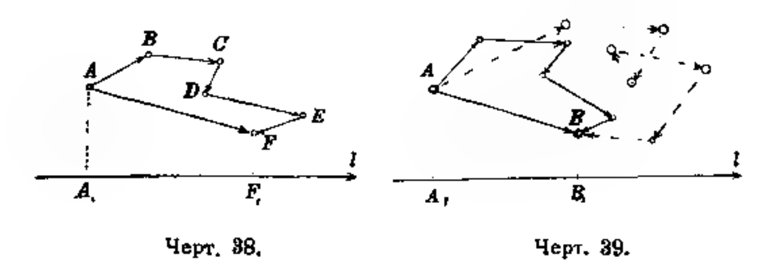
Слѣдовательно, проекція ломаной равна отрѣзку, начальная точка котораго A_1 совпадаетъ съ проекціею начальной точки ломаной, а конечная F_1 —съ проекціей конечной точки ломаной.

Отсюда вытекаютъ слѣдующія два предложенія.

2. Теорема. Проекція ломаной равна проекціи замыкающей.

Подъ замыкающей разумѣется отрѣзокъ, начальная и конечная точки котораго совпадаютъ соотвѣтственно съ начальной и конечной точками ломаной (черт. 38).

То же предложеніе можно формулировать такъ: проекція замкнутой ломаной линіи равна нулю.



Черт. 38. Черт. 39.

3. Теорема. Проекціи ломаныхъ съ общей замыкающей, иначе—съ общими началомъ и концомъ—равны (черт. 39).

Задача. Доказать, исходя изъ предыдущихъ теоремъ, справедливость слѣдующихъ тожествъ:

$$1)\ \cos\varphi + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right) = 0;$$

$$2)\ \cos\varphi + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{2}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$3)\ \cos\varphi + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{6\pi}{5}\right) +$$

$$+ \cos\left(\varphi + \frac{8\pi}{5}\right) = 0.$$

§ 5. **Нормальное уравненіе прямой.** Положеніе прямой относительно осей координатъ можно опредѣлить перпендикуляромъ $p = OP$ (черт. 40), опущеннымъ на эту прямую изъ начала координатъ, и угломъ α, образуемымъ этимъ перпендикуляромъ съ положительнымъ направленіемъ оси абсциссъ.

Пусть $M(x,y)$—какая-нибудь точка данной прямой:

$$OM_1 = x; \qquad M_1M = y.$$

Проектируемъ ортогонально ломаную OM_1M на перпендикуляръ OP. Проекція этой ломаной, какъ видно изъ чертежа, равна перпендикуляру p:

$$\text{пр.}_p\ OM_1M = p. \qquad (1)$$

Но

$$\text{пр.}_p\ OM_1M = \text{пр.}_p\ OM_1 + \text{пр.}_p\ M_1M =$$

$$\text{пр.}_p\ x + \text{пр.}_p\ y.$$

Черт. 40.

Первое звено x наклонено къ оси проекціи p подъ угломъ α, а второе y такъ же, какъ и ось ординатъ, т.-е. подъ угломъ $\frac{\pi}{2} - \alpha$. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что направленія звеньевъ проектируемой ломаной OM_1M могутъ и не совпадать соотвѣтственно съ положительными направленіями осей координатъ, которыми опредѣляются углы наклона α и $\frac{\pi}{2} - \alpha$ проектируемыхъ отрѣзковъ. Мы должны считать въ этомъ случаѣ проектируемые отрѣзки отрицательными (§ 4). Слѣдовательно, при всякомъ — положительномъ или отрицательномъ—значеніи координатъ x и y, имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства:

$$\text{пр.}_p\ x = x\,.\cos\alpha, \qquad \text{пр.}_p\ y = y\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Такимъ образомъ равенство (1) принимаетъ видъ:

$$x\ \cos\alpha + y\,.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = p$$

или

$$x\,.\cos\alpha + y\,.\sin\alpha - p = 0 \qquad (2)$$

Этому уравненію и должны удовлетворять координаты любой точки данной прямой, и оно называется **нормальнымъ уравненіемъ прямой.**

Какой же характерный признакъ нормальнаго уравненія? Ко-

эффиціенты при x и y суть $cos\alpha$ и $sin\alpha$, т.-е. числа меньшія единицы и, кромѣ того, сумма квадратовъ этихъ коэффиціентовъ должна равняться единицѣ, ибо $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$, а свободный членъ отрицателенъ. Такимъ образомъ изъ уравненій

$$1)\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0, \qquad 2)\ 2x + 3y - 7 = 0, \qquad 3)\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \quad 1 = 0$$

первое нормально, ибо $(^4/_5)^2 + (^3/_5)^2 = 1$, остальныя, не удовлетворяя этому условію, не будутъ нормальными.

Для преобразованія уравненія общаго вида

$$Ax + By + C = 0$$

въ нормальное нужно умножить всѣ его члены на нѣкоторый множитель, такъ, чтобы коэффиціенты при x и y дѣйствительно можно было положить равными косинусу и синусу нѣкотораго угла. Введеніе этого множителя необходимо, такъ какъ косинусъ и синусъ, во-первыхъ, не могутъ быть больше единицы и, во-вторыхъ, связаны соотношеніемъ

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$$

Итакъ, множимъ уравненіе общаго вида на нормирующій множитель, который обозначимъ черезъ R·

$$R\,.\,Ax + R\,.\,By + B\,.\,C = 0.$$

Если это уравненіе нормальнаго вида, то коэффиціентъ RA долженъ быть косинусомъ нѣкотораго еще неизвѣстнаго угла α, RB— синусомъ того же угла, а RC—величиною перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на прямую:

$$R\,.\,A = cos\,\alpha, \qquad R\,.\,B = sin\,\alpha, \qquad R\,.\,C = -p.$$

Въ этихъ уравненіяхъ даны A, B и C, а требуется опредѣлить R, α и p. Изъ первыхъ двухъ уравненій слѣдуетъ:

$$R^2A^2 = cos^2\alpha, \qquad R^2B^2 = sin^2\alpha.$$

Складывая эти равенства почленно, получимъ:

$$R^2(A^2 + B^2) = cos^2\alpha + sin^2\alpha$$

или

$$R^2(A^2+B^2)=1.$$

Отсюда

$$R=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

и, слѣдовательно,

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad -p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Знакъ передъ корнемъ нужно брать такой, чтобы $RC=-p$ было отрицательнымъ, потому что при составленіи нормальнаго уравненія мы брали абсолютную величину перпендикуляра OP (черт. 40) и, слѣдовательно, $-p$ число отрицательное при всякомъ положеніи прямой.

Такимъ образомъ уравненіе

$$Ax+By+C=0,$$

по приведеніи его въ нормальное, принимаетъ такой видъ:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

или

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \tag{3}$$

Приведя общее уравненіе прямой $Ax+By+C=0$ къ одному изъ вышеприведенныхъ видовъ, мы тѣмъ самымъ находимъ нѣкоторыя величины, какъ, напримѣръ, угловой коэффиціентъ k, отрѣзки a и b на осяхъ координатъ, разстояніе p начала координатъ отъ прямой. Этими величинами можно воспользоваться при рѣшеніи различнаго рода задачъ относительно прямой. Нѣкоторыя изъ нихъ мы уже рѣшили. Къ такимъ же задачамъ относится и слѣдующая:

Опредѣлить разстояніе точки, данной координатами ея, отъ прямой, данной уравненіемъ.

§ 6. Опредѣленіе разстоянія точки отъ прямой. Дана точка своими координатами $M(x_1, y_1)$ (черт. 41) и прямая уравненіемъ:

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Опредѣлить разстояніе точки M отъ данной прямой, т.-е. опредѣлить величину перпендикуляра MQ, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.

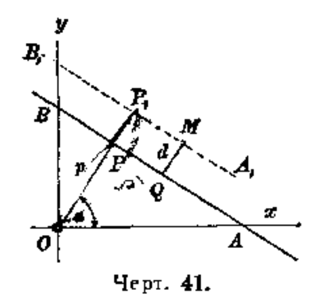
Будемъ обозначать этотъ перпендикуляръ черезъ d:

$$d = MQ.$$

Проводимъ черезъ точку M прямую A_1B_1, параллельную прямой AB, и перпендикуляръ OP продолжаемъ до пересѣченія съ прямой A_1B_1. Обозначимъ разстояніе OP черезъ p, а OP_1 черезъ p_1.

Какъ видно изъ чертежа

$$QM = PP_1 = OP_1 - OP = p_1 - p = d.$$



Черт. 41.

Такимъ образомъ, задача сводится къ опредѣленію p и p_1.

Приводимъ данное уравненіе

$$Ax + By + C = 0$$

къ нормальному виду:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \tag{2}$$

или

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \tag{2'}$$

если положимъ

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha, \qquad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\alpha, \qquad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -p. \tag{3}$$

Такимъ образомъ p можетъ считаться опредѣленнымъ.

Уравненіе прямой A_1B_1 будетъ отличаться отъ уравненія (2′) только въ послѣднемъ членѣ, такъ какъ уголъ α одинъ и тотъ же для обѣихъ прямыхъ:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p_1 = 0. \tag{4}$$

Здѣсь необходимо сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Если начало координатъ лежитъ внѣ полосы, ограниченной параллельными прямыми AB и A_1B_1, то, считая p и p_1 положительными, мы должны принять уголъ α однимъ и тѣмъ же для обѣихъ прямыхъ. Но если начало координатъ лежитъ между параллельными прямы-

ми AB и A_1B_1, то углы наклона перпендикуляровъ OP и OP будутъ разные—для одного α, для другого $\alpha+\pi$. Но и въ этомъ случаѣ уголъ наклона OP_1 мы будемъ считать равнымъ α, а p и p_1 противоположными по знаку; такъ какъ p уже принято положительнымъ, то стало быть p_1 въ случаѣ, когда начало координатъ лежитъ между прямыми AB и A_1B_1, должно считать отрицательнымъ.

Въ уравненіи (4) x и y текущія координаты точекъ прямой A_1B_1, α уже извѣстный уголъ, опредѣляемый формулами (3), а p_1 еще неизвѣстно и подлежитъ опредѣленію.

Уравненію (4) должны удовлетворять координаты любой точки прямой A_1B_1, стало быть, и координаты x_1, y_1 точки M. Такимъ образомъ, должно имѣть мѣсто равенство:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 . \sin\alpha - p_1 = 0. \tag{5}$$

Въ этомъ равенствѣ всѣ величины, кромѣ p_1, уже извѣстны: x_1, y_1 даны, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ опредѣлены формулами (3). Таким образомъ изъ него можно опредѣлить и p_1:

$$p_1 = x_1 . \cos\alpha + y_1 \sin\alpha. \tag{6}$$

Искомое разстояніе d, равное $p_1 - p$, теперь вполнѣ опредѣляется, если вмѣсто p_1 подставить его величину (6):

$$d = x_1 . \cos\alpha + y_1 . \sin\alpha - p. \tag{7}$$

Подставляя вмѣсто $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, p ихъ величины (3), получимъ:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{8}$$

Такимъ образомъ для опредѣленія разстоянія точки отъ прямой надо привести уравненіе этой прямой къ нормальному виду; первая часть приведеннаго уравненія при $x = x_1$, $y = y_1$ и выражаетъ искомое разстояніе.

Примѣръ. Найти разстояніе точки $M(2, -5)$ отъ прямой $3x - 4y + 5 = 0$.

Рѣшеніе. Нормальное уравненіе данной прямой

$$\frac{3x - 4y + 5}{-\sqrt{3^2+4^2}} = 0.$$

Слѣдовательно,

$$d = \frac{3 . 2 - 4 . (-5) + 5}{-\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{6 + 20 + 5}{-5} = -\frac{31}{5},$$

$$d = -6^1/_5.$$

Разстояніе d, вычисленное по формулѣ (7) или (8), можетъ оказаться и отрицательнымъ. Такъ, разстояніе начала координатъ (0, 0) отъ прямой (2') будетъ:

$$d = 0 \cos\alpha + 0 . \sin\alpha - p = -p.$$

По исходному опредѣленію $d = p_1 - p$. Самый способъ приведенія даннаго уравненія къ нормальному виду предполагаетъ для p положительное значеніе; но p_1, какъ было отмѣчено выше, можетъ быть и отрицательнымъ. Разстояніе $d = p_1 - p$ будетъ положительнымъ, если $p_1 > p$, и отрицательнымъ, если $p_1 < p$ (куда включается и случай отрицательнаго значенія p_1). Если $p_1 > p$, то точка M и начало координатъ O лежатъ по разныя стороны отъ данной прямой, а при $p_1 < p$ эти точки M и O лежатъ по одну сторону отъ данной прямой. Такимъ образомъ точка M лежитъ по ту же сторону отъ прямой, какъ и начало координатъ, если разстояніе отрицательно, и по другую сторону, если оно положительно.

§ 7. **Уравненіе прямой даннаго направленія и проходящей черезъ данную точку.** Пусть данъ угловой коэффиціентъ прямой k и одна ея точка $P(x_1, y_1)$. Этими данными прямая вполнѣ опредѣлена. Уравненіе любой прямой даннаго направленія можно написать въ такомъ видѣ:

$$y = kx + b, \tag{1}$$

гдѣ k—данное постоянное, а b—какое-нибудь постоянное—параметръ: различнымъ значеніямъ параметра b соотвѣтствуютъ различныя прямыя (параллельныя между собой). Нужно подобрать теперь такое значеніе параметра b, чтобы прямая, опредѣляемая этимъ уравненіемъ (1), проходила черезъ данную точку $P(x_1, y_1)$, т.-е., чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравненію (1):

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{2}$$

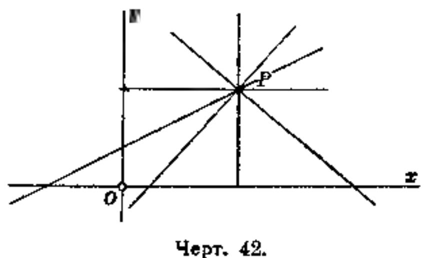
Равенство (1) есть уравненіе прямой: x и y текущія координаты; равенство (2) (не уравненіе прямой!) является условіемъ прохожденія прямой (1) черезъ данную точку $P(x_1, y_1)$ и устанавливаетъ соотношеніе между извѣстными постоянными x_1, y_1, k и неизвѣстнымъ постояннымъ b.

Изъ равенства (2) можно опредѣлить b и вставить его значеніе въ уравненіе (1); такимъ образомъ и получимъ искомое уравненіе прямой, въ которомъ всѣ коэффиціенты будутъ извѣстными данны-

ми. Но лучше путемъ почленнаго вычитанія изъ уравненія (1) и равенства (2) исключить b и такимъ образомъ получимъ искомое уравненіе:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3}$$

Примѣчаніе. Если дана только одна точка $P(x_1, y_1)$, то черезъ нее можно провести безчисленное множество прямыхъ, образующихъ пучекъ лучей (черт. 42). Уравненіе (3) и представляетъ уравненіе такого пучка, если x, y текущія координаты, x_1, y_1 координаты данной точки — центра пучка и k параметръ, принимающій для различныхъ лучей пучка различныя значенія.



Черт. 42.

Задача. Какое значеніе нужно дать параметру k въ уравненіи (3), чтобы соотвѣтствующій лучъ пучка былъ параллеленъ оси абсциссъ или -оси ординатъ? или—прямой, данной уравненіемъ $3x - 6y + 1 = 0$?

§ 8. **Уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки.** Пусть $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ двѣ данныя точки. Уравненіе прямой какого-нибудь направленія, проходящей черезъ точку $P(x_1, y_1)$ по предыдущему имѣетъ видъ:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{1}$$

гдѣ k—параметръ, принимающій различныя значенія для различныхъ прямыхъ, выходящихъ изъ точки $P(x_1, y_1)$. Если k подобрать такъ, чтобы прямая (1) проходила и черезъ вторую данную точку $Q(x_2, y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравненію (1):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \tag{2}$$

Отсюда и можно опредѣлить угловой коэффиціентъ k и вставить въ уравненіе (1). Но лучше—почленнымъ дѣленіемъ изъ уравненія (1) и равенства (2) исключить k; такимъ образомъ получимъ искомое уравненіе:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{или} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3}$$

Задача. Составить то же уравненіе (3), опредѣляя (гл. I, § 7) площадь треугольника $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $M(x, y)$, гдѣ M какая-нибудь точка прямой PQ.

Указаніе. Если точка M перемѣщается по прямой, соединяющей точки P и Q, то площадь треугольника все время будетъ равна нулю.

§ 9. Общій обзоръ и постановка различныхъ задачъ относительно прямой. Уравненіе прямой можетъ быть дано въ слѣдующихъ различныхъ видахъ: 1. общее уравненіе прямой:

$$Ax + By + C = 0;$$

2. уравненіе съ угловымъ коэффиціентомъ:

$$y = kx + b;$$

3. уравненіе прямой въ отрѣзкахъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

4. нормальное уравненіе:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0;$$

5. уравненіе прямой даннаго направленія и проходящей черезъ данную точку:

$$y - y_1 = k(x - x_1);$$

6. уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Данное уравненіе прямой всегда можно привести соотвѣтствующимъ преобразованіемъ къ виду 2, 3, или 4 и тѣмъ самымъ можно опредѣлить угловой коэффиціентъ и начальную ординату, т.-е. отрѣзокъ на оси ординатъ, или оба отрѣзка на осяхъ координатъ, или разстояніе прямой отъ начала координатъ p и уголъ наклона перпендикуляра p къ положительному направленію оси абсциссъ.

Основныя задачи. 1. Даны двѣ прямыя

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Опредѣлить координаты точки ихъ пересѣченія.

Рѣшая совмѣстно эти уравненія, получимъ:

$$x = \frac{-(CB_1 - C_1B)}{AB_1 - A_1B}, \qquad y = \frac{-(AC_1 - A_1C)}{AB_1 - A_1B}.$$

Вопросы: a) Какое геометрическое значеніе имѣютъ условія:

$$AB_1 - A_1B = 0, \quad \text{но} \quad CB_1 - C_1B \neq 0?$$

b) Какое геометрическое значеніе имѣютъ условія.

$$AB_1 - A_1B = 0 \quad \text{и} \quad CB_1 - C_1B = 0?$$

2. Составить уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку $P(x_1, y_1)$: a) параллельно или b) перпендикулярно данной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

3. Опредѣлить уголъ между двумя прямыми

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

4. Опредѣлить разстояніе данной точки $P(x_1, y_1)$ отъ данной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

5. Даны двѣ прямыя уравненіями:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Пусть $M(x_0, y_0)$ точка пересѣченія этихъ прямыхъ, т.-е.

$$Ax_0 + By_0 + C = 0, \quad A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0. \tag{8}$$

Уравненіе

$$Ax + By + C + k(A_1x + B_1y + C_1) = 0, \tag{9}$$

гдѣ k — параметръ, принимающій различныя значенія, представляетъ пучекъ лучей, проходящихъ черезъ точку $M(x_0, y_0)$, ибо, во-первыхъ — каково бы ни было k, предыдущее уравненіе первой степени относительно текущихъ координатъ и, во вторыхъ — при всякомъ k соотвѣтствующая прямая проходитъ черезъ точку $M(x_0, y_0)$, такъ какъ въ силу условій (8) имѣетъ мѣсто равенство:

$$Ax_0 + By_0 + C + k(A_1x_0 + P_1y_0 + C_1) = 0.$$

Подобрать въ уравненіи пучка лучей (9) значеніе параметра k такъ, чтобы соотвѣтствующая прямая была параллельна: a) оси абсциссъ или b) оси ординатъ или c) данной третьей прямой

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

или d) перпендикулярна къ этой третьей прямой.

Вопросъ. Параметръ k въ уравненіи пучка (9) не угловой коэффиціентъ, а въ другомъ уравненіи пучка $y-y_1=k(x-x_1)$ (примѣчаніе § 7) угловой коэффиціентъ. Въ чемъ разница?

6. Найти геометрическое мѣсто точекъ $M(x, y)$ на плоскости, отстоящихъ отъ данной прямой на данномъ разстояніи d. Сколько рѣшеній имѣетъ эта задача?

7. Найти геометрическое мѣсто точекъ $M(x, y)$, одинаково отстоящихъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ

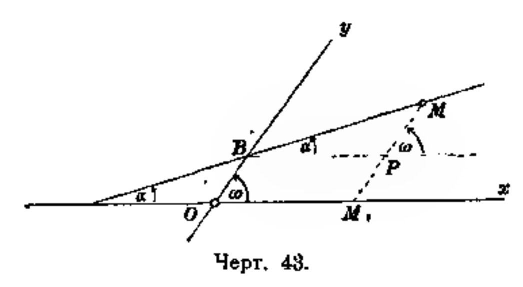
$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad A_1x+B_1y+C_1=0.$$

Сколько рѣшеній имѣетъ эта задача и какое геометрическое значеніе имѣетъ каждое изъ этихъ рѣшеній?

§ 10. **Обобщенія на случай косоугольной системы координатъ.** 1. При прямоугольной системѣ координатъ угловой коэффиціентъ прямой равенъ тангенсу угла наклона прямой къ оси абсциссъ. Разсмотримъ теперь, какое геометрическое значеніе имѣетъ угловой коэффиціентъ, т.-е. коэффиціентъ при k въ уравненіи вида

$$y=kx+b,$$

если координатный уголъ равенъ ω. Изъ треугольника BPM (чер. 43) имѣемъ



Черт. 43.

$$\frac{PM}{BP}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

или

$$\frac{y-b}{x}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)};$$

такимъ образомъ уравненіе прямой, наклоненной къ оси абсциссъ подъ угломъ α въ случаѣ косоугольной системы координатъ имѣетъ видъ:

$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}\,x+b.$$

Слѣдовательно,

$$k=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}. \tag{1}$$

Отсюда можно опредѣлить $tg\,\alpha$:

$$tg\,\alpha=\frac{k\sin\omega}{1+k\cos\omega} \tag{2}$$

и этимъ выраженіемъ воспользоваться для опредѣленія угла между двумя прямыми (ср. § 2).

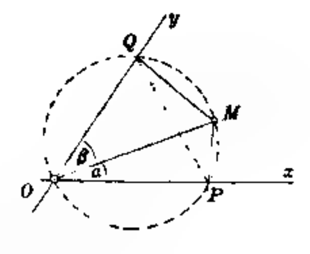
2 Нормальное уравненіе прямой въ случаѣ косоугольной системы координатъ можно вывести такимъ же способомъ, какъ и въ случаѣ прямоугольной. Искомое уравненіе имѣетъ видъ:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0, \ (\alpha + \beta = \omega).$$

3. Для приведенія общаго уравненія къ нормальному виду въ случаѣ косоугольной системы координатъ нужно знать соотношеніе между $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и какими-либо тригонометрическими функціями координатнаго угла ω соотношеніе, которое замѣнило бы основное соотношéніе $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, которымъ мы пользовались при нормированіи въ случаѣ прямоугольной системы координатъ. Требуемое соотношеніе легко выводится изъ чертежа 44, гдѣ

$$MP \perp Ox, \quad MQ \perp Oy, \quad OM = 2r$$

и r радіусъ описаннаго около четыреугольника $OPMQ$ круга.



Черт. 44.

Дѣйствительно, изъ треугольника OPQ имѣемъ.

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \,.\, OP \;\, OQ \,.\, \cos\omega \tag{3}$$

Опредѣляя стороны этого треугольника черезъ діаметръ описаннаго круга:

$$PQ \quad 2r \;\, \sin\omega, \quad OP = 2r \,.\, \cos\alpha, \quad OQ = 2r \,.\, \cos\beta,$$

можно представить соотношеніе (3) въ слѣдующемъ видѣ.

$$4r^2 . \sin^2\omega = 4r^2 . \cos^2\alpha + 4r^2 \cos^2\beta - 2 \,.\, 4r^2 \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\omega,$$

откуда

$$\sin^2\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\omega \tag{4}$$

Пусть требуется привести къ нормальному виду уравненіе

$$Ax + By + C = 0.$$

Если R нормирующій множитель, то

$$B \,.\, A = \cos\alpha, \quad B \;\, B = \cos\beta,$$

принимая во вниманіе соотношеніе (4), будемъ имѣть

$$\sin^2\omega = R^2 (A^2 + R^2 - 2A\,B \cos\omega).$$

Опредѣляя отсюда R, находимъ нормальный видъ даннаго уравненія:

$$\frac{(Ax + By + C)\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2A.B.\cos\omega}} = 0.$$

Знакъ нормирующаго множителя такъ же, какъ въ случаѣ прямоугольной системы, зависитъ отъ знака C, ибо ω можно считать меньше π.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Построить прямую, данную уравненіемъ: $2x - 3y + 5 = 0$, опредѣлить ея уголъ наклона къ оси абсциссъ и разстояніе начала координатъ отъ этой прямой.

Отвѣтъ: $tg\,\alpha = \frac{2}{3}$. Разстояніе отъ начала $= \frac{5}{\sqrt{13}}$.

2. Опредѣлить разстояніе начала прямоугольной системы координатъ отъ прямой, уравненіе которой $a(x - a) + b(y - b) = 0$.

Отвѣтъ. $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Написать уравненіе биссектрисъ угловъ, образованныхъ двумя прямыми, уравненія которыхъ въ прямоугольной системѣ координатъ даны:

$$3x + 4y - 9 = 0, \qquad 12x + 5y - 3 = 0,$$

и показать аналитически, что эти биссектрисы взаимно перпендикулярны.

Отвѣтъ. $9x + 7y - 12 = 0$; $7x - 9y + 34 = 0$.

4. Данъ треугольникъ координатами его вершинъ $A(2,1)$, $B(3, -2)$ и $C(-4, -1)$. Опредѣлить стороны, биссектрисы, медіаны и высоты этого треугольника и написать уравненія ихъ.

Отвѣтъ. $AB = \sqrt{10}$, уравненіе $3x + y - 7 = 0$,

$BC = \sqrt{50}$, " $x + 7y + 11 = 0$,

$AC = \sqrt{40}$, " $x - 3y + 1 = 0$

5. Данъ треугольникъ уравненіями его сторонъ:

$$y = x - 2; \quad y = (\sqrt{3} - 2)x + 6; \quad y = -(\sqrt{3} + 2)x + 8.$$

Опредѣлить углы этого треугольника.

Отвѣтъ: каждый уголъ равенъ 60^0.

ГЛАВА III.

КРУГЪ.

§ 1. **Различные виды уравненія круга.** Мы уже видѣли (гл. I, § 9), что кругъ съ центромъ въ точкѣ $M(a, b)$ и радіусомъ r относительно прямоугольной системы координатъ представляется уравненіемъ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0. \tag{1}$$

Если центръ круга лежитъ въ началѣ координатъ, то $a=0$, $b=0$ и уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$x^2+y^2-r^2=0. \tag{2}$$

Рѣшая это уравненіе относительно y:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}, \tag{3}$$

можно прослѣдить, какъ измѣняется y вмѣстѣ съ измѣненіемъ x, и тѣмъ самымъ изслѣдовать геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ этому уравненію, т.-е. аналитически изслѣдовать форму круга.

Вопросы: 1) Какую линію представляетъ уравненіе

$$y=+\sqrt{r^2-x^2}?$$

2) Какую линію представляетъ уравненіе

$$y=-\sqrt{r^2-x^2}?$$

3) Какое значеніе получается для y, если $|x|>r$, $|x|=r$ и $|x|<r$? Что означаетъ геометрически каждый отвѣтъ?

Если раскрыть скобки въ уравненіи (1), то уравненіе круга приметъ видъ:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0 \tag{4}$$

Теперь возникаетъ вопросъ, при какихъ условіяхъ общее уравненіе второй степени:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{5}$$

представляетъ кругъ. Сравнивая уравненіе (5) съ уравненіемъ (4), не трудно замѣтить, что въ уравненіи (4) коэффиціенты при x^2 и y^2 одинаковы и равны 1, кромѣ того, отсутствуетъ членъ, содержащій произведеніе xy. Покажемъ, что, если въ общемъ уравненіи коэффиціенты при x^2 и y^2 одинаковы ($A = C$) и отсутствуетъ членъ, содержащій произведеніе xy, т.-е. $B = 0$, то такое уравненіе при прямоугольной системѣ координатъ представляетъ кругъ, такъ какъ можетъ быть приведено къ виду (1).

Итакъ, пусть намъ дано уравненіе.

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{6}$$

Дѣлимъ всѣ члены его на A:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0. \tag{7}$$

Члены этого уравненія, содержащіе x, съ одной стороны и y съ другой можно дополнить до полнаго квадрата, прибавляя въ каждомъ случаѣ квадратъ половины коэффиціента при первой степени соотвѣтствующаго перемѣннаго. Такимъ образомъ, прибавляя и вычитая

въ лѣвой части уравненія (7) $\dfrac{D^2}{4A^2}$ и $\dfrac{E^2}{4A^2}$, получимъ:

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4A^2} = 0$$

или

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = 0. \tag{8}$$

Если положить

$$\frac{D}{2A} = -a, \quad \frac{E}{2A} = -b, \quad \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = r^2, \tag{9}$$

то данное уравненіе (6) или равносильное ему уравненіе (8) приметъ видъ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, \tag{10}$$

т.-е. представляетъ кругъ. Формулы (9) опредѣляютъ координаты центра этого круга и его радіусъ помощью коэффиціентовъ даннаго уравненія (6):

$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = -\frac{E}{2A} \text{ и } r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}. \tag{9'}$$

При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что значеніе для r можетъ оказаться мнимымъ или равнымъ нулю. Въ первомъ случаѣ, т.-е. если

$$D^2 + E^2 - 4AF < 0, \tag{11}$$

ни одной дѣйствительной точки на плоскости нѣтъ, координаты которой удовлетворяли бы уравненію (6) или (10), ибо сумма положительныхъ чиселъ ($-r^2$ при r мнимомъ число положительное) не можетъ равняться нулю. Только при мнимыхъ значеніяхъ x и y можно было бы удовлетворить этому уравненію, и потому говорятъ, что уравненіе (6) при условіи (11) представляетъ мнимый кругъ. Напр. уравненіе

$$x^2 + y^2 + 4 = 0 \tag{11}$$

представляетъ мнимый кругъ или кругъ съ мнимымъ радіусомъ, ибо

$$r^2 = -4 \quad \text{или} \quad r = 2\sqrt{-1}.$$

Во второмъ случаѣ, когда

$$D^2 + E^2 - 4AF = 0, \tag{12}$$

уравненіе (10) принимаетъ видъ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

Сумма положительныхъ чиселъ равна нулю только тогда, если каждое слагаемое отдѣльно равно нулю, т.-е.

$$(x - a)^2 = 0 \quad \text{и} \quad (y - b)^2 = 0 \quad \text{или} \quad x = a, \quad y = b.$$

Такимъ образомъ, только координаты одной точки плоскости удовлетворяютъ данному уравненію. Можно разсматривать этотъ случай, какъ предѣльный, когда радіусъ r уменьшается до нуля, и тогда можно сказать, что уравненіе (6) при условіи (12) представляетъ кругъ, превратившійся въ точку.

Примѣръ: Какую кривую представляетъ уравненіе:

$$x^2 + y^2 + 6x - 7y + m = 0,$$

гдѣ m какое-нибудь постоянное (параметръ)?

Дополнимъ члены съ текущими координатами до суммы двухъ полныхъ квадратовъ. Для этого надо прибавить и вычесть въ лѣвой части $(^6/_2)^2$ и $(^7/_2)^2$:

$$(x^2 + 6x + 3^2) - 3^2 + (y^2 - 7y + 3{,}5^2) - 3{,}5^2 + m = 0,$$

откуда

$$(x + 3)^2 + (y - 3{,}5)^2 - (3^2 + 3{,}5^2 - m) = 0$$

или

$$(x + 3)^2 + (y - 3{,}5)^2 - (21{,}25 - m) = 0.$$

Такимъ образомъ данное уравненіе представляетъ кругъ съ опредѣленнымъ центромъ и радіусомъ, зависящимъ отъ параметра:

$$a = -3 \quad и \quad b = 3{,}5, \qquad r = \sqrt{21{,}25 - m}.$$

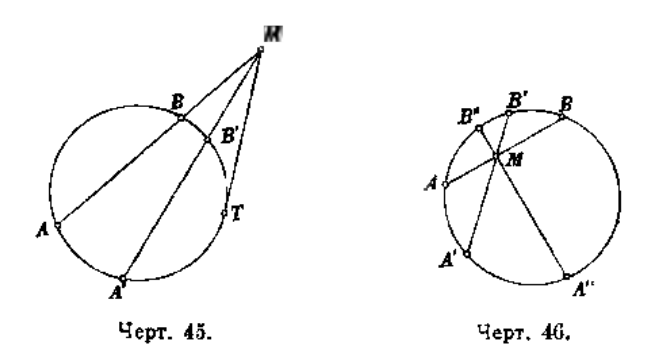
При $m = 21{,}25$ этотъ кругъ обращается въ точку, а при $m > 21{,}25$ будетъ мнимымъ.

§ 2. Степень точки относительно круга. Пусть три точки M, A, B лежатъ на одной прямой, при чемъ A и B лежатъ на данномъ кругѣ и могутъ перемѣщаться по нему такъ, что прямая, ихъ соединяющая, вращается около точки M. Какъ извѣстно изъ элементарной геометріи, произведеніе MA на MB для каждой точки плоскости M является величиной постоянной, не зависящей отъ положенія точекъ A и B на данномъ кругѣ:

$$MA \,.\, MB = Constans.$$

Если точка M лежитъ внѣ круга, то это произведеніе равно квадрату касательной, проведенной изъ M къ данному кругу (чер. 45).

Введемъ теперь направленіе разсматриваемыхъ отрѣзковъ, считая за начало каждаго изъ нихъ точку M. Въ такомъ случаѣ, если точка



Черт. 45. Черт. 46.

M лежитъ внѣ круга, то MA и MB одинаковаго направленія и произведеніе $MA \,.\, MB$ должно считать положительнымъ, а если точка M лежитъ внутри круга, то MA и MB противоположныхъ направленій и произведеніе $MA \,.\, MB$ должно считать отрицательнымъ (чер. 46). Произведеніе $MA \,.\, MB$ называется с т е п е н ь ю точки M относительно даннаго круга. Степень внутреннихъ точекъ отрицательна, степень внѣшнихъ точекъ положительна, степень каждой точки круга равна нулю, ибо одинъ изъ множителей произведенія $MA \,.\, MB$ равенъ нулю.

Если точка M лежитъ внѣ круга, то $\sqrt{MA \,.\, MB}$ представляетъ

величину касательной, проведенной къ кругу изъ точки M. Если точка M лежитъ внутри круга, то $MA.MB$, какъ было отмѣчено выше, отрицательно, но $-MA.MB$ положительно и $2\sqrt{-MA.MB}$ представляетъ величину наименьшей хорды, которую можно провести черезъ точку M.

Пусть координаты точки M будутъ x, y, координаты центра C круга a и b, r—радіусъ. По формулѣ разстоянія имѣемъ:

$$\overline{MC}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

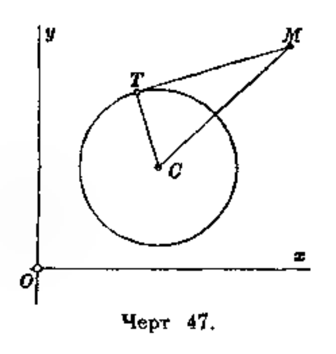
Если точка M лежитъ внѣ круга, то (черт. 47)

$$\overline{MC}^2 - r^2 = \overline{MT}^2$$

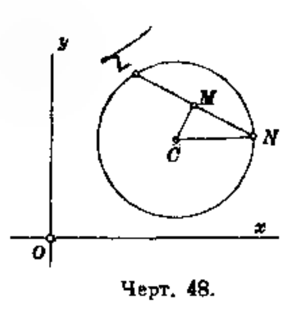
или

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = \overline{MT}^2.$$

Если M лежитъ внутри круга и LN наименьшая хорда, проходя-



Черт 47.



Черт. 48.

щая черезъ точку M и дѣлящаяся въ этой точкѣ пополамъ, то (черт. 48):

$$r^2 - \overline{MC}^2 = \overline{MN}^2 \quad \text{или} \quad \overline{MC}^2 - r^2 = -\overline{MN}^2$$

или

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = -\overline{MN}^2 = ML\ MN.$$

Такимъ образомъ въ томъ и другомъ случаѣ выраженіе

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$$

есть степень точки $M(x, y)$, выраженная черезъ координаты этой точки, координаты центра круга a и b и радіусъ r. Уравненіе круга

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

выражаетъ, что степень точекъ круга равна нулю.

§ 3. **Радикальная ось.** Введеніе понятія степени даетъ возможность очень просто вывести цѣлый рядъ свойствъ круга и системы круговъ.

Пусть даны два круга

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0, \tag{1}$$

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0. \tag{2}$$

Будемъ обозначать степень точки $M(x, y)$ относительно перваго круга сокращенно буквою S, а относительно второго—буквою S_1:

$$S=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2, \tag{3}$$

$$S_1=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2 \ ^{*)} \tag{4}$$

Найдемъ геометрическое мѣсто точекъ плоскости, степени которыхъ относительно того и другого круга одинаковы. Пусть $M(x, y)$ одна изъ этихъ точекъ. По условію должно имѣть мѣсто равенство:

$$S=S_1 \tag{5}$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2. \tag{5'}$$

Равенство (5) и представляетъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Послѣ приведенія оно приводится къ уравненію первой степени:

$$2(a_1-a)\,x+2(b_1-b)\,y+[a^2+b^2-r^2-a_1^2-b_1^2+r_1^2]=0. \tag{5''}$$

Такимъ образомъ искомое геометрическое мѣсто есть прямая линія. Эта прямая перпендикулярна линіи центровъ данныхъ круговъ и называется радикальною осью ихъ. Если данные круги пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, то радикальная ось проходитъ черезъ эти точки пересѣченія.

Касательныя изъ точекъ радикальной оси, лежащихъ внѣ данныхъ круговъ, равны между собой. Черезъ точки радикальной оси, лежащія внутри обоихъ круговъ, можно провести одинаковыя наименьшія хорды того и другого круга.

§ 4. **Пучекъ круговъ.** Обобщимъ теперь предыдущую задачу и найдемъ геометрическое мѣсто точекъ, степени которыхъ относительно того и другого круга сохраняютъ постоянное данное отно-

---

*) Въ равенствахъ (3), (4) x и y обозначаютъ координаты какой-нибудь точки плоскости. Въ уравненіяхъ (1) и (2) x и y координаты какой-нибудь точки круга.

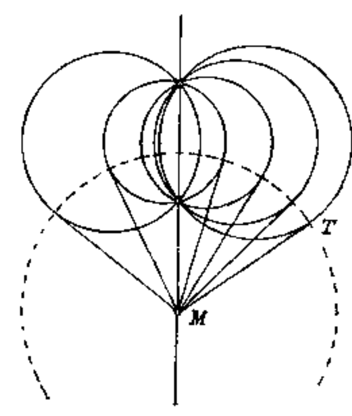
шенiе k. По условiю должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{S}{S_1}=k \quad \text{или} \quad S-kS_1=0 \tag{6}$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2-k[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2]=0. \tag{6'}$$

Такимъ образомъ, искомое геометрическое мѣсто есть кругъ если k не равно 1, такъ какъ въ уравненiи (6') коэффицiенты при x^2 и y^2 одинаковы и нѣтъ члена, содержащаго произведенiе xy [§ 1] Этотъ кругъ проходитъ черезъ точки пересѣченiя данныхъ круговъ, если онѣ существуютъ, ибо координаты этихъ точекъ, удовлетворяя уравненiямъ (1) и (2), удовлетворяютъ въ то же время и уравненiю (6) или (6').



Черт 49.

Давая въ равенствѣ (6) и (6') различныя значенiя отношенiю k, т.-е., разсматривая его, какъ параметръ, мы получимъ цѣлый рядъ круговъ, совокупность которыхъ называется пучкомъ круговъ (чер. 49). Круги пучка имѣютъ общую линiю центровъ и общую радикальную ось.

Дѣйствительно, координаты x_0, y_0 центра круга (6') опредѣляются формулами (9') § 1, въ которыхъ нужно положить согласно уравненiю (6')

$$A=1-k, \quad D=-2(a-ka_1), \quad E=-2(b-kb_1).$$

Такимъ образомъ получимъ

$$x_0=\frac{a-ka_1}{1-k}, \quad y_0=\frac{b-kb_1}{1-k}.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ *), что центръ круга (6') дѣлитъ разстоянiе между центрами данныхъ круговъ въ отношенiи $-k$, т.-е. лежитъ на прямой, ихъ соединяющей. Съ другой стороны, степень какой-либо точки относительно круга (6) или (6') опредѣляется лѣвою частью уравненiя, раздѣленною на коэффицiентъ при x или y,

*) Ср § 6, гл. I.

т.-е. на $1-k$. Поэтому радикальная ось двухъ какихъ-нибудь круговъ пучка, соотвѣтствующихъ значеніямъ параметра k_1 и k_2, опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{S-k_1S_1}{1-k_1}=\frac{S-k_2S_1}{1-k_2} \tag{7}$$

или

$$S=S_1, \tag{5}$$

т.-е. тѣмъ же уравненіемъ, какъ и радикальная ось данныхъ круговъ (1) и (2).

Пусть $M(xy)$ какая-либо точка внѣшней части общей радикальной оси даннаго пучка круговъ, координаты этой точки удовлетворяютъ уравненію (5), а слѣдовательно, и уравненію (7), каковы бы ни были значенія параметровъ k_1 и k_2. Это значитъ, что точка M имѣетъ одну и ту же степень относительно всѣхъ круговъ пучка (6), иначе касательныя, проведенныя къ различнымъ кругамъ пучка, равны между собой. Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ будетъ кругъ съ центромъ въ точкѣ M. Кругъ (M), какъ слѣдуетъ изъ его опредѣленія, пересѣкаетъ всѣ круги пучка (6) ортогонально, т.-е. подъ прямымъ угломъ.

Всѣ круги, пересѣкающіе ортогонально круги даннаго пучка (6) или (6'), имѣютъ центры на радикальной оси этого пучка, и образуютъ сами пучекъ, радикальною осью котораго будетъ служить линія центровъ даннаго пучка, ибо центръ любого круга даннаго пучка имѣетъ одну и ту же степень, равную квадрату его радіуса, относительно всякаго круга (M).

УПРАЖНЕНІЯ.

1) Показать, что радикальныя оси каждой пары изъ трехъ данныхъ круговъ, не принадлежащихъ одному пучку, пересѣкаются въ одной точкѣ, радикальномъ центрѣ данныхъ круговъ.

2) Показать, что существуетъ одинъ только кругъ, пересѣкающій три данныхъ круга, не принадлежащихъ одному пучку, ортогонально. Этотъ ортогональный кругъ можетъ обратиться въ точку и можетъ быть также мнимымъ, но всегда съ дѣйствительнымъ центромъ.

3) Составить уравненіе геометрическаго мѣста точекъ $M(x, y)$, отношеніе разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ $A(a,b)$ и $B(a_1, b_1)$ постоянно и равно k.

ГЛАВА IV.

ЭЛЛИПСЪ, ГИПЕРБОЛА и ПАРАБОЛА.

§ 1. **Коническія сѣченія.** Въ этой главѣ мы будемъ разсматривать кривыя линіи, извѣстныя подъ именемъ эллипса, гиперболы и параболы, будемъ изучать свойства этихъ кривыхъ аналитически, т.-е. составивъ предварительно ихъ уравненія. Значеніе этихъ кривыхъ въ исторіи развитія математическихъ идей громадно. Кривыя эти были открыты еще греческими геометрами, какъ плоскія сѣченія конуса съ круглымъ основаніемъ, какъ коническія сѣченія. Теорія коническихъ сѣченій возникла изъ потребности примирить то внутреннее противорѣчіе, которое существовало въ античной геометріи. духъ античной геометріи требовалъ, чтобы каждая задача рѣшалась безъ помощи какихъ-либо инструментовъ, кромѣ циркуля и линейки, допускаемыхъ самыми постулатами геометріи, да и эти инструменты скорѣе допускались теоретически, чѣмъ практически. Между тѣмъ сама же античная геометрія поставила такія задачи, которыя невозможно рѣшить помощью только циркуля и линейки, не прибѣгая къ инымъ инструментамъ. Эти задачи суть трисекція угла, квадратура круга и делійская задача или задача объ удвоеніи куба. Съ послѣдней задачей заинтересованная греческая мысль связала особое сказаніе. На островѣ Делосѣ была чума. Жители вопросили своего оракула, какъ положить конецъ бѣдствію. Оракулъ повелѣлъ имъ удвоить алтарь ихъ бога. Алтарь былъ въ видѣ куба и долженъ былъ сохранить ту же форму. Чтобы рѣшить эту задачу объ удвоеніи куба, дѣлійцамъ пришлось отправить пословъ къ геометрамъ въ академію Платона. Говорятъ, будто бы Платонъ сказалъ имъ: не удвоенія алтаря желаетъ отъ нихъ богъ, а своимъ повелѣніемъ выразилъ порицаніе эллинамъ, что они мало заботятся о наукахъ, мало обращаютъ вниманія на геометрію.

Если x — сторона удвоеннаго куба и a — сторона даннаго, то делійская задача сводится къ рѣшенію кубическаго уравненія $x^3 = 2a^3$.

Въ V вѣкѣ до Р. Х. Гиппократъ изъ Хіоса свелъ рѣшеніе этой задачи къ построенію **двухъ среднихъ геометрическихъ** между a и $2a$:

$$a : x = x : y = y : 2a. \tag{1}$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ первой пропорціи слѣдуетъ:

$$x^2 = ay, \tag{2}$$

изъ второй

$$y^2 = 2ax. \tag{3}$$

Изъ уравненія (2) слѣдуетъ:

$$x^4 = a^2y^2. \tag{4}$$

Изъ уравненій (3) и (4) имѣемъ:

$$x^4 = 2a^3x \quad \text{или} \quad x^3 = 2a^3$$

Уравненія (2) и (3) въ отдѣльности съ точки зрѣнія метода координатъ представляютъ нѣкоторыя линіи, а величины x и y, удовлетворяющія обоимъ уравненіямъ совмѣстно, являются координатами **точки пересѣченія** этихъ кривыхъ. Какія же это кривыя? Оказывается, какъ мы увидимъ, эти кривыя будутъ параболами, которыя могутъ быть получены, какъ сѣченія конуса.

Послѣ такого сведенія делійской задачи къ задачѣ построенія двухъ среднихъ геометрическихъ интересъ греческихъ геометровъ сосредоточился на изученіи коническихъ сѣченій. Больше всего въ этомъ изученіи было сдѣлано **Аппононіемъ**, греческимъ геометромъ, жившимъ послѣ Евклида (300 л. до Р. Х.) въ III II вѣкѣ до Р. Х.

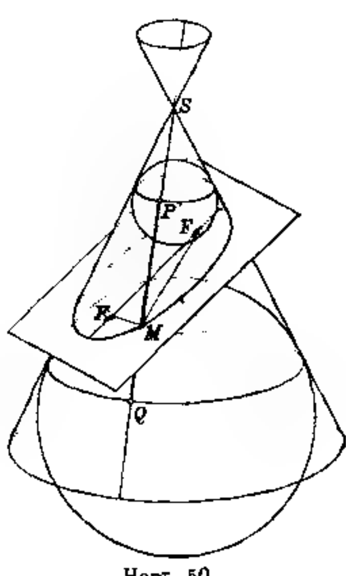
Но здѣсь не кончается еще исторія коническихъ сѣченій. Уже въ нашу эпоху **Кеплеръ** (1571—1630), основываясь на многочисленныхъ наблюденіяхъ Тахо-де-Браге, открываетъ законы движенія планетъ, по первому изъ которыхъ **планеты движутся по эллипсамъ**. Черезъ сто лѣтъ **Ньютонъ** (1642—1727), величайшій изъ философовъ математиковъ, изъ **законовъ Кеплера** выводитъ **законъ всемірнаго тяготѣнія**.

Такова поучительная исторія коническихъ сѣченій: вопросъ, возникшій, быть можетъ, изъ побужденій простой любознательности, привелъ къ разультатамъ огромной важности.

Разсмотримъ сначала плоскія сѣченія круглаго конуса не съ точки зрѣнія метода координатъ, а съ точки зрѣнія элементарной геомет-

ріи, и выведемъ изъ такого разсмотрѣнія нѣкоторыя свойства этихъ сѣченій, которыя могутъ служить планиметрическимъ опредѣленіемъ ихъ и основаніемъ для составленія уравненія каждаго изъ нихъ.

Эллипсъ. Двѣ пересѣкающіяся прямыя образуютъ вертикальные углы, и если одна изъ прямыхъ безъ измѣненія угла наклона къ другой вращается около этой послѣдней, то она описываетъ коническую поверхность, будемъ говорить—прямой круглый конусъ, состоящій изъ двухъ полостей, простирающихся по разныя стороны отъ вершины. Плоскость, пересѣкающая всѣ образующія одной полости, иначе—не параллельная ни одной изъ образующихъ конуса, даетъ въ сѣченіи съ конусомъ эллипсъ. Впишемъ въ конусъ два шара (чер. 50), которые касались бы въ то же время и сѣкущей плоскости, т. е. плоскости эллипса: одинъ въ точкѣ F, другой въ точкѣ F_1. Прямая, соединяющая какую-нибудь точку M эллипса съ точкою F, касается въ этой послѣдней перваго (верхняго) шара, а образующая конуса, выходящая изъ той же точки M, касается того же шара въ точкѣ P. Касательныя, проведенныя изъ одной и той же точки къ шару, равны. Слѣдовательно,



Черт. 50.

$$MF = MP. \tag{5}$$

Точно также прямая MF_1 касается второго (нижняго) шара въ точкѣ F_1, а продолженіе образующей конуса, выходящей изъ точки M, коснется того же шара въ точкѣ Q. Слѣдовательно,

$$MF_1 = MQ. \tag{6}$$

Изъ равенствъ (5) и (6) слѣдуетъ:

$$MF + MF_1 = MP + MQ.$$

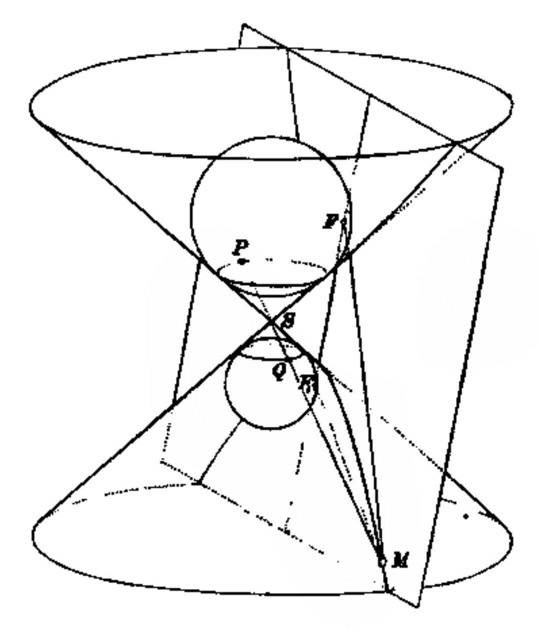
Но

$$MP + MQ = PQ,$$

гдѣ PQ — образующая усѣченнаго конуса, заключеннаго между

параллельными плоскостями, въ которыхъ лежатъ круги прикосновенія вписанныхъ шаровъ съ даннымъ конусомъ. При перемѣщеніи точки M по эллипсу образующая усѣченнаго конуса будетъ также перемѣщаться, но сохранять постоянную величину. Слѣдовательно, при движеніи точки M по эллипсу сумма $MF + MF_1$ сохраняетъ постоянную величину. Точки F и F_1 называются фокусами эллипса. Отрѣзки MF и MF_1 -радіусами-векторами. Это свойство эллипса мы далѣе и будемъ разсматривать, какъ его опредѣленіе.

Гипербола. Плоскость, параллельная двумъ какимъ-либо обра-



Черт. 51.

зующимъ конуса, пересѣкаетъ обѣ полости его и даетъ въ сѣченіи кривую линію, состоящую изъ двухъ вѣтвей, кривую, называемую **гиперболой**.

Вписываемъ опять въ конусъ два шара, касающихся въ то же время сѣкущей плоскости -одинъ въ точкѣ F (черт. 51), другой въ точкѣ F_1. Точки F и F_1 — фокусы гиперболы. Изъ какой-нибудь точки гиперболы M прямыя, идущія въ фокусы, касаются вписанныхъ шаровъ въ этихъ фокусахъ, а образующая конуса, идущая изъ той же точки M, касается тѣхъ же шаровъ: одного—въ точкѣ

P, другого въ точкѣ Q. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$MF = MP, \quad MF_1 = MQ.$$

Отсюда

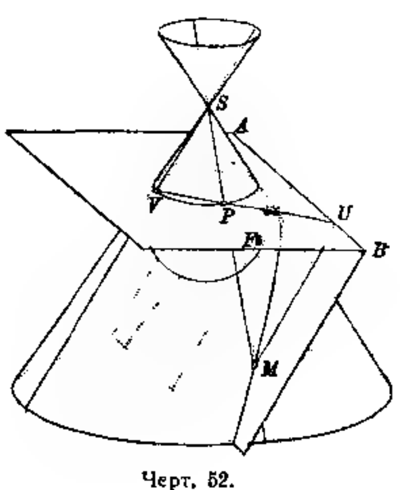
$$MF - MF_1 = MP - MQ,$$

или

$$MF - MF_1 = PQ.$$

При движенiи точки M по гиперболѣ PQ будетъ также перемѣщаться, но сохранять свою величину, ибо $PQ = PS + SQ$, а PS и SQ—образующiя прямыхъ круглыхъ конусовъ въ элементарномъ смыслѣ.

Такимъ образомъ, разность радiусовъ-векторовъ $MF - MF_1$ при движенiи точки по гиперболѣ сохраняетъ постоянную величину. Это свойство гиперболы въ дальнѣйшемъ мы будемъ считать ея опредѣленiемъ.



Черт. 52.

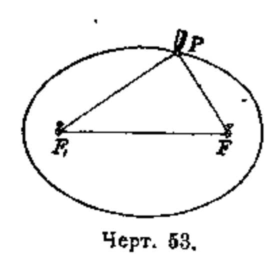
Парабола. Плоскость, параллельная одной образующей конуса, пересѣкаетъ его по параболѣ.

Вписываемъ въ конусъ шаръ, касающiйся въ то же время и сѣкущей плоскости въ точкѣ F (черт. 52) — фокусѣ параболы. Пусть плоскость параболы и плоскость, въ которой лежитъ кругъ прикосновенiя шара съ конусомъ, пересѣкаются по прямой AB. Образующая конуса, параллельная плоскости параболы, пусть будетъ SV. Касательная въ точкѣ V къ кругу прикосновенiя параллельна прямой AB, ибо, если бы она была не параллельна ей, то плоскость параболы была бы параллельна не одной, а двумъ образующимъ конуса. Изъ какой-нибудь точки M параболы проводимъ прямую MU, параллельную образующей SV и, слѣдовательно, перпендикулярную прямой AB. Прямая VU и образующая конуса SM пересѣкутся въ точкѣ P на кругѣ прикосновенiя. Изъ подобiя треугольниковъ SVP и MUP слѣдуетъ, что $MP = MU$, такъ какъ $SV = SP$. Но MP и MF равны, какъ касательныя изъ одной точки къ одному шару. Слѣдовательно,

$$MF = MU,$$

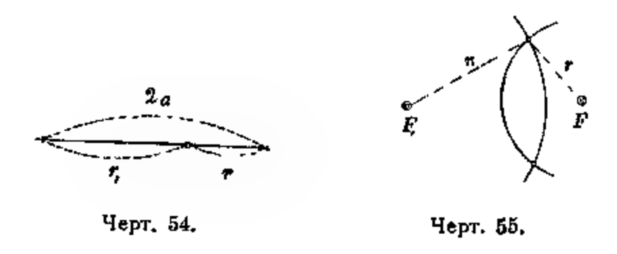
т.-е. каждая точка параболы одинаково отстоитъ отъ фокуса F и прямой AB, которую будемъ называть директрисой параболы. Это свойство параболы мы и примемъ потомъ за опредѣленіе ея.

§ 2. **Эллипсъ. Составленіе его уравненія.** Эллипсомъ называется геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ F и F_1, называемыхъ фокусами, составляютъ въ суммѣ постоянную величину $2a$. Какъ слѣдуетъ изъ этого опредѣленія, можно вычертить эллипсъ слѣдующимъ образомъ. Связавъ концы нерастяжимой нити такъ, чтобы длина образовавшагося кольца равнялась $2a + 2c$, гдѣ $2c$ — разстояніе между фокусами, накидываютъ ее на неплотно прикрѣпленныя кнопки въ фокусахъ F и F_1 (черт. 53). Натягиваютъ эту нить чертящимъ остріемъ; при перемѣщеніи острія по плоскости чертежа такъ, чтобы нить всегда оставалась натянутою (для соблюденія условія $FP + F_1P = 2a$), оно начертитъ намъ особаго рода замкнутую кривую, которая, согласно опредѣленію, и будетъ эллипсомъ.



Черт. 53.

Изъ того же опредѣленія слѣдуетъ и способъ построенія помощью циркуля сколькихъ угодно точекъ эллипса. Дѣлимъ отрѣзокъ, равный $2a$, на двѣ какихъ-нибудь части r и r_1 (черт. 54) и радіусами, равными этимъ частямъ, описываемъ два круга съ



Черт. 54. Черт. 55.

центрами въ фокусахъ эллипса. Точки пересѣченія этихъ круговъ принадлежатъ эллипсу (черт. 55).

Составимъ уравненіе, которому должны удовлетворять координаты любой точки эллипса.

За ось абсциссъ прямоугольной системы координатъ примемъ линію, соединяющую фокусы F и F_1 съ положительнымъ направ-

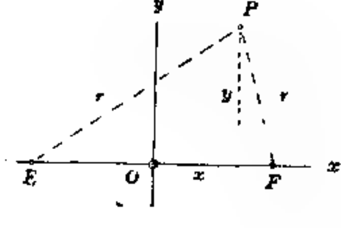
леніемъ отъ F_1 къ F, а за ось ординатъ—перпендикуляръ, возставленный изъ середины отрѣзка FF_1 (черт. 56).

Если разстояніе между фокусами равно $2c$, то координаты одного фокуса F будутъ c и 0, а другого F_1 $-c$, 0. Пусть $P(x, y)$—какая-нибудь точка эллипса. По условію имѣемъ:

$$FP + F_1P = 2a \qquad (1)$$

или, если обозначимъ FP черезъ r, а F_1P черезъ r_1,

$$r + r_1 = 2a; \qquad (1')$$



Черт. 56.

r и r_1 называются радіусами-векторами точекъ эллипса.

По формулѣ разстоянія между двумя точками радіусы-векторы r и r_1 можно выразить черезъ координаты x, y точки P:

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (2)$$

Подставляя выраженія (2) въ равенство (1), и получимъ уравненіе, которому будутъ удовлетворять координаты любой точки эллипса, короче—уравненіе эллипса.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (3)$$

Можно привести его къ болѣе простому виду, уничтожая входящіе въ него радикалы. Дѣйствительно,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (3')$$

Возводимъ обѣ части уравненія (3') въ квадратъ:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Отсюда

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Возводимъ снова обѣ части въ квадратъ:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2.$$

По приведеніи будемъ имѣть уравненіе эллипса безъ радикаловъ:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{4}$$

Такъ какъ сумма двухъ сторонъ треугольника больше третьей, то

$$PF+PF_1>FF_1, \quad \text{или} \quad 2a>2c,$$

или, наконецъ,

$$a>c.$$

Слѣдовательно, a^2-c^2 существенно положительная величина, и потому можно обозначить ее квадратомъ нѣкоторой дѣйствительной величины:

$$a^2-c^2=b^2. \tag{5}$$

Величины a и c даны; равенствомъ (5) вполнѣ опредѣляется и величина b. Если a — гипотенуза, а c — катетъ прямоугольнаго треугольника, то b будетъ другимъ катетомъ этого треугольника.

Вводя b^2 вмѣсто (a^2-c^2) въ уравненіе (4) эллипса, получимъ:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

или послѣ дѣленія всѣхъ членовъ этого уравненія на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6}$$

Таково въ простѣйшемъ или каноническомъ видѣ уравненіе эллипса. Если бы за оси координатъ мы приняли другія прямыя, а не линію, соединяющую фокусы, и перпендикуляръ къ ней изъ середины отрѣзка FF_1, то и уравненіе получилось бы болѣе сложное.

Давая произвольныя значенія абсциссѣ и вычисляя изъ уравненія (6) соотвѣтственныя значенія ординаты, можно по вычисленнымъ координатамъ, удовлетворяющимъ уравненію эллипса, построить сколько угодно точекъ эллипса.

Окружность радіуса a, съ центромъ въ началѣ координатъ, какъ мы видѣли, выражается уравненіемъ:

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Сопоставляя это уравненіе и выведенное нами уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

находимъ, что при $a=b$ эллипсъ обращается въ кругъ, т.-е. кругъ есть частный случай эллипса.

§ 3. **Изслѣдованіе уравненія эллипса. Опредѣленіе вида этой кривой.** 1. Въ лѣвой части уравненія (6) эллипса каждое изъ слагаемыхъ, какъ квадратъ дѣйствительнаго числа, существенно положительная величина, и сумма ихъ равна единицѣ; слѣдовательно, каждое слагаемое въ отдѣльности менѣе единицы или только одно изъ нихъ равно единицѣ, когда другое равно нулю:

$$\frac{x^2}{a^2} \leqq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqq 1, \quad \text{или} \quad x^2 \leqq a^2, \quad y^2 \leqq b^2.$$

Отсюда, обозначая черезъ $|x|$ и $|y|$ абсолютныя величины x и y, будемъ имѣть:

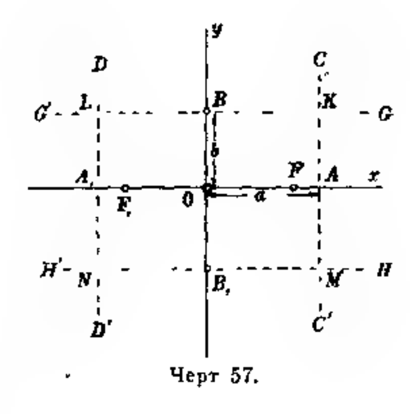
$$|x| \leqq a, \quad |y| \leqq b,$$

или, наконецъ,

$$-a \leqq x \leqq a, \quad -b \leqq y \leqq b.$$

Точки плоскости, координаты которыхъ удовлетворяютъ этимъ неравенствамъ, не могутъ отступать отъ оси ординатъ дальше, чѣмъ на разстояніе a въ ту или другую сторону, а отъ оси абсциссъ дальше, чѣмъ на разстояніе b въ ту или другую сторону.

Точки, для которыхъ $|x| \leqq a$, лежатъ внутри безконечной полосы, ограниченной прямыми CC' и DD' (черт. 57), параллельными оси ординатъ и отстоящими отъ нея одна по одну сторону, другая по другую, на разстояніи a; а точки, для которыхъ $|y| \leqq b$, лежатъ внутри безконечной полосы, ограниченной прямыми GG' и HH', параллельными оси абсциссъ и отступающими отъ нея на разстояніе b въ ту или другую сторону. Точки, для которыхъ одновременно $|x| \leqq a$ и $|y| \leqq b$, лежатъ въ общей части этихъ полосъ, т.-е. внутри прямоугольника $KLMN$.



Черт 57.

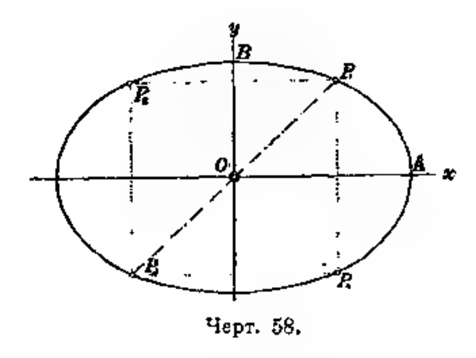
Такъ какъ координаты точекъ эллипса удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|x| \leqq a \quad \text{и} \quad |y| \leqq b,$$

то эллипсъ лежитъ внутри прямоугольника $KLMN$,

т. -е весь располагается въ конечной части плоскости.

2. Въ уравненіе эллипса (6) текущія координаты входятъ только во вторыхъ степеняхъ. Пусть $P_1(x_1, y_1)$ (черт. 58)—одна изъ точекъ эллипса; значитъ x_1 и y_1 должны удовлетворять уравненію эллипса, т. е. должно имѣть мѣсто равенство



Черт. 58.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Но въ такомъ случаѣ и точки $P_2(-x_1, y_1)$, $P_3(-x_1, -y_1)$, $P_4(x_1, -y_1)$, координаты которыхъ составлены изъ координатъ первой точки P_1 перемѣной у одной или у обѣихъ знака, лежатъ на эллипсѣ, ибо, если имѣетъ мѣсто равенство

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

то будутъ имѣть мѣсто также и слѣдующія равенства:

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{(x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Какъ слѣдуетъ изъ построенія точекъ P_2, P_3, P_4 по ихъ координатамъ, точка P_2 симметрична съ точкой P_1 относительно оси ординатъ, точка P_4 симметрична съ P_1 относительно оси абсциссъ, а точка P_3 симметрична съ P_1 относительно начала координатъ, такъ что хорда P_1P_3 проходитъ черезъ начало координатъ и дѣлится въ немъ пополамъ. При перемѣщеніи точки P_1 по эллипсу и симметричныя точки останутся на эллипсѣ, а хорда P_1P_3 постоянно будетъ проходить черезъ начало координатъ и дѣлиться въ немъ пополамъ. Слѣдовательно, эллипсъ симметрично расположенъ относительно осей координатъ или иначе—оси координатъ служатъ осями симметріи эллипса, а начало координатъ служитъ центромъ эллипса.

Всякая хорда эллипса, проходящая черезъ центръ его, дѣлится въ центрѣ пополамъ и служитъ діаметромъ эллипса.

3. Для ближайшаго опредѣленія вида эллипса выразимъ изъ уравненія (6) ординату y какой-нибудь точки эллипса, какъ явную функцію абсциссы x этой точки:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \quad \text{или} \quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

откуда

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Изъ этой формы уравненія видно, что y имѣетъ два значенія, равныхъ по абсолютной величинѣ, но разныхъ по знаку, что указываетъ на извѣстный намъ фактъ симметричнаго расположенія эллипса относительно оси абсциссъ.

Ордината y только тогда дѣйствительна, когда $x^2\leq a^2$, или $|x|\leq a$, или

$$-a\leq x\leq a,$$

что указываетъ опять на извѣстный уже фактъ, что точки эллипса не могутъ отступать отъ оси y дальше, чѣмъ на разстояніе a въ ту или другую сторону. Наибольшая по абсолютной величинѣ абсцисса для точекъ эллипса равна a, наибольшая ордината, какъ это слѣдуетъ изъ уравненія

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

получится при $x=0$, т.-е. $y=b$.

$2a$ и $2b$ называются главными осями эллипса, при чемъ $2a$ называется большою осью, а $2b$ — малою осью, ибо $a>b$, какъ слѣдуетъ изъ равенства (5, § 2)

$$b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Опишемъ на большой оси эллипса, какъ на діаметрѣ, кругъ. Уравненіе этого круга

$$x^2+y^2=a^2,$$

откуда

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

При одинаковой абсциссѣ ординаты эллипса и круга вообще неодинаковы. Будемъ обозначать ординату круга, при сравненіи съ

соотвѣтствующей ординатой у эллипса, черезъ Y и будемъ сравнивать между собою ординаты одинаковаго знака.

Итакъ, имѣемъ:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

и

$$Y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

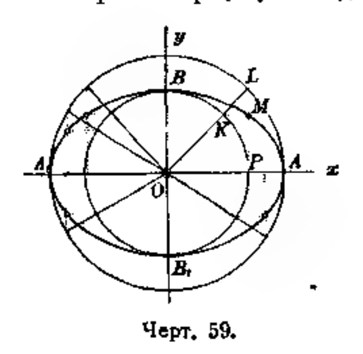
Дѣлимъ почленно эти равенства одно на другое; получимъ:

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}, \tag{7}$$

т.-е. ордината эллипса во столько разъ меньше соотвѣтствующей ординаты круга, во сколько b меньше a.

Эта пропорція даетъ намъ возможность весьма легко построить сколько угодно точекъ эллипса, когда извѣстны его оси, т.-е. величины a и b.

Построеніе точекъ эллипса. На главныхъ осяхъ эллипса AA_1 и BB_1 (черт. 59), какъ на діаметрахъ, описываемъ двѣ концентрическія окружности и изъ центра проводимъ произвольный радіусъ OL. Проведя затѣмъ черезъ точку L пересѣченія этого радіуса съ большою окружностью прямую LP, параллельную малой оси, и черезъ точку K пересѣченія его съ малою окружностью прямую KM, параллельную большой оси, получимъ въ пересѣченіи этихъ прямыхъ точку M, принадлежащую эллипсу.



Черт. 59.

Дѣйствительно, при такомъ построеніи будемъ имѣть:

$$\frac{PM}{PL} = \frac{OK}{OL},$$

но

$$PL = Y, \quad OK = b, \quad OL = a$$

слѣдовательно,

$$\frac{PM}{Y} = \frac{b}{a}.$$

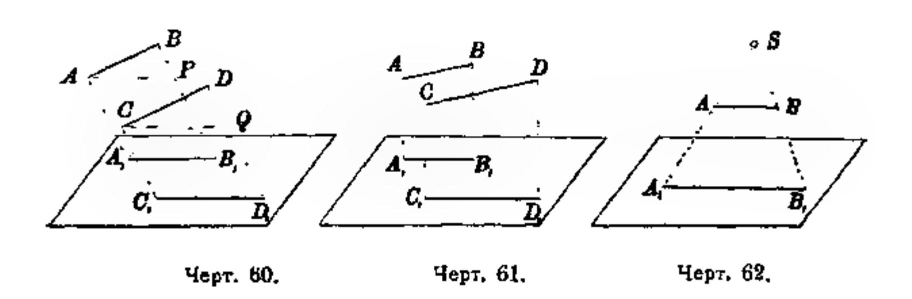
Сравнивая эту пропорцію съ пропорціей (7), заключаемъ, что $PM = y$; т.-е. M — точка эллипса. Такимъ образомъ эллипсъ мы можемъ получить изъ круга, сокращая въ одномъ и томъ же отношеніи ординаты его или соотвѣтствующій рядъ параллельныхъ хордъ.

Такъ какъ при параллельной проекціи (косой или ортогональной) параллельные отрѣзки сокращаются или увеличиваются въ одномъ и томъ же отношеніи*), то предыдущее построеніе эллипса приводитъ насъ къ слѣдующему важному заключенію:

Проекція круга есть эллипсъ.

---

*) Проекція называется параллельной, если проектирующіе лучи имѣютъ одинаковое направленіе (черт. 60, 61); если же проектирующіе лучи выходятъ изъ одной точки, то проекція называется центральной или перспективной (черт. 62). Параллельная проекція можетъ быть косой, если направленіе проектирующихъ лучей не перпендикулярно къ плоскости проекціи, т.-е. къ плоскости, на которую проектируютъ (черт 60), или же ортогональной, если проектирующіе лучи перпендикулярны къ плоскости проекціи (черт. 61).

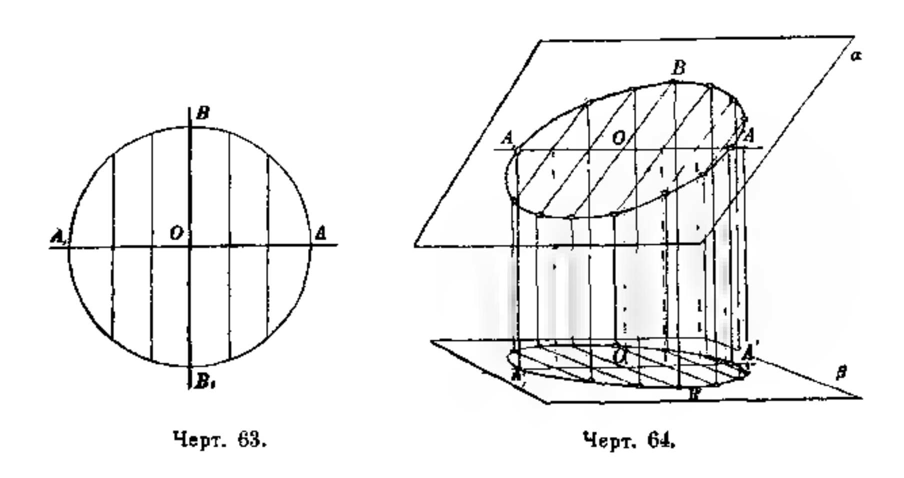


Черт. 60. Черт. 61. Черт. 62.

Нетрудно доказать, что при параллельной проекціи (черт. 60, 61), если $AB \parallel CD$, то и $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD}$. Въ самомъ дѣлѣ, плоскости ABA_1B_1 и CDC_1D_1 параллельны, такъ какъ двѣ прямыхъ AB и AA_1, выходящихъ изъ одной точки въ одной плоскости, соотвѣтственно параллельны двумъ прямымъ CD и CC_1 другой плоскости. Слѣдовательно, эти плоскости пересѣкаются плоскостью проекцій по прямымъ (A_1B_1 и C_1D_1) параллельнымъ. Кромѣ того изъ подобія треугольниковъ ABP и CDQ слѣдуетъ пропорція $\frac{AP}{AB} = \frac{CQ}{CD}$.

Но $AP = A_1B_1$, а $CQ = C_1D_1$; слѣдовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD}$.

На черт. 63 имѣемъ кругъ съ двумя перпендикулярными діаметрами AA_1 и BB_1 и хордами, параллельными одному изъ этихъ діаметровъ. Если этотъ кругъ помѣстимъ на плоскость α (черт. 64) такъ, чтобы діаметръ AA_1 былъ параллеленъ плоскости β, и будемъ проектировать кругъ на плоскость β, то діаметръ AA_1 будетъ



Черт. 63. Черт. 64.

проектироваться безъ сокращенія, а діаметръ BB_1 и хорды, ему параллельныя, сократятся (или удлинятся, что возможно при косой проекціи) въ нѣкоторомъ одномъ и томъ же отношеніи. Можно подобрать наклонъ плоскости α къ плоскости β (или направленіе проектирующихъ лучей OO', AA' и т. д. въ случаѣ косой проекціи) такъ, чтобы проекція діаметра BB_1 равнялась $2b$. Тогда кругъ радіуса a будетъ проектироваться эллипсомъ съ полуосями a и b.

§ 4. **Построеніе фокусовъ эллипса. Эксцентрицитетъ.** По даннымъ полуосямъ эллипса a и b можно опредѣлить положеніе фокусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, каждый фокусъ отстоитъ отъ центра на разстояніи, равномъ c; но величины a, b и c связаны соотношеніемъ (§ 2)

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{или} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

т.-е. a будетъ гипотенузой нѣкотораго прямоугольнаго треугольника, а c и b — катетами. Поэтому, если изъ точки B (конца малой оси)

какъ изъ центра описать дугу радіусомъ, равнымъ a, засѣкающую ось абсциссъ, то точки пересѣченія и будутъ фокусами (черт. 65).

Отношеніе разстоянія между фокусами къ длинѣ большой оси, $\frac{2c}{2a}$, или $\frac{c}{a}$ называется **эксцентрицитетомъ** эллипса и обозначается буквой e:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e.$$

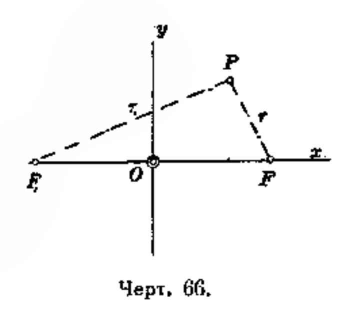
Эксцентрицитетъ эллипса (отвлеченное число), какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго его опредѣленія, меньше единицы:

$$e=\frac{c}{a}<1.$$

Черт. 65.

Величиною эксцентрицитета опредѣляется форма эллипса: при пропорціональномъ увеличеніи осей эллипса, форма его и эксцентрицитетъ не мѣняются; эллипсы съ пропорціональными осями или одного и того же эксцентрицитета подобны.

§ 5. **Гипербола. Уравненіе ея.** Гиперболой называется геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ (фокусовъ) составляютъ постоянную разность.



Черт. 66.

Исходя изъ этого опредѣленія гиперболы, можно составить ея уравненіе.

Выберамъ такое же положеніе осей координатъ относительно фокусовъ, какое мы брали для эллипса. Пусть разстояніе между фокусами равно $2c$ (черт. 66), а постоянная разность разстояній точекъ гиперболы до фокусовъ $2a$:

$$F_1P-FP=2a$$

или

$$r_1-r=2a,$$

гдѣ $r_1 = F_1P$, а $r = FP$. По формулѣ разстоянія имѣемъ:

$$F_1P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad FP = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Слѣдовательно, согласно опредѣленію

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{1}$$

Это и есть искомое уравненіе гиперболы. Можно привести это уравненіе, освобождая его отъ радикаловъ, къ болѣе простому виду.

Перенеся одинъ изъ радикаловъ во вторую часть уравненія, получимъ:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возвышая обѣ части уравненія въ квадратъ, по сокращеніи будемъ имѣть:

$$-a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Снова возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{2}$$

Уравненіе (2) такого же вида, какъ и уравненіе эллипса до введенія въ него величины b^2 (§ 2). Но разница въ томъ, что теперь $a < c$, а не больше, какъ было въ случаѣ эллипса. Въ самомъ дѣлѣ, разность двухъ сторонъ треугольника PFF_1 меньше третьей стороны:

$$PF_1 - PF < F_1F,$$

т.-е.

$$2a < 2c, \quad \text{или} \quad a < c.$$

Слѣдовательно, $a^2 - c^2$ отрицательная величина, и потому ее можно обозначить черезъ $-b^2$, гдѣ b—дѣйствительная величина:

$$a^2 - c^2 = -b^2. \tag{3}$$

Подставляя вмѣсто $a^2 - c^2$ величину $-b^2$ въ уравненіе (2), получимъ:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

По раздѣленіи всѣхъ членовъ уравненія на $-a^2b^2$ будемъ имѣть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Таково въ простѣйшемъ или каноническомъ видѣ уравненіе гиперболы.

Изъ равенства (3) слѣдуетъ, что

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отношеніе $\frac{c}{a}$ называется эксцентрицитетомъ гиперболы и обозначается буквою e:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = e.$$

Эксцентрицитетъ гиперболы больше единицы, такъ какъ $c > a$.

§ 6. **Изслѣдованіе уравненія гиперболы. Опредѣленіе вида этой кривой.** Изслѣдуемъ выведенное уравненіе гиперболы, чтобы составить представленіе о видѣ этой кривой.

1. Прежде всего легко замѣтить, что гипербола симметрично расположена относительно осей координатъ и начало координатъ служитъ центромъ этой кривой. Въ самомъ дѣлѣ, текущія координаты входятъ въ уравненіе гиперболы во второй степени; если, поэтому, точка $P_1(x_1, y_1)$ лежитъ на гиперболѣ, т.-е. координаты ея x_1 и y_1 удовлетворяютъ уравненію гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то и координаты точекъ $P_2(-x_1, y_1)$, $P_3(-x_1, -y_1)$, $P_4(x_1, -y_1)$, симметричныхъ съ первой относительно осей или начала координатъ, будутъ удовлетворять тому же уравненію, т.-е. и эти точки лежатъ на гиперболѣ.

Хорда гиперболы P_1P_3, какъ слѣдуетъ изъ построенія точки P_3, проходитъ черезъ начало координатъ и въ началѣ дѣлится пополамъ ($P_1O = OP_3$). При всякомъ положеніи точки P_1 на гиперболѣ будетъ имѣть мѣсто то же самое. Слѣдовательно, всякая хорда гиперболы, проходящая черезъ начало координатъ, дѣлится въ началѣ пополамъ Начало координатъ, такимъ образомъ, служитъ *центромъ гиперболы*.

2. Изъ уравненія гиперболы (4) ординату можно выразить, какъ явную функцію абсциссы:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \quad (5)$$

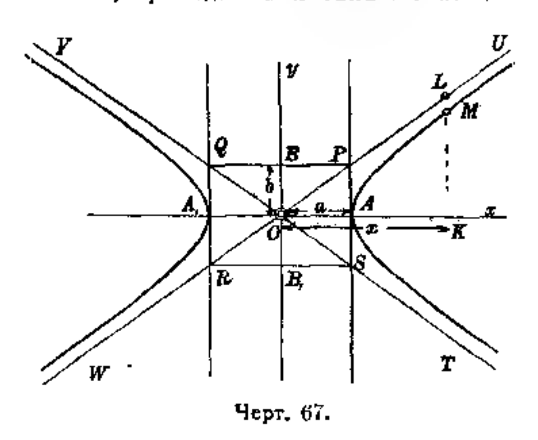
Каждому значенію абсциссы соотвѣтствуютъ два значенія ординаты, равныхъ по абсолютной величинѣ, но противоположныхъ по знаку, что и должно было ожидать: какъ только что было доказано, гипербола расположена симметрично относительно осей координатъ, а стало быть и относительно оси абсциссъ.

Изъ равенства (5) видно, что ордината будетъ дѣйствительной величиной, пока $|x| \geqq a$. Если же $|x| < a$, то y—мнимая величина и, слѣдовательно, точекъ гиперболы съ абсциссами меньшими a, другими словами, точекъ кривой въ безконечной полосѣ, опирающейся на отрѣзокъ AA_1 (черт. 67), нѣтъ.

3. Построимъ теперь прямыя, выражаемыя уравненіями

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x, \tag{6}$$

и будемъ сравнивать, при однѣхъ и тѣхъ же абсциссахъ, абсолютныя величины ординатъ точекъ этихъ прямыхъ съ соотвѣтствующими ординатами точекъ гиперболы.



Черт. 67.

Прямая, выражаемая первымъ уравненіемъ (6), проходитъ черезъ начало координатъ (черт. 67), точку $P(a, b)$ и точку $R(-a, -b)$, такъ какъ координаты этихъ точекъ удовлетворяютъ уравненію

$$y=\frac{b}{a}x.$$

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что прямая, выраженная уравненіемъ

$$y=-\frac{b}{a}x,$$

проходитъ черезъ начало координатъ и точки $Q(-a,b)$ и $S(a,-b)$.

Обозначимъ черезъ Y ординату какой-нибудь точки одной изъ этихъ прямыхъ, а черезъ y соотвѣтствующую ординату точки гиперболы. Очевидно, при $|x| > a$ имѣетъ мѣсто неравенство:

$$x^2 > x^2 - a^2$$

или

$$|x| > \sqrt{x^2 - a^2};$$

слѣдовательно,

$$\left|\frac{b}{a}x\right| > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

или

$$|Y| > |y|,$$

т.-е. ординаты точекъ этихъ прямыхъ всегда больше по абсолютной величинѣ ординатъ соотвѣтственныхъ точекъ гиперболы.

Это неравенство показываетъ, что точки гиперболы расположены внутри двухъ вертикальныхъ угловъ UOT и VOW, а принимая во вниманіе, что въ безконечной полосѣ, опирающейся на отрѣзокъ AA_1, точекъ гиперболы нѣтъ, заключаемъ, что гипербола расположена внутри безконечныхъ областей $UPST$ и $VQRW$.

4. Теперь изслѣдуемъ вопросъ, какъ близко подходитъ гипербола къ границамъ указанныхъ областей, т.-е. если $KL = Y$ и $KM = y$, то какъ велика разность ML соотвѣтственныхъ ординатъ и какъ эта разность мѣняется при увеличеніи абсциссы. Согласно обозначенію имѣемъ:

$$ML = KL - KM = Y - y,$$

при чемъ въ силу симметріи расположенія гиперболы относительно осей координатъ достаточно изслѣдовать вопросъ лишь для первой четверти, т.-е. для той части плоскости, которая расположена между положительными направленіями осей. Считая поэтому x, y и Y положительными, будемъ имѣть:

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left[x - \sqrt{x^2 - a^2}\right]. \qquad (7)$$

При увеличеніи абсциссы x эта разность измѣняется, но по выраженію (7) трудно судить, увеличивается она или уменьшается. Поэтому преобразуемъ предварительно полученное выраженіе, умно-

жая и раздѣляя его на сопряженное выраженіе $x+\sqrt{x^2-a^2}$:

$$Y-y=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})\,(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}$$

т.-е.

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\,. \tag{8}$$

По мѣрѣ увеличенія x знаменатель выраженія (8) увеличивается (мы разсматриваемъ положительныя значенія x), а числитель остается постояннымъ. Слѣдовательно, разность ординатъ $Y-y$ или отрѣзокъ ML безгранично уменьшается и, стало быть, точка гиперболы M по мѣрѣ увеличенія абсциссы постоянно приближается къ прямой OU и достигаетъ этой прямой только въ безконечности, такъ какъ тогда $Y-y$ обращается въ нуль:

$$\lim_{x=\infty}(Y-y)=\lim\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0.$$

Прямая, къ которой кривая постепенно приближается, но достигаетъ только въ безконечности, называется асимптотой этой кривой (стр. 41). Гипербола имѣетъ двѣ асимптоты UW и VT (черт. 67).

Гипербола, какъ видно изъ ея уравненія, пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкахъ $A(a,\ 0)$ и $A_1(-a,\ 0)$ а оси ординатъ совсѣмъ не пересѣкаетъ, такъ какъ для y, при $x=0$, получаются мнимыя величины:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{-a^2},\quad \text{или}\quad y=\pm b\sqrt{-1}\,.$$

Отрѣзокъ AA_1 называется дѣйствительною осью, BB_1— мнимою осью, а вмѣстѣ—главными осями гиперболы.

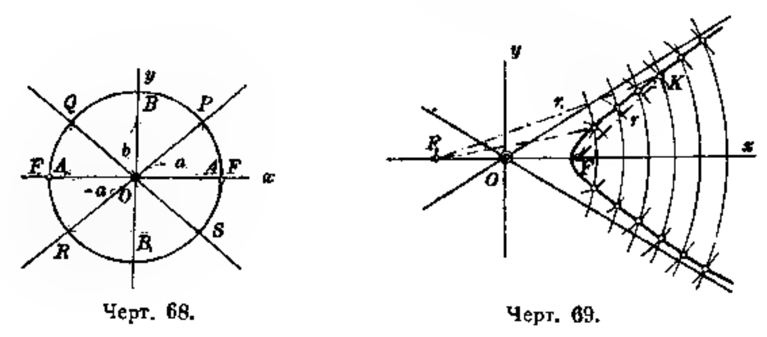
§ 7. **Построеніе гиперболы.** Пусть уравненіе гиперболы намъ дано:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Какъ построить эту гиперболу, ея асимптоты и фокусы?

Зная оси гиперболы $2a$ и $2b$, легко построить прямоугольникъ $PQRS$ (черт. 68), стороны котораго равны осямъ гиперболы и который расположенъ симметрично относительно осей координатъ. Діагонали этого прямоугольника будутъ асимптотами гиперболы, такъ какъ вершины его имѣютъ координаты: (a, b), $(-a, b)$, $(-a, -b)$ и $(a, -b)$, которыя соотвѣтственно удовлетворяютъ уравненіямъ асимптотъ (6).

Такъ какъ OP, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника OAP съ катетами a и b, равна $\sqrt{a^2+b^2}$, т.-е. c, то для построенія



Черт. 68. Черт. 69.

фокусовъ можно описать около прямоугольника $PQRS$ кругъ точки пересѣченія F и F_1 этого круга съ осью абсциссъ и будутъ фокусами гиперболы

Для построенія точекъ гиперболы можно воспользоваться уравненіемъ ея

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Давая различныя значенія абсциссѣ x, вычисляемъ соотвѣтственныя значенія ординаты. Такимъ образомъ можно имѣть координаты сколькихъ угодно точекъ гиперболы и по нимъ строить эти точки.

Можно также воспользоваться опредѣленіемъ гиперболы, по которому разность разстояній точекъ ея до фокусовъ равна $2a$:

$$r_1-r=2a.$$

Легко найти сколько угодно паръ отрѣзковъ r и r_1, удовлетворяющихъ этому условію. Для этого нужно только взять на оси Ox какую-нибудь точку M внѣ отрѣзка $AA_1=2a$: AM и A_1M и будутъ искомыми радіусами векторами. Два круга, описанные одинъ радіусомъ r изъ центра F (черт. 69), другой радіусомъ r_1 изъ

центра F_1, пересѣкутся въ точкахъ гиперболы Такимъ образомъ, мѣняя r и соотвѣтственно r_1, можно построить сколько угодно точекъ гиперболы.

§ 8. **Директрисы эллипса.** Прежде чѣмъ приступить къ выводу уравненія третьяго коническаго сѣченія —параболы, разсмотримъ теперь тѣ свойства эллипса и гиперболы, которыя могли бы служить инымъ опредѣленіемъ этихъ кривыхъ, опредѣленіемъ аналогичнымъ опредѣленію параболы (§ 1, стр. 77, 78). Таковы именно свойства директрисъ коническихъ сѣченій. Разсмотримъ сначала въ этомъ отношеніи эллипсъ.

Радіусомъ-векторомъ эллипса называется отрѣзокъ прямой, соединяющій фокусъ съ какой-нибудь точкой эллипса. Пусть $P(x, y)$ (черт. 56) — какая-нибудь точка эллипса. Опредѣлимъ радіусы-векторы $FP = r$ и $F_1P = r_1$ какъ функціи одной только абсциссы точки P.

По формулѣ разстоянія имѣемъ:

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2, \quad r^2 = (x - c)^2 + y^2. \tag{1}$$

Вычитая почленно второе изъ этихъ равенствъ изъ перваго, мы исключимъ y и получимъ:

$$r_1^2 - r^2 = 4cx. \tag{2}$$

Кромѣ того, по опредѣленію эллипса

$$r_1 + r = 2a. \tag{3}$$

Изъ уравненій (2) и (3) можно опредѣлить радіусы-векторы черезъ a, c и x. Раздѣлимъ почленно равенство (2) на (3):

$$\frac{r_1^2 - r^2}{r_1 + r} = \frac{4cx}{2a},$$

откуда

$$r_1 - r = 2\frac{c}{a}x, \quad \text{или} \quad r_1 - r = 2ex, \tag{4}$$

гдѣ e эксцентрицитетъ эллипса.

Теперь для опредѣленія радіусовъ-векторовъ мы имѣемъ два уравненія первой степени:

$$r_1 + r = 2a \quad \text{и} \quad r_1 - r = 2ex,$$

откуда

$$r = a - ex, \quad r_1 = a + ex. \tag{5}$$

Выраженія (5) для радіусовъ-векторовъ замѣчательны тѣмъ, что они раціональны относительно абсциссы точки эллипса, между тѣмъ какъ тѣ же радіусы-векторы по формуламъ разстоянія выражаются ирраціонально черезъ координаты точки эллипса:

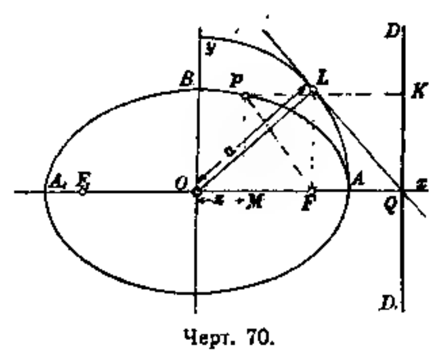
$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Такимъ образомъ исключеніе ординаты y въ этихъ выраженіяхъ ведетъ къ тому, что корень квадратный извлекается изъ подкоренного выраженія. Такимъ свойствомъ не обладаютъ разстоянія точекъ эллипса отъ какой-либо иной точки плоскости, не совпадающей съ фокусомъ его.

Выраженія (5) для радіусовъ-векторовъ необходимы намъ для вывода свойствъ директрисъ эллипса.

Директрисами эллипса называются двѣ прямыя, параллельныя оси ординатъ и отстоящія отъ нея на разстояніи равномъ $\frac{a^2}{c}$ или, такъ какъ $\frac{c}{a} = e$, на разстояніи $\frac{a}{e}$. Директрисы эллипса расположены внѣ его, ибо

$$e = \frac{c}{a} < 1, \quad \text{и} \quad \frac{a}{e} > a.$$



Черт. 70.

Пусть директриса пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкѣ Q:

$$OQ = \frac{a^2}{c},$$

откуда

$$a^2 = OQ \cdot c.$$

Такимъ образомъ, a является среднимъ геометрическимъ между c и OQ, что даетъ возможность построить директрисы эллипса. Для этого нужно возставить изъ фокуса F перпендикуляръ къ большой оси до пересѣченія въ точкѣ L съ описаннымъ кругомъ (черт. 70); касательная къ этому кругу въ точкѣ L и отмѣтитъ на оси абсциссъ точку Q. Въ самомъ дѣлѣ, радіусъ OL, касательная въ точкѣ L къ

описанному кругу и ось абсциссъ образуютъ прямоугольный треугольникъ, у котораго одинъ катетъ, выходящій изъ начала координатъ, равенъ a, а прилежащій отрѣзокъ гипотенузы до высоты равенъ c; слѣдовательно, гипотенуза его равняется $\frac{a^2}{c}$.

Пусть $P(x, y)$—какая-нибудь точка эллипса, PF—ея разстояніе до фокуса F, а PK—разстояніе до директрисы DD_1. Опредѣлимъ, чему равно отношеніе этихъ разстояній $PF:PK$. По предыдущему (5)

$$PF = a - ex. \tag{6}$$

Кромѣ того, какъ видимъ изъ чертежа 70,

$$PK = MQ = OQ - OM = \frac{a}{e} - x$$

или

$$PK = \frac{a - ex}{e}. \tag{7}$$

Изъ равенствъ (6) и (7) слѣдуетъ:

$$\frac{PF}{PK} = (a - ex) : \frac{a - ex}{e} = e.$$

Подобнымъ же свойствомъ обладаетъ и другая директриса съ соотвѣтствующимъ ей фокусомъ.

Такимъ образомъ **отношеніе разстояній любой точки эллипса до фокуса и до соотвѣтствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно эксцентрицитету эллипса.**

Вопросъ. Кругъ частный случай эллипса. Гдѣ директрисы круга?

§ 9. **Директрисы гиперболы.** Двѣ прямыя въ плоскости гиперболы, параллельныя оси ординатъ и отстоящія отъ нея на разстояніи $\frac{a^2}{c}$, называются директрисами гиперболы. Эти прямыя обладаютъ такими же свойствами по отношенію къ гиперболѣ, какъ и директрисы эллипса по отношенію къ эллипсу.

Пусть $P(x, y)$ (черт. 71) какая-нибудь точка гиперболы. Опредѣлимъ радіусы-векторы $FP = r$ и $F_1P = r_1$, какъ функціи одной только абсциссы точки P. По формулѣ разстоянія имѣемъ

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2, \quad r^2 = (x - c)^2 + y^2, \tag{1}$$

откуда

$$r_1^2 - r^2 = 4cx. \tag{2}$$

Кромѣ того, по опредѣленію гиперболы, предполагая, что точка P лежитъ на правой вѣтви, имѣемъ

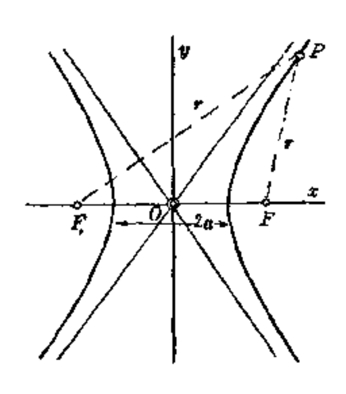
$$r_1 - r = 2a. \tag{3}$$

Раздѣливъ почленно равенство (2) на (3), получимъ

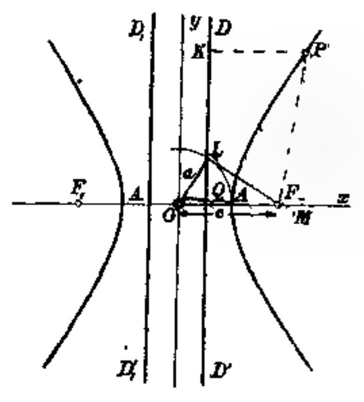
$$r_1 + r = 2\frac{c}{a}x$$

или

$$r_1 + r = 2ex; \tag{4}$$



Черт. 71



Черт 72.

Изъ уравненій (3) и (4), т.-е

$$r_1 - r = 2a, \quad r_1 + r = 2ex$$

имѣемъ

$$r = ex - a, \quad r_1 = ex + a \text{ *)}. \tag{5}$$

Такимъ образомъ разстоянія точки гиперболы отъ фокусовъ такъ же, какъ и разстоянія точки эллипса отъ его фокусовъ, выражаются раціонально черезъ абсциссу этой точки.

Построимъ теперь директрисы гиперболы (черт. 72) Директрисы

---

*) Мы разсматривали точки правой вѣтви гиперболы. Для точекъ лѣвой вѣтви вмѣсто (3) имѣли бы $r_1 - r = -2a$ и вмѣсто (4) $r_1 + r = -2ex$. Слѣдовательно, для точекъ лѣвой вѣтви будемъ имѣть

$$r = -ex + a, \quad r_1 = -ex - a$$

расположены между вѣтвями гиперболы, ибо

$$e=\frac{c}{a}>1 \quad \text{и} \quad \frac{a^2}{c}=\frac{a}{e}<a.$$

Построеніе директрисъ гиперболы, какъ слѣдуетъ изъ опредѣленія ихъ, аналогично построенію директрисъ эллипса. На дѣйствительной оси гиперболы, какъ на діаметрѣ, описываемъ кругъ и изъ фокусовъ къ этому кругу проводимъ касательныя; перпендикуляры, опущенные изъ точекъ прикосновенія на дѣйствительную ось, и будутъ искомыми директрисами.

Дѣйствительно, въ образовавшемся при этомъ построеніи прямоугольномъ треугольникѣ OLF катетъ $OL=a$, а гипотенуза $OF=c$ и потому

$$a^2=OQ\cdot c,$$

откуда

$$OQ=\frac{a^2}{c}.$$

Пусть $P(x,\ y)$—какая-нибудь точка гиперболы, PF—ея разстояніе до фокуса, а KP—разстояніе до директрисы DD'. Опредѣлимъ, чему равно отношеніе этихъ разстояній $PF:KP$. По предыдущему, предполагая, что точка P лежитъ на правой вѣтви, имѣемъ

$$PF=ex-a.$$

Кромѣ того, какъ видно изъ чертежа 72,

$$KP=QM=OM-OQ$$

или

$$KP=x-\frac{a}{e}=\frac{ex-a}{e};$$

слѣдовательно,

$$\frac{PF}{KP}=(ex-a):\frac{ex-a}{e}=e.$$

Если бы точка P принадлежала лѣвой вѣтви, результатъ былъ бы тотъ же. Подобнымъ же свойствомъ обладаетъ и другая директриса съ соотвѣтствующимъ ей фокусомъ.

Такимъ образомъ, **отношеніе разстояній любой точки гиперболы до фокуса и до соотвѣтствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно эксцентриситету гиперболы.**

§ 10. **Парабола.** Эллипсъ и гиперболу мы опредѣлили какъ геометрическія мѣста точекъ, для которыхъ сумма или разность радіусовъ-векторовъ постоянна:

$$r_1 + r = 2a \qquad \text{(для эллипса);}$$

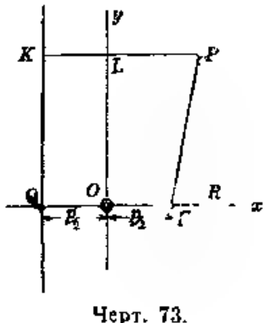
$$r - r_1 = 2a, \quad \text{или} \quad r_1 - r = 2a \qquad \text{(для гиперболы).}$$

Изслѣдуя свойства этихъ кривыхъ, мы нашли, что ихъ можно разсматривать, какъ геометрическія мѣста точекъ, разстоянія которыхъ отъ фокуса и соотвѣтствующей директрисы сохраняютъ постоянное отношеніе. Это отношеніе равно эксцентрицитету кривой и для эллипса меньше единицы, а для гиперболы больше единицы:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1 \qquad \text{(для эллипса);}$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1 \qquad \text{(для гиперболы).}$$

Естественно возникаетъ вопросъ, что за кривую представляетъ геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ предыдущее отношеніе равно единицѣ, иначе, геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ данной точки и данной прямой? Кривая, такъ опредѣленная, какъ уже намъ извѣстно (§ 1), называется п а р а б о л о й. Составимъ уравненіе, которому должны удовлетворять координаты любой точки этой кривой.



Черт. 73.

Пусть F (черт. 73) —данная точка (фокусъ) отстоитъ отъ данной прямой QK (директрисы) на разстояніи $QF = p$. Величина p называется параметромъ параболы. За ось абсциссъ примемъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки F на директрису съ положительнымъ направленіемъ отъ директрисы къ фокусу, а за ось ординатъ — прямую, параллельную директрисѣ и дѣлящую QF въ точкѣ O пополамъ. При такомъ выборѣ осей фокусъ F имѣетъ координаты $\frac{p}{2}$ и 0.

Пусть $P(x, y)$ одна изъ точекъ параболы. По условію

$$PF = KP. \tag{1}$$

По формулѣ разстоянія имѣемъ

$$PF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Кромѣ того, какъ слѣдуетъ изъ чертежа 73,

$$KP = KL + LP;$$

но

$$KL = \frac{p}{2}, \quad LP = OR = x;$$

слѣдовательно,

$$KP = \frac{p}{2} + x. \tag{3}$$

Подставляя въ равенство (1) значенія PF и PK, данныя соотвѣтственно формулами (2) и (3), мы и получимъ уравненіе параболы:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x. \tag{4}$$

Приведемъ это уравненіе къ болѣе простому виду, освобождая его отъ радикаловъ:

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2$$

или

$$\frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2,$$

откуда

$$y^2 = 2px. \tag{5}$$

Уравненіе (5) и есть въ простѣйшемъ видѣ искомое уравненіе параболы; координаты любой точки этой кривой должны удовлетворять этому уравненію.

§ 11. **Изслѣдованіе уравненія параболы.** Изслѣдуемъ выведенное уравненіе, чтобы составить представленіе о видѣ этой кривой.

1. Извлекая изъ обѣихъ частей уравненія (5) квадратный корень, получимъ:

$$y = \pm\sqrt{2px}. \tag{5'}$$

Полагаемъ p величиной положительной. Въ такомъ случаѣ y будетъ дѣйствительной величиной только при положительныхъ значеніяхъ x. Это указываетъ намъ на то, что парабола расположена только вправо отъ оси ординатъ. Влѣво отъ оси ординатъ точекъ этой кривой нѣтъ.

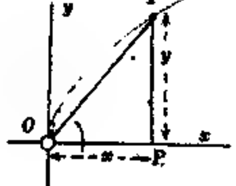
2. Изъ уравненія (5) видимъ, что каждому положительному значенію x соотвѣтствуютъ два значенія y, равныхъ по абсолютной величинѣ, но разныхъ по знаку. Слѣдовательно, парабола расположена симметрично относительно оси абсциссъ.

3. Такъ какъ при $x=0$ и $y=0$, то парабола проходитъ черезъ начало координатъ. Съ возрастаніемъ x ордината также возрастаетъ по абсолютной величинѣ и возрастаетъ именно пропорціонально корню квадратному изъ x:

$$y=\sqrt{2p}\,.\sqrt{x}.$$

Отсюда же слѣдуетъ, что

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}.$$



Черт. 74.

Пусть $P(x, y)$ (черт. 74)—точка параболы. Отношеніе $\frac{y}{x}$ есть тангенсъ угла наклона прямой OP къ оси абсциссъ:

$$tg\ P_1OP=\frac{y}{x}.$$

При безграничномъ уменьшеніи x сѣкущая OP приближается къ касательной параболы въ точкѣ O. Но

$$\lim_{x=0}\frac{y}{x}=\lim_{x=0}\frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}=\infty,$$

или

$$\lim tg\ P_1OP=\infty.$$

Слѣдовательно, касательная параболы въ точкѣ O перпендикулярна къ оси абсциссъ.

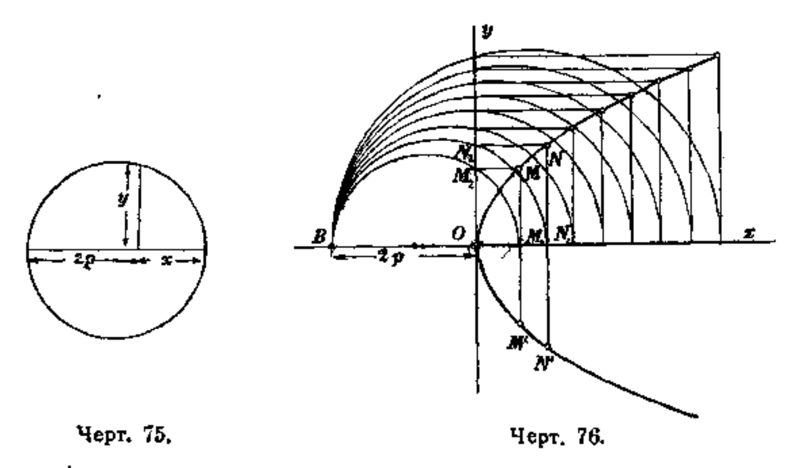
Такимъ образомъ парабола, проходя черезъ начало координатъ, касается оси ординатъ и простирается далѣе до безконечности въ положительномъ направленіи оси абсциссъ, въ то же время удаляясь отъ нея въ ту и другую сторону (черт. 76).

Примѣчаніе. Каждая вѣтвь гиперболы также простирается до безконечности, въ то же время удаляясь отъ оси абсциссъ въ ту и другую сторону. Но изгибъ гиперболы иной, такъ какъ возрастаніе ея ординатъ пропорціонально не корню квадратному изъ x, а корню квадратному изъ разности квадрата x и квадрата a:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

При значеніяхъ x, по абсолютной величинѣ значительно превышающихъ a, величина $\sqrt{x^2 - a^2}$ почти равна x и потому y растетъ почти пропорціонально x. Въ зависимости отъ этого вѣтви гиперболы, простираясь до безконечности, асимптотически приближаются къ двумъ прямымъ (асимптотамъ), между тѣмъ какъ парабола не имѣетъ асимптотъ.

§ 12. **Построеніе точекъ параболы.** Первый способъ, есть знакомый уже намъ способъ вычисленія, при которомъ, давая произвольныя значенія x, вычисляемъ соотвѣтственныя значенія для y и строимъ такимъ образомъ точки.



Черт. 75. Черт. 76.

Второй способъ. Для построенія точекъ параболы можно воспользоваться уравненіемъ $y = \sqrt{2px}$, изъ котораго видно, что ордината y есть среднее геометрическое двухъ отрѣзковъ $2p$ и x (черт. 75):

$$y^2 = 2px;$$

откуда

$$2p \cdot y = y \; x.$$

Отъ точки O влѣво откладываемъ отрѣзокъ $OB = 2p$ (черт. 76). Опи-

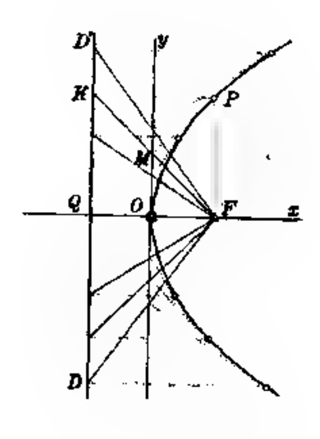
сываемъ затѣмъ рядъ окружностей, съ центрами на оси абсциссъ и проходящихъ черезъ точку B. Эти окружности пересѣкутъ второй разъ ось абсциссъ въ точкахъ M_1. N_1 и т. д., служащихъ концами абсциссъ OM_1, ON_1 и т. д. строимыхъ точекъ параболы, а на оси ординатъ отмѣтятъ среднія геометрическія отрѣзковъ $2p$ и x, т.-е. соотвѣтственныя абсциссамъ ординаты точекъ параболы. По абсциссамъ OM_1, ON_1 и т. д. и соотвѣтственнымъ ординатамъ OM_2, ON_2 и т. д. строимъ точки параболы M, N и т. д. Симметричныя точки M', N' и т. д. относительно оси абсциссъ принадлежатъ той же параболѣ.

Третій способъ построенія точекъ параболы вытекаетъ изъ самаго опредѣленія этой кривой. Въ самомъ дѣлѣ, разстоянія точки P параболы (черт. 77) отъ фокуса и директрисы равны и треугольникъ PKF такимъ образомъ равнобедренный.

$$PF = PK.$$

Далѣе FK дѣлится осью ординатъ въ точкѣ M пополамъ, ибо перпендикуляръ FQ изъ фокуса на директрису дѣлится этою осью пополамъ:

$$FM = MK.$$



Черт. 77.

Слѣдовательно, прямая PM перпендикулярна къ прямой FK.

Такимъ образомъ точка параболы P лежитъ на пересѣченіи перпендикуляра MP къ прямой FK, возставленнаго изъ точки M, и прямой KP, перпендикулярной къ директрисѣ или иначе — параллельной оси абсциссъ. Отсюда и вытекаетъ способъ построенія скольких угодно точекъ параболы.

Изъ фокуса F (черт. 77) проводимъ произвольную прямую, которая опредѣляетъ пересѣченіемъ съ осью ординатъ точку M, а съ директрисой точку K. Изъ точки K проводимъ прямую, параллельную оси абсциссъ, а изъ точки M —прямую, перпендикулярную къ FK. Эти прямыя пересѣкутся въ точкѣ P, которая и будетъ точкой параболы. Всякая иная точка P' прямой MP одинаково отстоитъ отъ точекъ F и K, но прямая $P'K$ не перпендикулярна къ директрисѣ и значитъ точка P', ближе къ директрисѣ, чѣмъ

къ фокусу. Слѣдовательно, прямая MP имѣетъ съ параболой только одну общую точку P и потому касается параболы въ этой точкѣ. Такимъ образомъ этотъ способъ даетъ возможность построить и сколько угодно касательныхъ параболы.

§ 13. **Делійская задача.** Обратимся въ заключеніе къ Делійской задачѣ, упомянутой въ началѣ этой главы, къ задачѣ удвоенія куба:

$$x^3 = 2a^3.$$

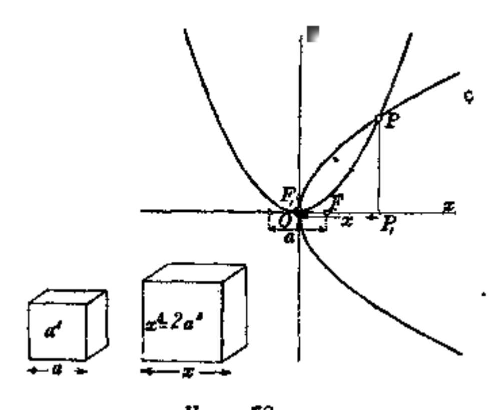
Эту задачу Гиппократъ изъ Хіоса свелъ къ построенію двухъ среднихъ геометрическихъ между a и $2a$:

$$a:x = x:y = y:2a.$$

Неизвѣстныя x и y удовлетворяютъ, какъ мы уже видѣли (стр. 74), двумъ уравненіямъ

$$x^2 = ay \quad \text{и} \quad y^2 = 2ax.$$

Теперь мы можемъ сказать, что каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности, если разсматривать x и y какъ координаты точки, представляетъ параболу: второе уравненіе — параболу съ пара-



Черт. 78.

метромъ a (черт. 78) и расположенную относительно осей такъ, какъ мы изучили эту кривую, первое—параболу, касающуюся оси абсциссъ, съ параметромъ $\frac{a}{2}$ и осью, направленной по оси ординатъ. Координаты точки пересѣченія этихъ параболъ, не лежащей въ началѣ координатъ, и представляютъ рѣшеніе задачи Гиппократа, а слѣдовательно, и задачи делійской.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Составить уравненіе, которому удовлетворяютъ координаты точекъ (x, y) отстоящихъ отъ данной точки $M(4,2)$ на разстояніи, равномъ 5 единицамъ. Система координатъ прямоугольная.

Отвѣтъ: $x^2 + y^2 - 8x - 5 = 0$ (кругъ).

2. Составить уравненіе, которому удовлетворяютъ координаты точекъ, одинаково отстоящихъ отъ оси ординатъ прямоугольной системы координатъ и точки $F(5,0)$.

Отвѣтъ: $y^2 - 10x + 25 = 0$ (парабола).

3. Составить уравненіе, которому удовлетворяютъ координаты точекъ, разстоянія которыхъ отъ точекъ $F(4,0)$ и $F_1(-4, 0)$ составляютъ постоянную сумму, равную 10 единицамъ

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (эллипсъ).

4. Составить уравненіе, которому удовлетворяютъ координаты точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ $F(5,0)$ и $F_1(-5,0)$ составляютъ постоянную разность, равную 8 единицамъ.

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (гипербола).

5. Написать уравненіе эллипса, съ центромъ въ началѣ координатъ и осями, направленными по осямъ координатъ, который проходилъ бы черезъ точки $P\left(2, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и $Q\left(1, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

6. Каково уравненіе эллипса относительно его осей, если разстоянія одного изъ фокусовъ до вершинъ большой оси равны 2 и 8 единицамъ?

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

7. Наименьшее разстояніе земли отъ солнца относится къ наибольшему, какъ 29 : 30. Опредѣлить эксцентрицитетъ эклиптики.

Отвѣтъ: $e = \frac{1}{59}$.

8. Чему равенъ эксцентрицитетъ эллипса, если его малая ось видна подъ прямымъ угломъ изъ фокуса?

Отвѣтъ. $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

9. Опредѣлить сторону квадрата, вписаннаго въ эллипсъ.

Отвѣтъ: $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

10. Разстояніе между директрисами эллипса 12,5; эксцентрицитетъ 0,8. Написать уравненіе эллипса.

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

√ 11. Концы отрѣзка постоянной длины движутся по осямъ координатъ. Какую линію опишетъ при этомъ точка отрѣзка, дѣлящая его на двѣ части a и b?

Отвѣтъ: эллипсъ, уравненіе котораго $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

12. Написать уравненіе гиперболы, съ центромъ въ началѣ координатъ и осями, направленными по осямъ координатъ, которая проходила бы черезъ точки $P(2\sqrt{5},\ 2\sqrt{3})$ и $Q(5,4)$.

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

13. Опредѣлить e и уголъ между асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Отвѣтъ: $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; $2\varphi = 2arctg\ \frac{2}{\sqrt{5}}$.

14. Опредѣлить сторону квадрата, вписаннаго въ гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Отвѣтъ: $13^1/_9$.

15. Разстояніе между директрисами гиперболы $= 6,4$, а $e = 1,25$. Написать уравненіе этой гиперболы.

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

16. Двѣ вершины A и B треугольника ABC лежатъ въ вершинахъ гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а третья вершина C движется по гиперболѣ. Опредѣлить

геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія медіанъ этого треугольника.

Отвѣтъ: $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} = 1.$

17. Написать уравненіе гиперболы, фокусы которой имѣютъ координаты $F(a,a)$ и $F_1(-a, -a)$, а дѣйствительная ось равна $2a$.

Отвѣтъ: $xy = \frac{a^2}{2}$.

18. Составить уравненіе параболы, вершина которой въ началѣ координатъ, а ось направлена по оси абсциссъ въ положительную сторону и которая проходитъ черезъ точку $M(3,6)$.

Отвѣтъ: $y^2 = 12x$.

19. Данъ эллипсъ съ полуосями $a = 5$ и $b = 3$. Гдѣ лежатъ точки $P(1, -3)$, $Q(-4, 1)$, $S(3,2; 4)$—внутри эллипса, внѣ эллипса или на эллипсѣ?

20. Опредѣлить координаты точекъ пересѣченія эллипса

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

съ биссектрисою координатнаго угла.

21. Кругъ есть частный случай эллипса. Эллипсъ имѣетъ двѣ директрисы. Гдѣ будутъ директрисы круга?

22. Даны асимптоты и вершины гиперболы. Построить фокусы гиперболы.

23. Дана гипербола уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Показать, что координаты *любой точки той или другой асимптоты* удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

24. Для эллипса $a > b$, гдѣ $2a$ та ось, на которой лежатъ фокусы. Обязательно ли такое соотношеніе *для полуосей a и b гиперболы*?

25. Построить гиперболу, данную уравненіемъ

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Опредѣлить положеніе ея фокусовъ и асимптотъ.

26. Разстояніе вершины параболы отъ фокуса равно 3. Каково уравненіе параболы?

27. Какая кривая представляется уравненіемъ

$$x^2 = 2py.$$

28. Уравненіе параболы можно представить въ видѣ

$$y^2 - 2px = 0.$$

Какъ характеризовать аналитически точки, лежащія внутри параболы, и точки, лежащія внѣ ея?

29. Показать, что геометрическое мѣсто центровъ круговъ, проходящихъ черезъ данную точку и касающихся данной прямой, есть парабола.

30. Какое геометрическое мѣсто занимаютъ центры круговъ, проходящихъ черезъ данную точку A и касающихся даннаго круга съ центромъ въ точкѣ B, въ случаѣ, a) если точка A лежитъ внутри круга (B), b) если точка A лежитъ внѣ круга (B).

31. Дана парабола уравненіемъ

$$y^2 = 3x$$

$$\text{и прямая } \; y = kx + 1.$$

Опредѣлить угловой коэффиціентъ k такъ, чтобы прямая касалась параболы.

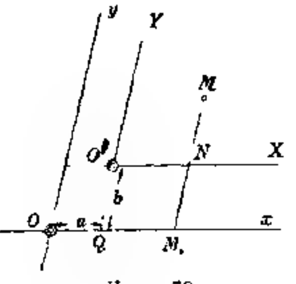
ГЛАВА V.

ОЧЕРКЪ ОБЩЕЙ ТЕОРІИ КРИВЫХЪ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. **Преобразованіе координатъ.** Мы выбирали при выводѣ уравненій коническихъ сѣченій такія положенія координатныхъ осей, при которыхъ уравненія этихъ кривыхъ имѣютъ простѣйшій видъ; при иномъ положеніи осей уравненія получились бы болѣе сложныя. Если кривая дана уравненіемъ болѣе или менѣе сложнымъ, то, измѣняя положеніе осей координатъ, мы тѣмъ самымъ измѣняемъ и уравненіе кривой, и является теперь вопросъ, какъ выбрать новыя оси, чтобы уравненіе кривой приняло болѣе простой видъ. Уравненіе кривой, отнесенной къ новымъ осямъ, можно получить изъ даннаго, если найти сначала формулы, по которымъ координаты точки для прежняго положенія осей выражаются черезъ ея координаты для новаго положенія.

1. Параллельное перенесеніе осей. Положимъ, что оси новой системы координатъ соотвѣтственно параллельны осямъ прежней системы.

$$O'X \parallel Ox, \quad O'Y \parallel Oy.$$



Черт. 79.

Такъ какъ направленіе осей не измѣняется, то новая система координатъ вполнѣ опредѣляется положеніемъ новаго начала. Пусть a и b — координаты новаго начала O' относительно прежней системы и пусть какая нибудь точка M имѣетъ по прежней системѣ координаты x, y, а по новой X, Y.

$$OQ = a, \quad QO' = b, \quad OM_1 = x, \quad M_1M = y, \quad O'N = X, \quad NM = Y.$$

Точки M_1, N, M лежатъ на одной прямой (черт. 79); точно

также и точки O, Q, M_1 лежатъ на одной прямой. Слѣдовательно,

$$OM_1 = OQ + QM_1 = OQ + O'N,$$

$$M_1M = M_1N + NM = QO' + NM.$$

Такимъ образомъ при всякомъ параллельномъ перенесеніи осей имѣемъ

$$OM_1 = OQ + O'N \quad \text{и} \quad M_1M = QO' + NM,$$

или

$$x = a + X, \qquad y = b + Y. \tag{1}$$

Примѣръ. Кривая дана уравненіемъ

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0.$$

1. Какъ измѣнится уравненіе этой кривой при параллельномъ перенесеніи осей координатъ съ помѣщеніемъ новаго начала въ точку $O'(a, b)$?

2 Подобрать a и b такъ, чтобы преобразованное уравненіе не содержало первыхъ степеней текущихъ координатъ.

Рѣшеніе. 1. Подставляемъ въ данное уравненіе вмѣсто текущихъ координатъ x, y по формуламъ преобразованія (1) выраженія $a + X$ и $b + Y$:

$$(a + X)^2 + (b + Y)^2 + 6(a + X) - 10(b + Y) + 18 = 0,$$

или

$$X^2 + Y^2 + (2a + 6)X + (2b - 10)Y + (a^2 + b^2 + 6a - 10b + 18) = 0.$$

2. По требованію задачи члены, содержащіе первыя степени текущихъ координатъ, должны отсутствовать, т.-е. коэффиціенты ихъ должны быть равны нулю:

$$2a + 6 = 0, \qquad 2b - 10 = 0;$$

отсюда

$$a = -3, \qquad b = 5,$$

при такихъ значеніяхъ a и b уравненіе кривой принимаетъ видъ

$$X^2 + Y^2 + (9 + 25 - 18 - 50 + 18) = 0,$$

или

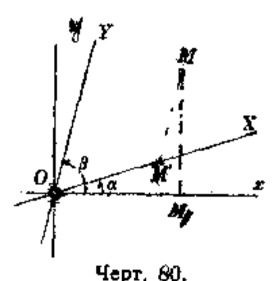
$$X^2 + Y^2 = 16,$$

т.-е. данная кривая есть кругъ съ центромъ въ точкѣ $(-3, 5)$ по прежней системѣ и радіусомъ, равнымъ 4. Такимъ образомъ параллельное перенесеніе осей даетъ возможность опредѣлить координаты центра круга и радіусъ его (ср. гл III. § 1).

2. Измѣненіе направленія осей. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда начало координатъ не переносится, а измѣняется лишь направленіе осей.

Пусть новая ось OX наклонена къ прежней оси абсциссъ подъ угломъ α, а новая ось OY подъ угломъ β (черт. 80) и пусть какая нибудь точка M имѣетъ по первоначальной системѣ координаты x, y, а по новой X, Y:

$$OM_1 = x,\quad M_1M = y,\quad OM' = X,\quad M'M = Y.$$



Черт. 80.

Формулы, выражающія x, y черезъ X, Y, мы получимъ, проектируя ломаныя OM_1M и $OM'M$ на ось Ox и потомъ на ось Oy.

Проекція ломаной линіи равняется суммѣ проекцій отдѣльныхъ ея звеньевъ, а проекціи на одну и ту же ось двухъ ломаныхъ съ одинаковыми концами равны между собой. Слѣдовательно,

$$\text{пр}_x\, OM_1M = \text{пр}_x\, OM'M \quad \text{и} \quad \text{пр}_y\, OM_1M = \text{пр}_y\, OM'M$$

Но

$$\text{пр}_x\, OM_1M = \text{пр}_x\, x + \text{пр}_x\, y = x,$$

$$\text{пр}_x\, OM'M = \text{пр}_x\, X + \text{пр}_x\, Y = X\cos\alpha + Y\cos\beta.$$

Слѣдовательно,

$$x = X\cos\alpha + Y\cos\beta.$$

Далѣе

$$\text{пр}_y\, OM_1M = \text{пр}_y\, x + \text{пр}_y\, y = y,$$

$$\text{пр}_y\, OM'M = \text{пр}_y\, X + \text{пр}_y\, Y = X\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + Y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= X\sin\alpha + Y\sin\beta.$$

Слѣдовательно,

$$y = X\sin\alpha + Y\sin\beta.$$

Такимъ образомъ, при измѣненіи направленія осей съ сохраненіемъ начала координатъ первоначальныя координаты какой нибудь точки выражаются слѣдующими формулами.

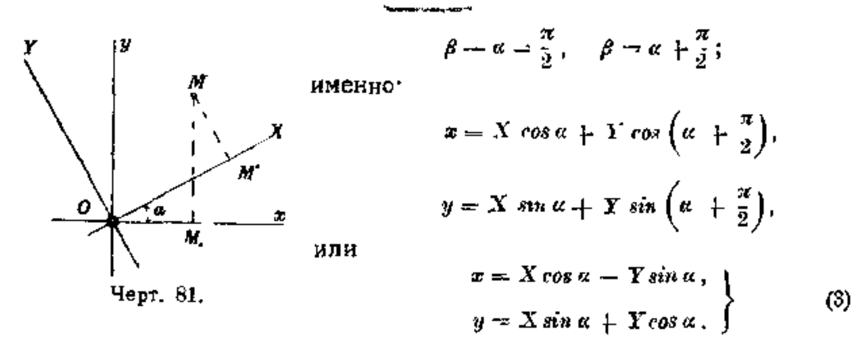
$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha + Y\cos\beta \\ y &= X\sin\alpha + Y\sin\beta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

При установленіи теоремъ о проекціяхъ (стр. 50, 51) подъ угломъ наклона проектируемаго отрѣзка къ оси проекціи мы разумѣли уголъ

между положительнымъ направленіемъ оси проекцій и положительнымъ направленіемъ проектируемаго отрѣзка. При проектированіи ломаной линіи направленіе звеньевъ ея опредѣляется указаніемъ начальной и конечной точекъ ломаной. Въ предыдущемъ выводѣ формулъ (2) мы пользовались углами между положительнымъ направленіемъ осей координатъ, а положительныя направленія осей не всегда совпадаютъ съ положительнымъ направленіемъ звеньевъ проектируемыхъ ломаныхъ, и это несовпаденіе имѣетъ мѣсто именно тогда, когда звенья, какъ координаты, выражаются отрицательными числами. Но, измѣняя знакъ проектируемаго отрѣзка и въ то же время увеличивая или уменьшая уголъ наклона его къ положительному направленію оси проекціи на 180°, мы не измѣняемъ ни знака, ни величины проекціи (ср. гл. II. § 4). Такимъ образомъ формулы (2) имѣютъ мѣсто при всякомъ положеніи точки на плоскости какъ относительно прежней системы координатъ, такъ и относительно новой.

Помощью формулъ (2) между прочимъ можно преобразовать формулу разстоянія (стр. 24) и выраженіе для площади треугольника (стр. 31), выведенныя раньше въ предположеніи прямоугольной системы координатъ, и получить такимъ образомъ соотвѣтствующія формулы для косоугольной системы координатъ.

3. Поворотъ осей. Уголъ между новыми осями, какъ видно изъ чертежа 80, равенъ $\beta - \alpha$. Если новая система координатъ такъ же прямоугольная, какъ и начальная, т. е. если $\beta - \alpha$ уголъ прямой, то мы будемъ имѣть поворотъ осей на уголъ α и соотвѣтствующія формулы преобразованія можно получить изъ формулъ (2), замѣняя уголъ β равнымъ ему угломъ $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (черт. 81):



Черт. 81.

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

именно:

$$x = X\cos\alpha + Y\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = X\sin\alpha + Y\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

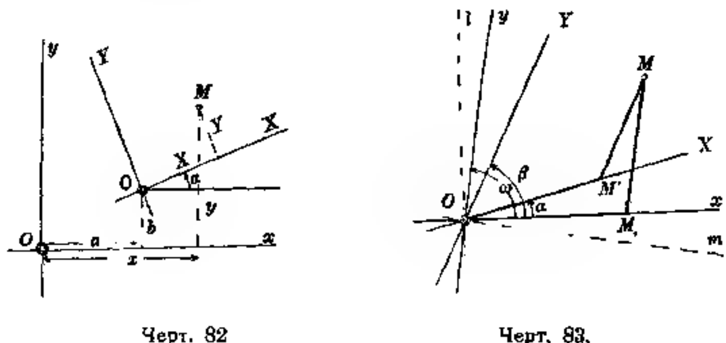
4. Перенесеніе начала и одновременный поворотъ осей. Когда перемѣщается начало координатъ и измѣняется одно-

временно направленіе осей, то соотвѣтствующія формулы преобразованія можно получить, комбинируя формулы (1), (2) или (3). Такъ, если начало прямоугольной системы координатъ перемѣщается въ точку (a, b) и система, оставаясь прямоугольною, повертывается на уголъ α (черт. 82), то формулы преобразованія будутъ имѣть видъ

$$x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \qquad y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \tag{4}$$

5. Тѣ же теоремы о проекціяхъ даютъ возможность составить формулы преобразованія косоугольной системы координатъ въ косоугольную же или прямоугольную.

Если начальная система координатъ косоугольная, то при проектированіи ломаныхъ OM_1M и $OM'M$ (черт. 83), иначе — ломаныхъ (xy) и (XY) за оси проекцій нужно взять не оси координатъ, какъ въ предыдущихъ случаяхъ, а прямыя—назовемъ ихъ l и m—, перпендикулярныя къ первоначальнымъ осямъ, чтобы при проектированіи ломаной (xy) получить выраженіе, содержащее только одну первоначальную координату. При проектированіи ломаныхъ OM_1M или $OM'M$ на оси проекцій l или m нужно знать углы наклона звеньевъ этихъ ломаныхъ къ осямъ проекцій.



Черт. 82 Черт. 83.

Будемъ обозначать углы между прямыми, выходящими изъ одной точки O, буквами, указывающими положительное направленіе сторонъ угла, а порядкомъ этихъ буквъ направленіе углового смѣщенія. Такъ, если a и b два луча, выходящихъ изъ точки O, то (ab) обозначаетъ угловое смѣщеніе луча изъ положенія a въ положеніе b. Но вращающійся около точки O лучъ можно перевести изъ положенія a въ положеніе b двумя путями: или вращая его въ направленіи противоположномъ вращенію часовой стрѣлки, или въ направленіи согласномъ съ этимъ движеніемъ. Чтобы, из-

бѣжать такой двойственности, вообразимъ какой-либо лучъ t, разрѣзающій пучекъ лучей, выходящихъ изъ точки O, такъ, чтобы возможность многократнаго повторенія кругового вращенія была уничтожена. Этотъ лучъ t условимся считать достижимымъ для вращающагося луча лишь въ одномъ направленіи, напр. противоположномъ движенію часовой стрѣлки.

Ко всякимъ тремъ лучамъ такого (разрѣзаннаго однимъ изъ его лучей) пучка a, b, c приложимы тѣ же правила сложенія, какія были установлены для сложенія направленныхъ отрѣзковъ, лежащихъ на одной прямой (стр. 24), именно

$$(ab) + (bc) = (ac) \tag{1}$$

$$(ab) + (ba) = 0 \quad \text{или} \quad (ab) = -(ba) \tag{2}$$

Проектируя ломаныя OM_1M и $OM'M$ на оси l и m, будемъ имѣть:

$$np_m\, OM_1M = np_m\, OM'M \quad \text{и} \quad np_l\, OM_1M = np_l\, OM'M,$$

или

$$np_m\, x + np_m\, y = np_m\, X + np_m\, Y \quad \text{и} \quad np_l\, x + np_l\, y = np_l\, X + np_l\, Y.$$

Опредѣляя проекцію каждаго звена, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x\cos(mx) + y\cos(my) &= X\cos(mX) + Y\cos(mY), \\ x\cos(lx) + y\cos(ly) &= X\cos(lX) + Y\cos(lY). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Но оси проекцій l и m перпендикулярны соотвѣтственно осямъ координатъ. Считая положительнымъ вращеніе противъ движенія часовой стрѣлки, будемъ имѣть

$$(lx) = -\frac{\pi}{2}, \qquad (my) = \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

и

$$\cos(lx) = 0, \qquad \cos(my) = 0.$$

Такимъ образомъ формулы (3) приводятся къ виду:

$$\left.\begin{aligned} x\cos(mx) &= X\cos(mX) + Y\cos(mY), \\ y\cos(ly) &= X\cos(lX) + Y\cos(lY). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Встрѣчающіеся здѣсь углы на основаніи правилъ (1) и (2) можно свести къ даннымъ угламъ ω, α и β, гдѣ

$$\omega = (xy), \quad \alpha = (xX) \quad \text{и} \quad \beta = (xY) \tag{5}$$

Дѣйствительно,

$$(mx) = (my) + (yx) = (my) - (xy) = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

$$(mX) = (mx) + (xX) = \frac{\pi}{2} - \omega + \alpha = \frac{\pi}{2} - (\omega - \alpha),$$

$$(mY) = (mx) + (xY) = \frac{\pi}{2} - \omega + \beta = \frac{\pi}{2} - (\omega - \beta),$$

$$(ly) = (lx) + (xy) = -\frac{\pi}{2} + \omega = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right),$$

$$(lX) = (lx) + (xX) = -\frac{\pi}{2} + \alpha = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$(lY) = (lx) + (xY) = -\frac{\pi}{2} + \beta = -\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Подставляя эти значенія угловъ въ формулѣ (3') и принимая, кромѣ того, во вниманіе, что косинусъ функція четная, т.-е. сохраняющая свою величину при перемѣнѣ знака аргумента, получимъ:

$$x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = X \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\omega - \alpha)\right] + Y \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\omega - \beta)\right],$$

$$y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = X \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + Y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

или

$$\left.\begin{aligned} x \sin\omega &= X \sin(\omega - \alpha) + Y \sin(\omega - \beta), \\ y \sin\omega &= X \sin\alpha + Y \sin\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3''}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{X \sin(\omega - \alpha) + Y \sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}, \\ y &= \frac{X \sin\alpha + Y \sin\beta}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если новая система координатъ прямоугольна, то

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Такимъ образомъ формулы преобразованія косоугольной системы координатъ въ прямоугольную принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{X \sin(\omega - \alpha) - Y \cos(\omega - \alpha)}{\sin\omega}, \\ y &= \frac{X \sin\alpha + Y \cos\alpha}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

§ 2. **Кривая второго порядка.** Уравненія круга, эллипса, гиперболы и параболы—второй степени относительно текущихъ координатъ. Общее уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными имѣетъ слѣдующій видъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Уравненія круга, эллипса, гиперболы и параболы являются частными случаями этого общаго вида. Такъ, если

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = -1,$$

то уравненіе (1) обращается въ уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Естественно теперь возникаетъ вопросъ, не представляетъ ли уравненіе вида (1) какихъ-либо новыхъ типовъ кривыхъ кромѣ круга, эллипса, гиперболы или параболы и какими общими свойствами обладаютъ всѣ кривыя, выражаемыя общимъ уравненіемъ второй степени.

При изслѣдованіи этихъ вопросовъ ради симметріи формулъ выгоднѣе пользоваться инымъ обозначеніемъ коэффиціентовъ уравненія (1). Всѣ коэффиціенты будемъ обозначать одной буквой, но сопровождая ее двумя значками, которые указывали бы, какія текущія координаты, какъ множители, относятся къ разсматриваемому коэффиціенту; такъ, за коэффиціентомъ a_{11} слѣдуютъ два множителя x, т.-е. x^2, за коэффиціентомъ a_{12} два множителя x и y; за коэффиціентомъ a_{13} слѣдуетъ одинъ множитель x: значекъ 3 указываетъ на отсутствіе одной изъ текущихъ координатъ въ разсматриваемомъ членѣ, такъ что a_{33} — членъ постоянный въ уравненіи, не зависящій отъ текущихъ координатъ. При этомъ коэффиціенты съ

различными значками будемъ брать съ множителемъ 2. Такимъ образомъ уравненіе (1) при такомъ обозначеніи его коэффиціентовъ принимаетъ слѣдующій видъ:

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0 \text{ *)}. \qquad (1')$$

Порядокъ кривой. Кривыя, выражаемыя уравненіями второй степени въ текущихъ координатахъ, называются кривыми второго порядка, потому что, какъ мы сейчасъ увидимъ, съ любою прямой кривая этого рода пересѣкается не болѣе какъ въ двухъ точкахъ. Порядокъ кривой, выражаемой алгебраическимъ уравненіемъ, опредѣляется числомъ точекъ пересѣченія ея съ любою прямой на плоскости.

Пусть требуется опредѣлить точки пересѣченія кривой, выражаемой уравненіемъ

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0, \qquad (1')$$

и какой-нибудь прямой

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

Координаты каждой точки пересѣченія этихъ линій должны удовлетворять какъ первому, такъ и второму уравненіямъ; слѣдовательно, могутъ быть найдены при совмѣстномъ рѣшеніи этихъ уравненій.

Но два уравненія съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно второй степени, а другое первой, имѣютъ два рѣшенія, которыя могутъ быть дѣйствительны и различны или мнимы, или, наконецъ, дѣйствительны, но одинаковы. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя $kx + b$ вмѣсто y въ уравненіе (1'), получимъ квадратное уравненіе относительно x:

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} x (kx + b) + a_{22} (kx + b)^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} (kx + b) + a_{33} = 0.$$

По раскрытіи скобокъ и приведеніи будемъ имѣть

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0, \qquad (3)$$

---

*) Перестановка значковъ у какого-либо коэффиціента не мѣняетъ величины коэффиціента: $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{13} = a_{31}$.

гдѣ

$$A = a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2,$$

$$B = (a_{21} + ka_{22})\,b + (a_{31} + ka_{32}), \qquad (4)$$

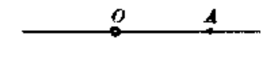
$$C = a_{22}b^2 + 2a_{23}b + a_{33}.$$

Изъ этого уравненія найдемъ два значенія x_1, x_2 для абсциссы точки пересѣченія, а подставляя эти значенія x въ уравненіе (2) найдемъ и соотвѣтствующія значенія ординаты:

$$y_1 = kx_1 + b\,, \quad y_2 = kx_2 + b\,.$$

Такимъ образомъ два рѣшенія (x_1, y_1) и (x_2, y_2) удовлетворяютъ одновременно какъ уравненію кривой (1'), такъ и уравненію прямой (2). Это значитъ, что любая прямая пересѣкаетъ кривую, данную уравненіемъ (1') второй степени относительно текущихъ координатъ, не болѣе какъ въ двухъ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Если рѣшенія (x_1, y_1) и (x_2, y_2) дѣйствительны, то прямая дѣйствительно пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ; если рѣшенія мнимы, то прямая не пересѣкаетъ кривой, или мы будемъ говорить — пересѣкаетъ въ двухъ мнимыхъ точкахъ, — разумѣя подъ мнимою точкой пару мнимыхъ значеній абсциссы и ординаты. Если же рѣшенія (x_1, y_1), (x_2, y_2) сливаются въ одно, т.-е. если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то прямая касается кривой.

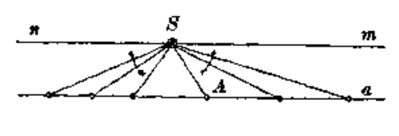
§ 3. **Безконечно удаленныя точки кривой второго порядка.** Что такое безконечно удаленная точка? Точку мы называемъ безконечно удаленной, если по крайней мѣрѣ одна изъ ея координатъ



Черт. 84.

безконечно велика. Если точка A (черт. 84) движется по прямой, безостановочно удаляясь отъ нѣкоторой опредѣленной точки O въ ту или другую сторону, мы говоримъ, что она удаляется въ безконечность. Но изъ того, что движущаяся точка можетъ удаляться въ разныя стороны отъ точки O, еще не слѣдуетъ, что на прямой двѣ безконечно удаленныя точки. Чтобы согласовать постулаты геометріи, распространяя ихъ и на это новое понятіе—безконечно удаленной точки, мы должны принять, что на прямой

только одна безконечно удаленная точка. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ слѣдить за движеніемъ точки A (черт. 85), соединяя ее въ каждый моментъ лучемъ съ точкою S, лежащей внѣ данной прямой. Если точка A удаляется въ безконечность по прямой a вправо, то лучъ SA вращается противъ движенія часовой стрѣлки и занимаетъ въ предѣлѣ положеніе Sm, параллельное данной пря-



Черт. 85.

мой. Точно также при удаленіи точки влѣво лучъ SA, вращаясь по часовой стрѣлкѣ, принимаетъ предѣльное положеніе Sn, параллельное тоже прямой a. Но Sm и Sn служатъ продолженіемъ одна другой, ибо черезъ точку S можно провести къ прямой a только одну параллельную. Съ другой стороны двѣ прямыя на плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ. Такимъ образомъ предѣльныя положенія точки пересѣченія A при удаленіи ея въ безконечность въ ту или другую сторону можно разсматривать, какъ точки пересѣченія прямой a съ одной и той же прямой mSn. Но двѣ различныя прямыя (a и nSm) на плоскости не могутъ имѣть двухъ точекъ пересѣченія, а пересѣкаются или должны разсматриваться пересѣкающимися только въ одной точкѣ. Введя понятіе безконечно удаленной точки, мы должны считать поэтому параллельныя прямыя пересѣкающимися въ одной точкѣ въ безконечности, иначе—допустить на прямой только одну безконечно удаленную точку.

Если бы мы приняли, что на прямой двѣ безконечно удаленныя точки соотвѣтственно двумъ направленіямъ на ней, то пришлось бы допустить, что прямыя Sm и Sn не служатъ продолженіемъ одна другой, что черезъ точку, лежащую внѣ прямой, можно провести къ ней не одну параллельную *).

Возвращаемся теперь къ изслѣдованію кривой второго порядка. Чтобы изыскать безконечно удаленныя точки на ней, нужно узнать, при какомъ условіи уравненіе (3) имѣетъ хотя бы одинъ безконечно большой корень: $x_1 = \infty$. Квадратное уравненіе имѣетъ одинъ

*) Это послѣднее допущеніе логически возможно, и оно привело Лобачевскаго къ построенію особой—не-эвклидовой геометріи.

безконечно большой корень, если коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстнаго обращается въ нуль **). Слѣдовательно, пересѣкающая прямая $y = kx + b$ должна имѣть такой угловой коэффиціентъ, чтобы [§ 2, (4)]

$$A = 0, \quad \text{или} \quad a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \tag{5}$$

Отсюда

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a^2_{12} - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}, \quad \text{или} \quad k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-(a_{11}a_{22} - a^2_{12})}}{a_{22}}.$$

Такимъ образомъ существуютъ два направленія, при которыхъ прямая пересѣкаетъ кривую въ безконечности. Слѣдовательно, вообще кривая второго порядка имѣетъ двѣ безконечно удаленныя точки.

Если корни уравненія (5) дѣйствительны, т.-е. если

$$a_{11}a_{22} - a^2_{12} < 0,$$

то кривая имѣетъ двѣ дѣйствительныхъ безконечно удаленныхъ точки. Если

$$a_{11}a_{22} - a^2_{12} > 0,$$

т.-е. корни уравненія (5) мнимы, то безконечно удаленныя точки кривой мнимы, иначе — кривая не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ, вся расположена въ конечной части плоскости. Если

$$a_{11}a_{22} - a^2_{12} = 0,$$

т.-е. корни уравненія (5) сливаются въ одинъ, то обѣ безконечно удаленныя точки кривой сливаются въ одну, иначе — кривая касается безконечно удаленной прямой.

Примѣчаніе. Что такое безконечно удаленная прямая? Мы приняли на каждой прямой одну безконечно удаленную точку. Гео-

---

**) $ax^2 + bx + c = 0; \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{+4ac}{2a[-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}]};$

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

$$\lim_{a=0} x_1 = -\frac{c}{b}; \qquad \lim_{a=0} x_2 = \frac{2c}{-b + b} = \infty.$$

метрическое мѣсто этихъ безконечно удаленныхъ точекъ и будетъ безконечно удаленная прямая — прямая потому, что съ любою прямою на плоскости это геометрическое мѣсто имѣетъ лишь одну общую точку. Если возьмемъ уравненіе какой-либо прямой въ отрѣзкахъ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad \textit{или} \quad \frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y-1=0,$$

то, увеличивая безгранично a и b, т.-е. удаляя безгранично прямую отъ начала координатъ, мы получимъ предѣльное уравненіе

$$0 \cdot x+0 \cdot y-1=0,$$

которое можетъ быть удовлетворено лишь безконечно большими значеніями текущихъ координатъ и представляетъ уравненіе безконечно удаленной прямой. Это уравненіе пишутъ и въ такой абсурдной повидимому формѣ:

$$1=0 \quad \textit{или} \quad C=0,$$

гдѣ C—какое-либо постоянное, не равное нулю. Но понимаютъ подъ этимъ равенствомъ именно уравненіе — предѣльное уравненіе, — въ которомъ коэффиціенты при текущихъ координатахъ стремятся къ нулю.

Выраженіе $a_{11}a_{22}-a^2_{12}$ даетъ возможность различить кривыя второго порядка по типамъ и называется дискриминантомъ старшихъ (т.-е. второго измѣренія) членовъ уравненія (1') кривой.

Для эллипса, гиперболы и параболы, уравненія которыхъ мы имѣли въ видѣ

$$1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad 2)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad 3)\ y^2-2px=0,$$

дискриминантъ соотвѣтственно положителенъ, отрицателенъ и равенъ нулю:

$$1)\ a_{11}a_{22}-a^2_{12}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}, \qquad 2)\ a_{11}a_{22}-a^2_{12}=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2},$$

$$3)\ a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0.$$

Такимъ образомъ подтверждается то, что намъ было извѣстно отчасти и раньше: именно — гипербола имѣетъ двѣ дѣйствительныхъ безконечно удаленныхъ точки въ направленіи ея асимптотъ,

эллипсъ не имѣетъ безконечно удаленныхъ (дѣйствительныхъ) точекъ, парабола касается безконечно удаленной прямой.

Мы будемъ поэтому называть кривыя второго порядка съ двумя дѣйствительными безконечно удаленными точками ($a_{11}a_{22} - a^2_{12} \ngtr 0$) гиперболами, кривыя съ мнимыми безконечно удаленными точками ($a_{11}a_{22} - a^2_{12} \nleq 0$) — эллипсами, и касающіяся безконечно удаленной прямой ($a_{11}a_{22} - a^2_{12} = 0$) параболами.

Если въ уравненіи (3) и коэффиціентъ B равенъ нулю, то оба корня обращаются въ безконечнсть, и прямая $y = kx + b$ будетъ имѣть съ кривой двѣ слившихся въ одну безконечно удаленныхъ точки, иначе касается кривой въ безконечно удаленной точкѣ, т. е. будетъ асимптотой кривой:

$$B = 0, \quad \text{или} \quad (a_{21} + a_{22}k)\,b + a_{31} + a_{32}k = 0, \tag{6}$$

откуда

$$b = -\frac{a_{31} + a_{32}k}{a_{21} + a_{22}k}.$$

Гипербола имѣетъ двѣ дѣйствительныхъ асимптоты

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + b_2,$$

гдѣ k_1 и k_2—корни уравненія (5), а b_1 и b_2 опредѣляются условіемъ (6)

$$b_1 = -\frac{a_{31} + a_{32}k_1}{a_{21} + a_{22}k_1}, \qquad b_2 = -\frac{a_{31} + a_{32}k_2}{a_{21} + a_{22}k_2}.$$

Для параболы

$$a_{11}a_{22} - a^2_{12} = 0 \quad \text{и} \quad k_1 = k_2 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Слѣдовательно,

$$b_1 = b_2 = \frac{a_{13} + a_{23}\cdot\left(-\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)}{a_{12} + a_{22}\left(-\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)} = \infty.$$

Уравненіе прямой, имѣющей съ параболой въ безконечности двѣ слившихся точки,

$$y = kx + b \quad \text{или} \quad \frac{k}{b}x - \frac{1}{b}y + 1 = 0$$

принимаетъ видъ

$$0\,.\,x - 0\,.\,y + 1 = 0$$

и представляетъ безконечно удаленную прямую. Парабола не

имѣетъ асимптоты, т.-е. прямой, проходящей въ конечной части плоскости, къ которой бы кривая приближалась безгранично.

§ 4. Преобразованіе уравненія кривой второго порядка при параллельномъ перенесеніи осей. Центръ кривой. Разсмотримъ теперь, какъ измѣняется уравненіе кривой второго порядка при измѣненіи системы координатъ и къ какимъ простѣйшимъ видамъ такимъ преобразованіемъ это уравненіе можетъ быть приведено. При этихъ преобразованіяхъ обнаружатся и нѣкоторыя общія свойства разсматриваемыхъ кривыхъ.

Центръ кривой второго порядка. Положимъ, что оси координатъ не измѣняютъ своего направленія и лишь начало координатъ перемѣщается въ какую-нибудь точку $M(x_0, y_0)$. По соотвѣтствующимъ формуламъ преобразованія [§ 1 (1)] будемъ имѣть

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0.$$

Чтобы не вводить новыхъ обозначеній текущихъ координатъ (тѣмъ болѣе, что преобразованіе придется сдѣлать не одинъ разъ), мы предыдущія формулы напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$x \mid x + x_0, \quad y \mid y + y_0,$$

гдѣ знакъ „$\mid$" выражаетъ замѣну въ первоначальномъ уравненіи кривой текущихъ координатъ x, y выраженіями $x + x_0$ и $y + y_0$, при чемъ въ этихъ выраженіяхъ x и y обозначаютъ текущія координаты не по прежней системѣ, а по новой, а x_0, y_0—координаты новаго начала по прежней системѣ.

Такимъ образомъ преобразованное уравненіе кривой будетъ имѣть видъ:

$$a_{11}(x + x_0)^2 + 2a_{12}(x + x_0)(y + y_0) + a_{22}(y + y_0)^2 +$$

$$+ 2a_{13}(x + x_0) + 2a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0.$$

По раскрытіи скобокъ и приведеніи получимъ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 +$$

$$+ 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y +$$

$$+ a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0,$$

или, сокращенно обозначая измѣненные коэффиціенты черезъ $2b_{13}$, $2b_{23}$ и b_{33},

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0, \tag{1'}$$

гдѣ

$$b_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \tag{2}$$

$$b_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \tag{3}$$

$$b_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \tag{4}$$

Такимъ образомъ послѣ параллельнаго перенесенія осей старшіе члены уравненія не измѣняютъ своего вида, а измѣняются только коэффиціенты членовъ первой степени и свободный членъ, при чемъ послѣдній замѣняется результатомъ подстановки въ лѣвую часть даннаго преобразовываемаго уравненія вмѣсто текущихъ координатъ x, y координатъ новаго начала x_0, y_0.

Распоряжаясь двумя величинами x_0, y_0, можно выбрать новое начало такъ, чтобы два изъ измѣненныхъ коэффиціентовъ, напр. b_{13} и b_{23}, обратились въ нуль:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \tag{2'}$$

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \tag{3'}$$

Черт. 86.

Рѣшая эти уравненія относительно x_0, y_0, получимъ:

$$x_0 = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad y_0 = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \tag{5}$$

Таковы координаты новаго начала по прежней системѣ. Уравненіе кривой послѣ преобразованія имѣетъ видъ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_{33} = 0, \tag{6}$$

гдѣ подъ b_{33} нужно разумѣть выраженіе (4) съ замѣной x_0, y_0 ихъ значеніями, данными формулами (5).

Если какая-нибудь точка $P(x_1, y_1)$ (черт. 86) лежитъ на кривой, то координаты ея x_1, y_1 — координаты по новой системѣ — должны удовлетворять уравненію (6), т.-е. должно имѣть мѣсто слѣдующее тождество:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + b_{33} = 0. \tag{7}$$

Но въ такомъ случаѣ и числа $-x_1$, $-y_1$ удовлетворяютъ уравненію (6):

$$a_{11}(-x_1)^2 + 2a_{12}(-x_1)(-y_1) + a_{22}(-y_1)^2 + b_{33} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + b_{33} = 0,$$

т.-е. и точка $Q(-x_1, -y_1)$ лежитъ на кривой. Отрѣзокъ PQ будетъ хордой этой кривой, хордой, проходящей черезъ начало (новое) координатъ и дѣлящейся въ этомъ началѣ пополамъ:

$$\overline{PM} = \overline{QM}.$$

При перемѣщеніи точки P по кривой, и Q будетъ перемѣщаться, оставаясь симметричной съ точкою P относительно точки $M(x_0, y_0)$. Такимъ образомъ **всякая хорда, проходящая черезъ точку** $M(x_0, y_0)$, **дѣлится въ этой точкѣ пополамъ**. Точка $M(x_0, y_0)$ служитъ **центромъ** кривой второго порядка.

Знаменателемъ выраженій (5) для координатъ **центра** служитъ дискриминантъ старшихъ членовъ уравненія. Если дискриминантъ не равенъ нулю—

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0,$$

т.-е. если кривая будетъ гиперболой или эллипсомъ, то координаты центра — конечныя величины, центръ будетъ въ конечной части плоскости. Перенесеніе начала координатъ дѣйствительно можетъ быть выполнено. Но если дискриминантъ равенъ нулю

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

то координаты центра (5) будутъ или безконечно большими или, если и числители равны нулю, неопредѣленными.

Эллипсъ и гипербола имѣютъ опредѣленный центръ на конечномъ разстояніи, парабола ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$) имѣетъ „центръ въ безконечности". Въ выраженіи „центръ въ безконечности" терминъ „центръ" нужно понимать въ обобщенномъ смыслѣ, а не первоначальномъ, ибо хорды кривой, проходящія черезъ такой центръ, безконечно велики.

Перенесеніе начала координатъ въ безконечно удаленную точку по существу невозможно: за оси координатъ мы должны принять прямыя, **пересѣкающіяся** въ конечной части плоскости. Слѣдовательно, уравненіе параболы не можетъ быть приведено къ виду (6).

Если центръ неопредѣленный, т. е. если

$$a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0\,,\quad a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}=0\,,\quad a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}=0\,,$$

то оба уравненія (2') и (3'), опредѣляющія центръ, равносильны, иначе коэффиціенты ихъ пропорціональны, ибо изъ равенствъ (8) слѣдуетъ:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}},\quad \frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}},\quad \frac{a_{13}}{a_{23}}=\frac{a_{11}}{a_{21}},$$

или

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

Замѣчаніе. Изъ равенствъ (8) независимыхъ только два — третье является слѣдствіемъ двухъ другихъ.

Такимъ образомъ въ случаѣ неопредѣленныхъ рѣшеній для координатъ центра, измѣненія этихъ координатъ связаны однимъ уравненіемъ, напр. уравненіемъ (2): уравненіе (3) является слѣдствіемъ (2).

Уравненіе (2) первой степени относительно, мѣняющихся, текущихъ теперь—координатъ x_0, y_0. Слѣдовательно, въ случаѣ неопредѣленныхъ рѣшеній (5) за центръ кривой можно принять любую точку нѣкоторой прямой, уравненіе которой

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0.$$

Остается рѣшить, какого рода линія представляется въ этомъ случаѣ уравненіемъ (6).

§ 5. **Кривая, распадающаяся на пару прямыхъ.** 1. Если въ случаѣ опредѣленнаго и конечнаго центра кривой, кромѣ коэффиціентовъ b_{12} и b_{13} въ преобразованномъ уравненіи кривой (6) обращается въ нуль и коэффиціентъ b_{33}, то уравненіе кривой прининимаетъ видъ

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0 \tag{9}$$

Лѣвую часть этого уравненія можно разложить на два множителя. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣляя на x^2 всѣ члены уравненія, получимъ

$$a_{11}+2a_{12}\left(\frac{y}{x}\right)+a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2=0. \tag{9'}$$

Пусть корни этого квадратнаго уравненія относительно $\frac{y}{x}$ будутъ k_1 и k_2:

$$k_1 = \frac{-a_{12} + \sqrt{-(a_{11}a_{22} - a^2_{12})}}{a_{22}}, \qquad k_2 = \frac{-a_{12} - \sqrt{-(a_{11}a_{22} - a^2_{12})}}{a_{22}}.$$

Въ такомъ случаѣ первую часть уравненія (9') можно разложить на множителей:

$$a_{22}\left(\frac{y}{x} - k_1\right)\left(\frac{y}{x} - k_2\right) = 0.$$

Отсюда, по умноженіи на x^2, будемъ имѣть

$$a_{22}(y - k_1 x)(y - k_2 x) = 0. \qquad (9'')$$

Уравненіе (9'') есть преобразованное уравненіе (9). Можно подобрать координаты x, y такъ, чтобы обратился въ нуль или множитель $y - k_1 x$, или другой множитель $y - k_2 x$:

$$y - k_1 x = 0, \quad \text{или} \quad y - k_2 x = 0.$$

Въ первомъ случаѣ точка перемѣщается по прямой, данной уравненіемъ

$$y - k_1 x = 0,$$

во второмъ -по прямой, данной уравненіемъ

$$y - k_2 x = 0.$$

Черт. 87.

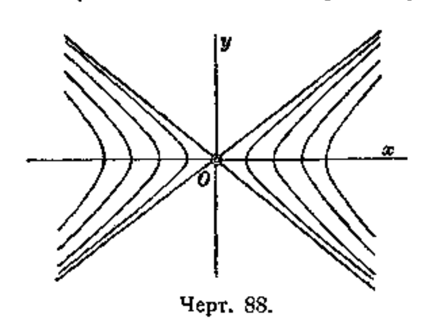
Лежитъ ли точка на первой прямой, или на другой, координаты этой точки удовлетворяютъ уравненію (9'') или (9) кривой. Такимъ образомъ кривая, представляемая уравненіемъ (9), распадается на пару прямыхъ (черт. 87), проходящихъ черезъ начало координатъ по новой системѣ, иначе—черезъ точку $M(x_0, y_0)$ по прежней.

Если k_1 и k_2 дѣйствительны, то и прямыя, на которыя распадается кривая, дѣйствительны. Если же k_1 и k_2 мнимы, то на плоскости нѣтъ ни одной, кромѣ новаго начала координатъ (0, 0), дѣйствительной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравненію (9). Мы будемъ говорить, что уравненіе (9) въ этомъ случаѣ представляетъ пару мнимыхъ прямыхъ.

Если въ выраженіе для b_{33} (4) вставимъ вмѣсто x_0 и y_0 ихъ значенія (5) и приравняемъ полученное выраженіе нулю, то будемъ имѣть соотношеніе между коэффиціентами первоначальнаго

уравненія кривой (1', § 2),—соотношеніе, которое является **условіемъ распаденія кривой второго порядка на пару прямыхъ.**

Примѣромъ приближенія кривой второго порядка къ **распаденію на пару пересѣкающихся прямыхъ** можетъ служить гипербола, когда ея полуоси пропорціонально уменьшаются до нуля.



Черт. 88.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть полуоси гиперболы будутъ al и bl (черт. 88), гдѣ a и b постоянныя величины, а l—множитель, уменьшающійся до нуля. Въ такомъ случаѣ, уравненіе

$$\frac{x^2}{(al)^2}-\frac{y^2}{(bl)^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=l^2$$

при различныхъ значеніяхъ l представляетъ рядъ гиперболъ, съ общими асимптотами. При $l=0$ уравненіе обращается въ уравненіе пары прямыхъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

именно общихъ асимптотъ этихъ гиперболъ.

2. Если центръ кривой неопредѣленный, то, взявъ какую-нибудь точку (x_0, y_0) на прямой, представляемой уравненіемъ

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,$$

можно перенести начало координатъ въ эту точку и данное уравненіе кривой (1', § 2) послѣ преобразованія приметъ видъ (6). Такъ какъ, кромѣ того, въ случаѣ неопредѣленности центра

$$a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0, \qquad \text{или} \qquad a_{12}=\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}},$$

то уравненіе (6) можно написать въ видѣ

$$a_{11}x^2+2\sqrt{a_{11}}\,\sqrt{a_{22}}\,xy+a_{22}y^2+b_{33}=0$$

или

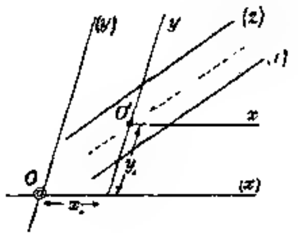
$$(\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y)^2-(\sqrt{-b_{33}})^2=0.$$

Лѣвая часть этого уравненія распадается на два множителя:

$$(\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y+\sqrt{-b_{33}})\,(\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y-\sqrt{-b_{33}})=0. \tag{10}$$

Разсуждая по предыдущему, заключаемъ, что и въ этомъ случаѣ, т.-е. въ случаѣ неопредѣленности центра, кривая распадается *на пару прямыхъ*,—а такъ какъ угловые коэффиціенты этихъ прямыхъ $(-\sqrt{a_{11}}:\sqrt{a_{22}})$ одинаковы,—на пару параллельныхъ прямыхъ (черт. 89) Здѣсь нужно различать три случая: 1) когда $b_{33}<0$ или 2) когда $b_{33}>0$ или 3) когда $b_{33}=0$.

Въ первомъ случаѣ $\sqrt{-b_{33}}$ дѣйствительная величина и обѣ прямыя

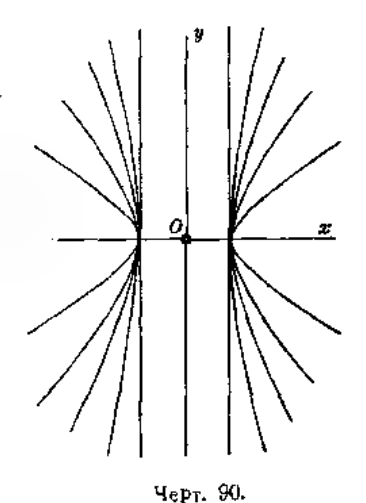


Черт. 89.

$$\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y+\sqrt{-b_{33}}=0, \qquad (11)$$

$$\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y-\sqrt{-b_{33}}=0 \qquad (12)$$

дѣйствительны. Во второмъ случаѣ $\sqrt{-b_{33}}$ мнимая величина, и мы будемъ говорить, что уравненія (11) и (12) представляютъ мнимыя прямыя, а уравненіе (6) или (1') при этихъ условіяхъ—пару мнимыхъ параллельныхъ прямыхъ. Наконецъ, въ третьемъ случаѣ обѣ прямыя (11) и (12) сливаются въ одну—уравненіе (10) или (9) и (1') при этихъ условіяхъ представляетъ пару слившихся прямыхъ.

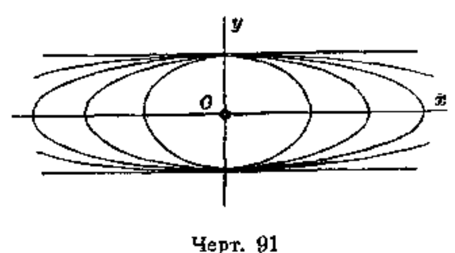


Черт. 90.

Примѣчаніе. $\sqrt{a_{11}}$ и $\sqrt{a_{22}}$ можно считать дѣйствительными, ибо изъ условія $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ слѣдуетъ, что $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$, т. е. что числа a_{11} и a_{22}, произведеніе которыхъ равно квадрату (положительному числу), имѣютъ одинаковые знаки, и можно всегда считать ихъ положительными, иначе можно бы было перемѣнить знаки всѣхъ членовъ уравненія (1) или (1')

Примѣромъ приближенія кривой второго порядка къ распаденію на пару параллельныхъ прямыхъ можетъ служить гипербола, когда ея дѣйствительная ось $2a$ сохраняетъ постоянную величину, а мнимая $2b$ безгранично увеличивается (черт 90), или эллипсъ, когда

его малая ось остается постоянной, а большая безгранично увеличивается (черт. 91).



Черт. 91

§ 6. **Главныя оси кривой второго порядка.** Положимъ, что перенесеніе начала координатъ въ центръ кривой совершено и уравненіе ея приведено къ виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_{33} = 0. \tag{6}$$

Будемъ предполагать, что первоначальное уравненіе было отнесено къ прямоугольной системѣ координатъ. Повернемъ теперь оси координатъ, оставляя ихъ прямоугольными, на нѣкоторый уголъ α, величиною котораго распорядимся послѣ. Примѣняемъ соотвѣтствующія формулы преобразованія [(3), стр. 112]:

$$x \mid x\cos\alpha - y\sin\alpha \quad \text{и} \quad y \mid x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Пользуемся опять вмѣсто знака равенства знакомъ замѣны, чтобы не вводить новыхъ обозначеній текущихъ координатъ. Уравненіе (6) послѣ поворота осей принимаетъ видъ

$$a_{11}(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) +$$
$$+ a_{22}(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + b_{33} = 0,$$

или, по раскрытіи скобокъ и приведеніи,

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{33} = 0,$$

гдѣ

$$b_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha,$$

$$b_{12} = (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

$$b_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha.$$

Выберемъ уголъ поворота α такъ, чтобы

$$b_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

или

$$\frac{a_{22} - a_{11}}{2} \sin 2\alpha + a_{12} \cos 2\alpha = 0;$$

откуда

$$tg\, 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \qquad (13)$$

Такимъ образомъ уголъ α имѣетъ опредѣленную величину, если только a_{11} не равно a_{22} и одновременно a_{12} не равно нулю. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы имѣли бы кругъ (гл. III, § 1) и уравненіе его

$$a_{11}(x^2 + y^2) + b_{33} = 0$$

при всякомъ поворотѣ, т.-е. при всякомъ α, сохраняло бы свой видъ:

$$b_{11} = a_{11} = a_{22} = b_{22}, \quad b_{12} = 0.$$

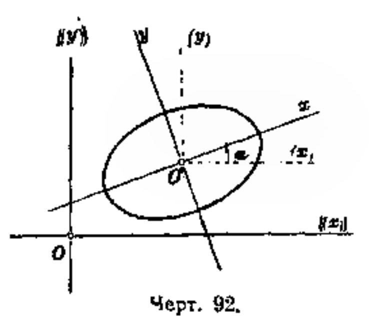
Но если

$$a_{11} \neq a_{22} \quad \text{и} \quad a_{12} \neq 0,$$

то существуетъ опредѣленный поворотъ осей координатъ, послѣ котораго уравненіе кривой принимаетъ видъ

$$b_{11} x^2 + b_{22} y^2 + b_{33} = 0. \qquad (14)$$

Такъ какъ текущія координаты входятъ въ это уравненіе въ квадратахъ, то кривая симметрично расположена (стр. 82, 89) относительно новыхъ осей. Новыя оси будутъ **осями симметріи главными осями** кривой второго порядка (черт. 92).



Черт. 92.

Уравненіе (14) можно представить въ такомъ видѣ, въ какомъ мы изучали уравненія эллипса и гиперболы (гл. IV). Дѣйствительно,

$$b_{11} x^2 + b_{22} y^2 = -b_{33} \quad \text{или} \quad \frac{b_{11} x^2}{-b_{33}} + \frac{b_{22} y^2}{-b_{33}} = 1,$$

откуда

$$\frac{x^2}{-\frac{b_{33}}{b_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{b_{33}}{b_{22}}} = 1$$

Здѣсь возможно различать три случая: 1) знаменатели $-\frac{b_{33}}{b_{11}}$ и $-\frac{b_{33}}{b_{22}}$ оба положительны, 2) одинъ знаменатель, напр. первый, положителенъ, другой отрицателенъ, и 3) оба знаменателя отрицательны. Можно положить въ первомъ случаѣ

$$-\frac{b_{33}}{b_{11}} = a^2, \qquad -\frac{b_{33}}{b_{22}} = b^2;$$

во второмъ

$$-\frac{b_{33}}{b_{11}} = a^2, \quad -\frac{b_{33}}{b_{22}} = -b^2, \quad \left[\text{или} \quad -\frac{b_{33}}{b_{11}} = -a^2, \quad -\frac{b_{33}}{b_{22}} = b^2\right];$$

въ третьемъ

$$-\frac{b_{33}}{b_{11}} = -a^2, \qquad -\frac{b_{33}}{b_{22}} = -b^2.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ три типа центральныхъ кривыхъ, изъ которыхъ два мы уже изучали подъ именемъ эллипса и гиперболы:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad 2)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad 3)\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Послѣднее уравненіе не может быть удовлетворено никакими дѣйствительными значеніями текущихъ координатъ, ибо сумма квадратовъ дѣйствительныхъ чиселъ — сумма положительныхъ чиселъ — не можетъ равняться отрицательному числу. Мы будемъ говорить, что это уравненіе представляетъ **мнимую кривую** второго порядка.

Примѣръ. Изслѣдовать уравненіе кривой второго порядка

$$34x^2 - 24xy + 41y^2 - 84x - 338y + 721 = 0.$$

Рѣшеніе. Напишемъ уравненіе, выдѣливъ множитель 2 въ коэффиціентахъ при xy и при первыхъ степеняхъ:

$$34x^2 - 2 \cdot 12xy + 41y^2 - 2 \cdot 42x - 2 \cdot 169y + 721 = 0.$$

а) **Типъ кривой.**

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 34 \cdot 41 - 12^2 > 0$$

Слѣдовательно, разсматриваемая кривая — **эллипсъ**.

b) Центръ кривой и перенесеніе начала координатъ въ центръ. Формулы преобразованія

$$x = x + x_0\,, \quad y = y + y_0$$

$$34\,(x+x_0)^2 - 2\,.\,12\,(x+x_0)\,(y+y_0) + 41\,(y+y_0)^2 - 2\,.\,42\,(x+x_0) -$$

$$-\,2\,.\,169\,(y+y_0) + 721 = 0;$$

$$34\,x^2 - 2\,.\,12\,x\,y + 41\,y^2 + 2\,(34\,x_0 - 12\,y_0 - 42)\,x + 2\,(-12\,x_0 + 41\,y_0 - 169)\,y +$$

$$+\,(34\,x_0^2 - 24\,x_0\,y_0 + 41\,y_0^2 - 84\,x_0 - 338\,y_0 + 721) = 0\,.$$

Полагая

$$34\,x_0 - 12\,y_0 - 42 = 0 \quad \text{и} \quad -12\,x_0 + 41\,y_0 - 169 = 0\,,$$

находимъ

$$x_0 = 3\,, \quad y_0 = 5.$$

Уравненіе кривой принимаетъ видъ

$$34\,x^2 - 2\,.\,12\,xy + 41\,y^2 - 250 = 0\,.$$

c) Отысканіе главныхъ осей. Преобразовываемъ полученное уравненіе кривой, поворачивая оси на нѣкоторый уголъ α

$$x = x\cos\alpha - y\sin\alpha\,, \quad y = x\sin\alpha + y\cos\alpha\,;$$

$$34\,(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 - 2\,.\,12\,(x\cos\alpha - y\sin\alpha)\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha) +$$

$$+\,41\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 - 250 = 0\,,$$

или

$$[34\cos^2\alpha - 2\,.\,12\cos\alpha\sin\alpha + 41\sin^2\alpha]\,x^2 +$$

$$+\,2\,[7\sin\alpha\cos\alpha - 12\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]\,x\,y +$$

$$+\,[34\sin^2\alpha + 2\,.\,12\sin\alpha\,.\cos\alpha + 41\cos^2\alpha]\,y^2 - 250 = 0$$

Если новыя оси координатъ являются главными осями эллипса, то

$$7\sin\alpha\cos\alpha - 12\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \quad \text{или} \quad 12tg^2\alpha + 7tg\alpha - 12 = 0$$

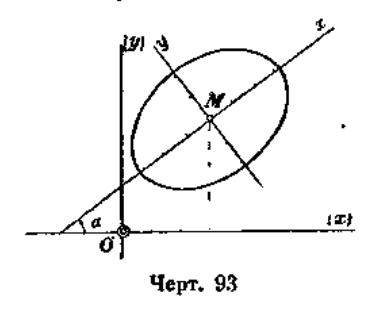
Рѣшая это уравненіе, находимъ угловые коэффиценты главныхъ осей

$$tg\,\alpha = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} = \frac{-7 \pm 25}{24}\,; \quad tg\,\alpha_1 = \frac{3}{4}\,, \quad tg\,\alpha_2 = -\frac{4}{3}.$$

Если $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$, то

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Послѣ подстановки этихъ значеній синуса и косинуса въ преобразованное уравненіе получимъ



Черт. 93

$$\frac{625}{25}x^2 + \frac{1250}{25}y^2 - 250 = 0$$

или

$$25x^2 + 50y^2 = 250$$

и наконецъ

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1 .$$

Полуоси эллипса

$$a = \sqrt{10} \sim 3,1, \qquad b = \sqrt{5} \sim 2,2 .$$

Зная положеніе центра, угловые коэффиціенты главныхъ осей и величины ихъ, можно легко построить этотъ эллипсъ (черт. 93).

§ 7. Сопряженные діаметры кривой второго порядка. Если бы мы измѣнили направленія осей, не оставляя ихъ прямоугольными, то пришлось бы примѣнить формулы преобразованія [(2), стр. 111]

$$x = x\cos\alpha + y\cos\beta, \qquad y = x\sin\alpha + y\sin\beta.$$

Уравненіе кривой послѣ замѣны текущихъ координатъ ихъ выраженіями приметъ видъ

$$a_{11}(x\cos\alpha + y\cos\beta)^2 + 2a_{12}(x\cos\alpha + y\cos\beta)(x\sin\alpha + y\sin\beta) +$$
$$+ a_{22}(x\sin\alpha + y\sin\beta)^2 + b_{33} = 0$$

или

$$b'_{11}x^2 + 2b'_{12}xy + b'_{22}y^2 + b_{33} = 0 ,$$

гдѣ

$$b'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha ,$$

$$b'_{12} = a_{11}\cos\alpha\cos\beta + a_{12}(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha) + a_{22}\sin\alpha\sin\beta ,$$

$$b'_{22} = a_{11}\cos^2\beta + 2a_{12}\cos\beta\sin\beta + a_{22}\sin^2\beta .$$

Распоряжаясь двумя величинами α и β, можно выбрать одну изъ нихъ произвольно, а другую опредѣлить такъ, чтобы $b'_{12} = 0$, т.-е. чтобы

$$a_{11}\cos\alpha\cos\beta + a_{12}(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha) + a_{22}\sin\alpha\sin\beta = 0. \qquad (15)$$

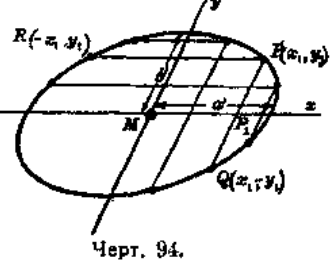
Обозначая угловой коэффиціентъ $tg\,\alpha$ новой оси абсциссъ относительно первоначальной системы черезъ k, а угловой коэффиціентъ

новой оси ординатъ черезъ k_1, будемъ имѣть изъ предыдущаго соотношенія послѣ дѣленія всѣхъ его членовъ на произведеніе косинусовъ $(\cos\alpha . \cos\beta)$

$$a_{11} + a_{12}(k + k_1) + a_{22} k k_1 = 0 . \qquad (15')$$

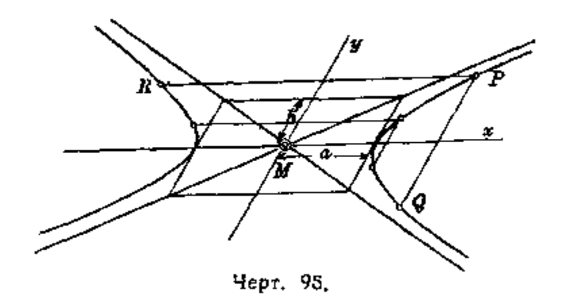
При такомъ выборѣ новыхъ осей уравненіе кривой приметъ видъ

$$b'_{11} x^2 + b'_{22} y^2 + b_{33} = 0 \qquad (16)$$



Черт. 94.

Такъ какъ текущія координаты входятъ въ это уравненіе въ квадратахъ, то точки $P(x_1, y_1)$, $Q(x_1, -y_1)$, $R(-x_1, y_1)$ (черт. 94, 95) одновременно лежатъ на кривой, т.-е. если одна изъ нихъ лежитъ на кривой, то на той же кривой лежатъ и другія. Хорда PQ параллельна оси ординатъ и дѣлится, какъ слѣдуетъ изъ построенія этихъ точекъ, осью абсциссъ пополамъ: $\overline{P_1P} = \overline{QP_1}$. Точно также хорда PR параллельна оси абсциссъ и дѣлится пополамъ осью ординатъ. При перемѣщеніи точки P по кривой хорды PQ и PR будутъ перемѣщаться параллельно соотвѣтственнымъ осямъ координатъ. Начало координатъ служитъ центромъ кривой, а оси координатъ,



Черт. 95.

стало быть, являются діаметрами Діаметры называются с о п р я ж е н н ы м и, если они обладаютъ вышеуказаннымъ свойствомъ, т.-е. к а ж д ы й и з ъ д в у х ъ с о п р я ж е н н ы х ъ д і а м е т р о в ъ д ѣ л и т ъ х о р д ы, п а р а л л е л ь н ы я д р у г о м у, п о п о л а м ъ.

Касательныя къ кривой въ концахъ одного изъ сопряженныхъ діаметровъ параллельны другому. Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только касательную разсматривать, какъ предѣльное положеніе параллельно перемѣщающейся хорды.

Уголъ α, иначе—угловой коэффиціентъ $k = tg\,\alpha$ мы выбрали совершенно произвольно; уголъ β и вмѣстѣ угловой коэффиціентъ сопряженнаго діаметра опредѣляется изъ уравненія (15) или (15'). Кривая второго порядка имѣетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ Главныя оси по самому ихъ опредѣленію тоже сопряженные діаметры, и обратно—если сопряженные діаметры въ то же время и перпендикулярны, то они будутъ главными осями кривой. Для круга каждый его діаметръ будетъ и главной осью.

Уравненіе (16) можно представить въ видѣ, подобномъ простѣйшимъ видамъ уравненій эллипса и гиперболы:

$$b'_{11}x^2 + b'_{22}y^2 = -b_{33}, \qquad \frac{b'_{11}x^2}{-b_{33}} + \frac{b'_{22}y^2}{-b_{33}} = 1;$$

откуда

$$\frac{x^2}{-\frac{b_{33}}{b_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{b_{33}}{b_{22}}} = 1.$$

Смотря по знаку знаменателей $-\frac{b_{33}}{b_{11}}$ и $-\frac{b_{33}}{b_{22}}$, обозначая ихъ черезъ $\pm a'$ и $\pm b'$, получимъ слѣдующіе три типа этого уравненія:

$$1)\ \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

$$2)\ \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad \left[\text{или} \ -\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1\right],$$

$$3)\ \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = -1$$

$2a'$ и $2b'$ будутъ величинами сопряженныхъ діаметровъ въ случаѣ 1) эллипса и въ случаѣ 2) гиперболы. Въ случаѣ 3) мы имѣемъ мнимую кривую.

Если направленія двухъ сопряженныхъ діаметровъ одинаковы, т.-е. если ихъ угловые коэффиціенты равны ($k = k_1$), то уравненіе (15'), связывающее угловые коэффиціенты сопряженныхъ діаметровъ, обращается въ уравненіе (5) [§ 2], опредѣляющее направленіе асимптотъ; діаметры совпадаютъ съ асимптотой кривой, и свойство, опредѣляющее сопряженные діаметры, нельзя въ этомъ случаѣ понимать буквально, такъ какъ хорды, параллельныя асимптотѣ, будутъ безконечно велики

Задача. Эллипсъ есть проекція круга (гл. IV, § 3). Доказать геометрически, что два какихъ-нибудь перпендикулярныхъ діаметра круга проектируются сопряженными діаметрами эллипса

§ 8. Преобразованіе уравненія кривой съ центромъ въ безконечности. Если центръ кривой второго порядка лежитъ въ безконечности, т.-е. если дискриминантъ старшихъ членовъ уравненія

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1')$$

равенъ нулю

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \qquad (2)$$

то перенесеніе начала координатъ въ центръ кривой невозможно. Въ этомъ случаѣ уравненіе (1') послѣ преобразованій приводится къ виду, отличному отъ каноническаго вида уравненій центральныхъ кривыхъ.

Предположимъ, что въ данномъ уравненіи кривой

$$a_{22} \neq 0 \quad и \quad a_{12} \neq 0.$$

Измѣняемъ направленіе осей по формуламъ [(2), стр. 111]:

$$x = x\cos\alpha + y\cos\beta \quad и \quad y = x\sin\alpha + y\sin\beta$$

Уравненіе кривой послѣ подстановки приметъ видъ

$$a_{11}(x\cos\alpha + y\cos\beta)^2 + 2a_{12}(x\cos\alpha + y\cos\beta)(x\sin\alpha + y\sin\beta) +$$

$$+ a_{22}(x\sin\alpha + y\sin\beta)^2 + 2a_{13}(x\cos\alpha + y\cos\beta) +$$

$$+ 2a_{23}(x\sin\alpha + y\sin\beta) + a_{33} = 0$$

или

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + a_{33} = 0,$$

гдѣ

$$b_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha,$$

$$b_{12} = a_{11}\cos\alpha\cos\beta + a_{12}(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha) + a_{22}\sin\alpha\sin\beta$$

$$b_{22} = a_{11}\cos^2\beta + 2a_{12}\cos\beta\sin\beta + a_{22}\sin^2\beta,$$

$$b_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha,$$

$$b_{23} = a_{13}\cos\beta + a_{23}\sin\beta.$$

Но по условію

$$a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0, \quad \text{или} \quad a_{12}=\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}.$$

Слѣдовательно,

$$b_{11}=a_{11}\cos^2\alpha+2\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha,$$

$$b_{12}=a_{11}\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}\,(\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha)+a_{22}\sin\alpha\sin\beta,$$

$$b_{22}=a_{11}\cos^2\beta+2\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}\cos\beta\sin\beta+a_{22}\sin^2\beta,$$

или

$$b_{11}=(\sqrt{a_{11}}\cos\alpha+\sqrt{a_{22}}\sin\alpha)^2, \tag{3}$$

$$b_{12}=(\sqrt{a_{11}}\cos\alpha+\sqrt{a_{22}}\sin\alpha)(\sqrt{a_{11}}\cos\beta+\sqrt{a_{22}}\sin\beta), \tag{4}$$

$$b_{22}=(\sqrt{a_{11}}\cos\beta+\sqrt{a_{22}}\sin\beta)^2. \tag{5}$$

Распоряжаясь величиною угла α, которая до сихъ поръ еще не опредѣлена, выберемъ направленіе новой оси абсциссъ такъ, чтобы

$$\sqrt{a_{11}}\cos\alpha+\sqrt{a_{22}}\sin\alpha=0,$$

т. е.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\,\alpha=-\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}}=-\frac{\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}\cdot\sqrt{a_{11}}}=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}. \tag{6}$$

При новомъ выборѣ оси абсциссъ не только $b_{11}=0$, но и $b_{12}=0$, и уравненіе кривой принимаетъ видъ

$$b_{22}y^2+2b_{13}x+2b_{23}y+a_{33}=0. \tag{7}$$

Мы предполагаемъ, что центръ кривой въ безконечности, но опредѣленный. Слѣдовательно, числители выраженій для x_0, y_0 [стр. 124 (5)] не равны нулю, не равенъ поэтому нулю и коэффиціентъ b_{13}. Въ самомъ дѣлѣ,

$$tg\,\alpha=-\frac{a_{12}}{a_{22}}; \tag{6'}$$

слѣдовательно,

$$\sin\alpha=-\frac{a_{12}}{\sqrt{a^2_{12}+a^2_{22}}}, \qquad \cos\alpha=\frac{a_{22}}{\sqrt{a^2_{12}+a^2_{22}}} \tag{6''}$$

и потому

$$b_{13}=a_{13}\cos\alpha+a_{23}\sin\alpha=\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{\sqrt{a^2_{12}+a^2_{22}}} \tag{8}$$

Но выраженіе $a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}$ является числителемъ въ выраженіи для x_0 [стр. 124 (5)]. Слѣдовательно, $b_{13} \neq 0$.

Точно также и коэффиціентъ b_{22} не можетъ равняться нулю, хотя онъ и зависитъ отъ угла β (5), величиной котораго можно распоряжаться. Дѣйствительно, коэффиціентъ b_{22} зависитъ отъ угла β совершенно такъ же, какъ коэффиціентъ b_{11} отъ угла α, но углы α и β должны быть различны, такъ какъ оси координатъ не могутъ сливаться въ одну прямую и потому если $b_{11} = 0$, то $b_{22} \neq 0$. Такимъ образомъ въ уравненіи (7) остается одинъ коэффиціентъ b_{23}, который можно обратить въ нуль, распоряжаясь величиною угла β:

$$b_{23} = a_{13}\cos\beta + a_{23}\sin\beta = 0,$$

откуда

$$tg\,\beta = -\frac{a_{13}}{a_{23}}. \tag{9}$$

Послѣ такого выбора угловъ α и β уравненіе кривой принимаетъ видъ

$$b_{22}y^2 + 2b_{13}x + a_{33} = 0. \tag{10}$$

Давая различныя значенія x, мы будемъ получать для y два значенія, равныхъ по абсолютной величинѣ, но противоположныхъ по знаку. Это значитъ, что хорды кривой, параллельныя оси ординатъ, дѣлятся осью абсциссъ пополамъ. Такимъ образомъ, если уравненіе кривой съ центромъ въ безконечности $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0)$ имѣетъ уравненіе вида (10), то ось абсциссъ можно назвать діаметромъ кривой, такъ какъ эта ось дѣлитъ рядъ параллельныхъ хордъ пополамъ, а ось ординатъ имѣетъ направленіе хордъ, сопряженныхъ этому діаметру, т.-е. хордъ, которыя дѣлятся этимъ діаметромъ пополамъ.

Величина угла α, какъ видно изъ формулы (6), зависитъ только отъ коэффиціентовъ старшихъ членовъ, а величина угла β (9) отъ коэффиціентовъ при первыхъ степеняхъ текущихъ координатъ въ преобразовываемомъ уравненіи кривой.

Если предварительно перенести начало координатъ въ какую-нибудь точку $M(x', y')$, то старшіе члены въ преобразованномъ уравненіи сохраняются въ прежнемъ видѣ, а измѣняются только коэффиціенты остальныхъ членовъ уравненія:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0, \tag{11}$$

гдѣ

$$a'_{13} = a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}\,,$$

$$a'_{23} = a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}\,. \qquad (12)$$

$$a'_{33} = a_{11}\,x'^2 + 2a_{12}\,x'y' + a_{22}\,y'^2 + 2a_{13}\,x' + 2a_{23}\,y' + a_{33}.$$

Измѣняя послѣ этого по предыдущему направленія осей и выбирая ихъ соотвѣтствующимъ образомъ, мы приведемъ уравненіе (11) къ такому же виду, какъ и раньше (10):

$$b_{22}\,y^2 + 2b'_{13}\,x + a'_{33} = 0, \qquad (13)$$

гдѣ

$$b'_{13} = a'_{13}\cos\alpha + a'_{23}\sin\alpha. \qquad (14)$$

При этомъ для $tg\,\alpha$, опредѣляющаго новое направленіе оси абсциссъ, мы получимъ ту же величину, что и раньше, а для $tg\,\beta$, опредѣляющаго направленіе новой оси ординатъ и въ то же время направленіе сопряженныхъ хордъ, иное выраженіе, зависящее отъ координатъ новаго начала $M(x', y')$:

$$tg\,\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{23}}, \qquad (6)$$

$$tg\,\beta = -\frac{a'_{13}}{a'_{23}} = -\frac{a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}}{a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}}\,. \qquad (9')$$

Такимъ образомъ, всѣ діаметры кривой при условіи (2) параллельны и каждый изъ нихъ сопряженъ хордамъ особаго направленія: черезъ каждую точку плоскости $M(x', y')$ проходитъ одинъ діаметръ, а формулой (9′) опредѣляется направленіе сопряженныхъ хордъ, т. е. тѣхъ хордъ, которыя этимъ діаметромъ дѣлятся пополамъ.

Распоряжаясь положеніемъ новаго начала координатъ $M(x', y')$, мы можемъ обратить свободный членъ уравненія кривой (13) въ нуль:

$$a'_{33} = a_{11}\,x'^2 + 2a_{12}\,x'y' + a_{22}\,y'^2 + 2a_{13}\,x' + 2a_{23}\,y' + a_{33} = 0.$$

Для этого нужно только, чтобы точка $M(x', y')$ лежала на параболѣ. При этомъ коэффиціенты b_{22} и b'_{13} по вышеизложеннымъ

основаніямъ не могутъ обратиться въ нуль. Уравненіе кривой при такомъ положеніи начала координатъ приметъ видъ

$$b_{22}y^2+2b'_{13}x=0 \quad \text{или} \quad y^2=2p'x, \tag{15}$$

гдѣ

$$p'=-\frac{b'_{13}}{b_{22}}. \tag{16}$$

Начало координатъ теперь лежитъ на кривой, ибо координаты (0, 0) удовлетворяютъ уравненію (15), а ось ординатъ касается кривой, ибо при $x=0$ для y получаемъ два равныхъ значенія: $y_1=y_2=0$ (черт. 96).

Уравненіе (15) имѣетъ видъ уравненія параболы, опредѣленной какъ геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ фокуса и директрисы (гл. IV § 10) съ тѣмъ различіемъ, что оси координатъ необязательно перпендикулярны.

Черт. 96.

Но возможно преобразовать оси координатъ такъ, что уравненіе разсматриваемой кривой будетъ имѣть такой же видъ

$$y^2=2px$$

и новыя оси будутъ завѣдомо прямоугольными, и такимъ образомъ убѣдиться, что кривая второго порядка съ центромъ въ безконечности есть дѣйствительно парабола, изученная нами раньше какъ геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ фокуса и директрисы. Дѣйствительно, какъ слѣдуетъ изъ формулы (9′), $tg\,\beta$ можетъ принимать любое значеніе въ зависимости отъ положенія точки $M(x', y')$. Полагая

$$tg\,\beta=k,$$

гдѣ k данное напередъ число, мы получимъ изъ формулы (9′) уравненіе относительно начальной системы координатъ геометрическаго мѣста точекъ M, дѣлящихъ хорды даннаго направленія k пополамъ, т.-е уравненіе діаметра, принятаго за новую ось абсциссъ:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}-k(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})=0. \tag{17}$$

Если мы потребуемъ, чтобы ось ординатъ была перпендикулярна оси абсциссъ, иначе -чтобы параллельныя хорды были перпендикулярны своему сопряженному діаметру, то угловой коэффиціентъ хордъ k долженъ быть обратенъ по величинѣ и знаку угловому коэффиціенту діаметра т. е., какъ слѣдуетъ изъ формулы (6),

$$k = \frac{a_{22}}{a_{12}}. \tag{18}$$

При такомъ выборѣ $k = tg\,\beta$, уравненіе кривой, сохраняя требуемый видъ

$$y^2 = 2px, \tag{19}$$

будетъ отнесено къ прямоугольной системѣ координатъ. Начало координатъ будетъ **вершиной** параболы, ось абсциссъ осью параболы, а ось ординатъ касательной въ вершинѣ.

Чтобы фактически выполнить преобразованіе первоначально даннаго уравненія (1′) и привести его къ виду (19), нужно опредѣлить прежде всего координаты вершины параболы, которая должна быть принята за новое начало, потомъ направленіе діаметровъ параболы, которое опредѣляется формулой (6).

Координаты вершины должны удовлетворять, во-первыхъ, уравненію діаметра (17), гдѣ подъ k нужно разумѣть его значеніе (18), опредѣленное изъ условія перпендикулярности діаметра съ сопряженными хордами, во-вторыхъ, — уравненію кривой (1′). Эти два уравненія, изъ которыхъ уравненіе кривой (1′) второй степени, въ силу условія (2) могутъ быть сведены къ системѣ двухъ уравненій первой степени. Дѣйствительно, уравненіе (1′) въ силу условія (2) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(\sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y)^2 + 2a_{13}\,x + 2a_{23}\,y + a_{33} = 0, \tag{1'}$$

а уравненіе діаметра (17), принимая во вниманіе, что $k \quad \frac{a_{22}}{a_{12}}$ и $a_{11}a_{22} = a^2_{12}$, въ видѣ

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13} + \frac{a_{22}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}\,(a_{11}\,x + a_{12}\,y) + \frac{a_{22}}{a_{12}} \cdot a_{22} = 0$$

или

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + \frac{a_{12}\,a_{13} + a_{22}\,a_{23}}{a_{11} + a_{22}} \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}} = 0 \tag{17'}$$

или, наконецъ,

$$\sqrt{a_{11}}\; x + \sqrt{a_{22}} \cdot y + \frac{a_{12}\, a_{13} + a_{22}\, a_{23}}{a_{11} + a_{22}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} = 0. \qquad (17'')$$

Изъ уравненій (1′) и (17″) слѣдуетъ, что координаты искомой вершины должны удовлетворять также уравненію

$$a_{13}\, x + a_{23}\, y + \frac{1}{2}\left[a_{33} + \left(\frac{a_{12}\, a_{13} + a_{22}\, a_{23}}{a_{11} + a_{22}}\right) \cdot \frac{1}{a_{22}}\right] = 0 \qquad (20)$$

Система уравненій (17″) и (20) и опредѣляетъ единственныя и конечныя значенія для координатъ вершины x', y' по первоначальной системѣ.

Послѣ перенесенія начала въ найденную вершину (x' y') и поворота осей на уголъ α, синусъ и косинусъ котораго опредѣляются формулами (6″), мы приведемъ уравненіе параболы къ желаемому виду. Параметръ ея опредѣляется формулой (16), при чемъ въ выраженіи для b_{22} нужно положить $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, а b'_{13} въ силу условія (2) оказывается ревнымъ b_{13} (8).

Черт. 97.

Зная положеніе вершины параболы, направленіе оси ея и параметръ, мы можемъ и построить ее (черт. 97).

Задача 1. Показать, что

$$b'_{13} = b_{13} = \frac{a_{13}\, a_{12} - a_{12}\, a_{23}}{\sqrt{a^2_{12} + a^2_{12}}} = \frac{a_{13}\, a_{22} - a_{12}\, a_{23}}{\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{11} + a_{23}}}.$$

Задача 2. Показать, исходя изъ формулъ (5) и (6″), что

$$b_{22} = (a_{11} + a_{22})\, \sin^2 \omega,$$

гдѣ

$$\omega = \beta - \alpha.$$

Задача 3. Показать, что

$$p' = \frac{a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22}}{\sqrt{a_{22}}(a_{11} + a_{22})^{2} \cdot \sin^2\omega} \quad \text{и} \quad p = \frac{a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22}}{\sqrt{a_{22}}\, (a_{11} + a_{22})^{3/2}}.$$

Примѣръ. Опредѣлить типъ кривой, данной уравненіемъ относительно прямоугольной системы координатъ

$$16\, x^2 + 24\, xy + 9\, y^2 - 74\, x + 132\, y + 334 = 0$$

и привести его къ простѣйшему (каноническому) виду

Рѣшеніе. а) Типъ кривой.

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 16\cdot 9 - 12^2 = 0.$$

Кривая имѣетъ центръ въ безконечности и является такимъ образомъ параболой.

b) Направленіе главной оси

$$tg\,\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad tg\,\alpha = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}.$$

c) Координаты вершины параболы. Составляемъ уравненіе діаметра, сопряженнаго хордамъ направленія k

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0;$$

при данныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ:

$$16x + 12y - 37 + k(12x + 9y + 66) = 0.$$

Полагая $k = -\frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{3}{4}$, получимъ уравненіе оси параболы

$$16x + 12y - 37 + \frac{3}{4}(12x + 9y + 66) = 0$$

или

$$4x + 3y + 2 = 0. \tag{2}$$

Координаты искомой вершины удовлетворяютъ уравненію оси (2) и уравненію параболы (1), которое можно представить въ видѣ

$$(4x + 3y)^2 - 74x + 132y + 334 = 0. \tag{1'}$$

Система уравненій (1') и (2) равносильна системѣ

$$4x + 3y + 2 = 0,$$

$$(-2)^2 - 74x + 132y + 334 = 0,$$

или системѣ уравненій

$$4x + 3y + 2 = 0,$$

$$-37x + 66y + 169 = 0,$$

отсюда

$$x = 1, \qquad y = -2.$$

d) Перенесеніе начала координатъ въ вершину параболы.

$$x \mid x + 1, \qquad y \mid y - 2;$$

$$16(x+1)^2 + 24(x+1)(y-2) + 9(y-2)^2 - 74(x+1) + 132(y-2) + 334 = 0,$$

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 90x + 120y = 0. \tag{3}$$

e) Поворотъ осей на уголъ α:

$$x \mid x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad y \mid x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Такъ какъ $tg\,\alpha = -\frac{4}{3}$, то $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{\text{[redacted]}}{5}$, и формулы преобразованія принимаютъ видъ

$$x \Big| \frac{3x+4y}{5}, \qquad y \Big| \frac{-4x+3y}{5}.$$

Преобразуемъ помощью ихъ уравненіе (3):

$$16\left(\frac{3x+4y}{5}\right)^2 + 24\cdot\frac{3x+4y}{5}\cdot\frac{-4x+3y}{5} + 9\left(\frac{-4x+3y}{5}\right)^2 -$$

$$-90\cdot\frac{3x+4y}{5} + 120\cdot\frac{-4x+3y}{5} = 0,$$

отсюда

$$625x^2 \quad 3750x = 0 \quad \text{или} \quad y^2 = 6x.$$

Параметръ параболы $p = 3$.

§ 9. **Заключеніе**. Главный результатъ предыдущаго изслѣдованія уравненія второй степени съ двумя текущими координатами и преобразованія его привелъ насъ къ заключенію, что кривая второго порядка можетъ быть эллипсомъ, гиперболой, параболой, мнимой кривой или распадаться на пару прямыхъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ или сливающихся въ одну. Мы обнаружили и нѣкоторыя общія свойства ихъ.

Линіи второго порядка суть простѣйшія изъ алгебраическихъ кривыхъ. Изученіе ихъ составляетъ одну изъ главныхъ задачъ элементарныхъ отдѣловъ аналитической геометріи. Линіи третьяго и тѣмъ болѣе высшихъ порядковъ имѣютъ болѣе сложную теорію. Изученіе ихъ составляетъ спеціальную задачу высшихъ отдѣловъ аналитической геометріи. Но алгебраическими кривыми кривыми различныхъ порядковъ не исчерпывается вся совокупность кривыхъ линій. Кривыя не алгебраическія называются трансцендентными. Кривыя второго порядка, какъ было уже отмѣчено въ началѣ этой главы, были изучаемы греческими геометрами, какъ получающіяся отъ пересѣченія различными плоскостями конуса, въ основаніи котораго лежитъ кругъ. Поэтому кривыя второго порядка и называются также коническими сѣченіями, но въ сущности понятіе кривой второго порядка шире понятія коническаго

сѣченія: нельзя получить въ сѣченіи конуса пары параллельныхъ прямыхъ и мнимой кривой второго порядка.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Дано уравненіе кривой второго порядка относительно прямоугольной системы координатъ

$$3x^2 - 8xy - y^2 + 3x - 4y + 2 = 0$$

Опредѣлить 1) типъ кривой, 2) координаты центра, 3) угловые коэффиціенты асимптотъ, 4) угловые коэффиціенты главныхъ осей. 5) Составить уравненіе асимптотъ. 6) Преобразовать уравненіе кривой, перенеся начало координатъ въ центръ кривой и принявъ за оси координатъ главныя оси ея.

Отвѣты и указанія: 2) $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = 0$;

3) $k' = \sqrt{19} - 4$ и $k'' = -(\sqrt{19} + 4)$; 4) $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;

5) $2(\sqrt{19} - 4)x - 2y + (\sqrt{19} - 4) = 0$

и $2(\sqrt{19} + 4)x + 2y + (\sqrt{19} + 4) = 0$.

6) Уравненіе кривой послѣ параллельнаго перенесенія осей:

$$3x^2 - 8xy - y^2 + \frac{5}{4} = 0.$$

Угловой коэффиціентъ главной оси

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = tg\,\alpha; \quad \sin\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}; \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Уравненіе относительно осей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

гдѣ

$$a^2 = \frac{5}{76}(2\sqrt{5} + 1) \sim 0,36, \quad b^2 = \frac{5}{76}(2\sqrt{5} - 1) \sim 0,23$$

2. Дано уравненіе параболы относительно прямоугольной системы координатъ:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 3y + 1,96 = 0.$$

Преобразовать это уравненіе, принявъ за оси координатъ ось параболы и касательную въ вершинѣ.

Указанія и отвѣты. Координаты вершины $x' = 2{,}8$; $y' = 1$. Угловой коэффиціентъ оси параболы

$$k = \frac{1}{2} = tg\,\alpha\,; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\,; \;\; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Формулы преобразованія при параллельномъ перенесеніи осей и потомъ при поворотѣ осей

$$x = x + 2{,}8\,; \quad y = y + 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{2x - y}{\sqrt{5}}\,; \quad y = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\,.$$

Уравненіе послѣ параллельнаго перенесенія осей

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 0{,}4x - 0{,}2y = 0\,,$$

послѣ поворота осей

$$y^2 = \frac{\sqrt{5}}{25}\,x$$

3 Данъ эллипсъ (или гипербола) уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$

и двѣ точки на немъ $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$. a) Составить уравненіе прямой MN и показать, что ея угловой коэффиціентъ равенъ $-\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}$, $\left[\text{для гиперб. } \frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}\right]$. b) Если точка N сливается съ точкою M, то сѣкущая MN обращается въ касательную къ эллипсу въ точкѣ M. Показать, что угловой коэффиціентъ касательной равенъ $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, $\left[\text{для гиперболы } \frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right]$ и что уравненіе касательной можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \left[\text{для гиперболы} \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1\right].$$

c) Опредѣлить разстоянія фокусовъ отъ касательной. Показать, что эти разстоянія пропорціональны радіусамъ-векторамъ, проведеннымъ изъ фокусовъ въ точку прикосновенія M. d) Вывести отсюда предложеніе, что касательная одинаково наклонена къ радіусамъ-векторамъ, проведеннымъ въ точку прикосновенія. e) Показать, что точка, симметричная съ однимъ фокусомъ относительно касательной, отстоитъ отъ другого фокуса на разстояніи, равномъ большой оси эллипса $2a$ [для гиперболы — дѣйствительной оси $2a$], а прямая, ихъ соединяющая, проходитъ черезъ точку прикосновенія M. Показать, что точки, симметричныя къ одному фокусу относительно различныхъ

касательныхъ, лежатъ на кругѣ съ центромъ въ другомъ фокусѣ и радіусомъ, равнымъ $2a$ (кругъ этотъ называется управляющимъ). f) Показать, что основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса на касательную, отстоитъ отъ центра эллипса [соотв. гиперболы] на разстояніи, равномъ a, и лежитъ, слѣдовательно, на описанномъ кругѣ [для гиперболы — на кругѣ, описанномъ на дѣйствительной ея оси, какъ на діаметрѣ]. g) Провести касательную къ эллипсу [къ гиперболѣ] въ данной на немъ точкѣ. Провести касательныя къ эллипсу [къ гиперболѣ] изъ точки, лежащей внѣ эллипса [или гиперболы]. Провести касательную къ эллипсу [къ гиперболѣ] параллельно данному направленію [при этихъ построеніяхъ можно воспользоваться или управляющимъ кругомъ (e) или кругомъ описаннымъ (f)]. h) Какимъ соотношеніемъ связаны угловые коэффиціенты двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса? Отв. $k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$. i) Называя точки *эллипса* и *описаннаго* круга при одинаковой абсциссѣ соотвѣтственными, показать, что сопряженнымъ діаметрамъ эллипса соотвѣтствуютъ перпендикулярные діаметры круга. j) Называя уголъ наклона радіуса описаннаго круга къ большой оси эллипса черезъ φ, показать, что $a'^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$ и $b'^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi$, а отсюда $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ и $a' b' \sin\omega = a b$, гдѣ a' — полудіаметръ эллипса, соотвѣтствующій взятому радіусу описаннаго круга, b' — ему сопряженный полудіаметръ, а ω — уголъ между этими сопряженными полудіаметрами.

4. Дана парабола уравненіемъ

$$y^2 = 2p\,x$$

и двѣ точки на ней $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$. a) Составить уравненіе прямой MN и показать, что ея угловой коэффиціентъ $= \frac{2p}{y_1 + y_2}$. b) Если точка N сливается съ точкой M, то сѣкущая MN обращается въ касательную параболы въ точкѣ M. Показать, что угловой коэффиціентъ касательной равенъ $p : y_1$ и что уравненіе касательной можетъ быть приведено къ виду

$$yy_1 = p\,(x + x_1).$$

c) Показать, что касательная пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкѣ, отстоящей отъ вершины параболы въ отрицательномъ направленіи на разстояніи, равномъ по абсолютной величинѣ абсциссѣ точки *прикосновенія*, иначе—проекція на ось параболы длины касательной отъ точки прикосновенія до точки пересѣченія съ осью параболы дѣлится въ вершинѣ параболы пополамъ. d) Показать, что касательная одинаково наклонена къ оси параболы и радіусу-вектору, проведенному изъ фокуса въ точку прикосновенія. e) Показать, что основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса на различныя касательныя параболы, лежатъ на касательной въ вершинѣ (т. е. на оси ординатъ), а точки, симметричныя къ фокусу относительно касательныхъ, лежатъ на директрисѣ параболы.

5. Дана гипербола уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Уравненіе касательной въ точкѣ $M(x_1, y_1)$ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$. Уравненіе одной асимптоты $y = \frac{b}{a}x$, другой $y = -\frac{b}{a}x$; уравненіе пары асимптотъ $y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 0$. Для отысканія точекъ пересѣченія касательной съ парой асимптотъ нужно рѣшить совмѣстно уравненіе касательной $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ и уравненіе пары асимптотъ $y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 0$. a) Исключивъ y изъ этихъ уравненій, показать, что абсциссы x' и x'' двухъ искомыхъ точекъ пересѣченія опредѣляются изъ квадратнаго уравненія

$$x^2 - 2x_1 x + a^2 = 0,$$

а исключивъ x, показать, что ординаты y', y'' опредѣляются изъ квадратнаго уравненія

$$y^2 - 2y_1 y - b^2 = 0.$$

b) Показать, что абсцисса точки прикосновенія x_1 равна полусуммѣ абсциссъ x' и x'' точекъ пересѣченія касательной съ парой асимптотъ: $x_1 = \frac{x' + x''}{2}$ $\left(\text{точно также } y_1 = \frac{y' + y''}{2}\right)$. Исходя отсюда, доказать, что отрѣзокъ касательной гиперболы, заключенный между асимптотами, дѣлится въ точкѣ прикосновенія пополамъ.

c) Исходя изъ равенствъ $y' = \frac{b}{a}x'$ и $y'' = -\frac{b}{a}x''$ и квадратныхъ уравненій, опредѣляющихъ x', x'' и y', y'' $x^2 - 2x_1 x + a^2 = 0$ и $y^2 - 2y_1 y + b^2 = 0$, доказать, что касательная гиперболы отсѣкаетъ отъ асимптотическаго угла треугольникъ постоянной площади, равной ab.

d) Доказать, что діаметръ, проведенный въ точку прикосновенія касательной, дѣлитъ хорду, параллельную касательной, пополамъ (стр. 135) e) Доказать, что отрѣзки сѣкущей, заключенные между гиперболой и асимптотами, равны, и вывести отсюда способъ построенія сколькихъ угодно точекъ гиперболы, если даны асимптоты и одна точка гиперболы.

ГЛАВА VI.

ПОЛЯРНЫЯ КООРДИНАТЫ.

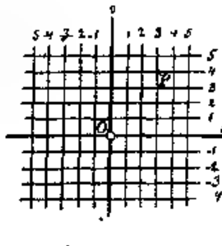
§ 1. **Основная мысль координатнаго опредѣленія положенія точки *на плоскости.*** При установленіи прямоугольной или косоугольной системы координатъ мы брали на плоскости рядъ параллельныхъ прямыхъ и положеніе каждой изъ этихъ прямыхъ относительно одной изъ нихъ, принятой за начальную (ось абсциссъ), опредѣляли числомъ y, которое является ординатой каждой точки выдѣленной прямой. Такимъ образомъ всѣ параллельныя прямыя этого рода занумерованы различными значеніями y: каждая прямая имѣетъ опредѣленную числовую отмѣтку, каковою является соотвѣтствующее значеніе y. Такова была исходная точка зрѣнія при рѣшеніи задачи опредѣленія положенія точки на плоскости. Числомъ x или абсциссою опредѣлялось смѣщеніе точки на выдѣленной прямой—смѣщеніе отъ начальной точки, лежащей на оси ординатъ. Разсматривая одновременно на различныхъ прямыхъ параллельнаго ряда точки, имѣющія одну и ту же абсциссу, не трудно замѣтить, что онѣ лежатъ на одной прямой, параллельной оси ординатъ; а различными значеніями абсциссы выдѣляется рядъ такихъ прямыхъ, параллельныхъ между собою. Каждая прямая этого новаго ряда имѣетъ опредѣленную числовую отмѣтку, каковою является соотвѣтствующее значеніе x.

Такимъ образомъ на плоскости мы имѣемъ два ряда параллельныхъ занумерованныхъ прямыхъ (черт 98). Черезъ каждую точку плоскости проходитъ по одной прямой изъ каждаго ряда; числовыя отмѣтки x, y этихъ линій и служатъ координатами — прямолинейными координатами—этой точки.

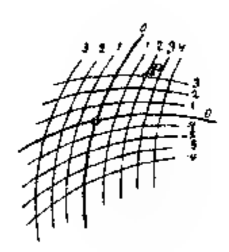
Но можно было бы для рѣшенія той же задачи—задачи опредѣленія положенія точки на плоскости помощью чиселъ—вмѣсто параллельныхъ прямыхъ взять два какихъ бы то ни было ряда линій даже и кривыхъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что черезъ каждую точку плоскости проходитъ одна линія каждаго ряда.

(черт. 99). Если линiи каждаго ряда какимъ-либо способомъ занумерованы, т. е, снабжены числовыми отмѣтками (число — numerus), то каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуютъ двѣ числовыхъ отмѣтки двухъ проходящихъ черезъ нее линiй. Эти числовыя отмѣтки и будутъ координатами — въ общемъ случаѣ криволинейными координатами — выдѣленной точки.

Такова основная мысль установленiя какой бы то ни было системы координатъ на плоскости или даже на какой-либо поверхности.



Черт. 98.



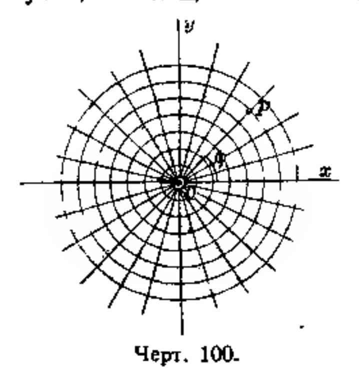
Черт. 99.

Любая географическая карта представляетъ примѣръ такого координатнаго опредѣленiя положенiя точки. Здѣсь имѣется два ряда линiй: рядъ меридiановъ, занумерованныхъ числовыми отмѣтками, называемыхъ долготами, и рядъ параллелей, занумерованныхъ числовыми отмѣтками, называемыхъ широтами. Широтою и долготою опредѣляется положенiе каждаго географическаго пункта взятой карты. Но при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что нѣкоторыя точки на плоскости могутъ занимать исключительное въ отношенiи установленной системы координатъ положенiе. Такъ, если всѣ линiи одного ряда, устанавливающаго систему координатъ, проходятъ черезъ одну точку, то эта точка имѣетъ соотвѣтствующую координату неопредѣленной. Сѣверный и южный полюсы, черезъ которые проходятъ всѣ меридiаны, имѣютъ неопредѣленную долготу.

Изъ криволинейныхъ координатъ чаще всего пользуются такъ называемыми полярными координатами.

§ 2. **Полярная система координатъ.** Для координатнаго опредѣленiя положенiя точки на плоскости возьмемъ рядъ концентрическихъ круговъ и рядъ ихъ радiусовъ, продолженныхъ безгранично, иначе — пучекъ лучей, выходящихъ изъ общаго центра O круговъ (черт. 100). Каждому кругу можно приписать числовую отмѣт-

ку r, выражающую величину его радіуса, измѣреннаго принятой единицей мѣры. Положеніе каждаго луча въ пучкѣ, если выберемъ одинъ изъ никъ Ox за начальный, можно опредѣлить угломъ φ — угловымъ смѣщеніемъ этого луча отъ начальнаго. Если установить положительное направленіе углового смѣщенія луча отъ начальнаго, напр. противъ движенія часовой стрѣлки, то каждому углу будетъ соотвѣтствовать единственный лучъ пучка. Такимъ образомъ, оба ряда линій - рядъ концентрическихъ круговъ и пучекъ лучей, исходящихъ изъ общаго ихъ центра — теперь занумерованы соотвѣтствующими значеніями чиселъ r и φ. Черезъ каждую точку P плоскости проходитъ одинъ кругъ разсматриваемаго ряда и одинъ лучъ пучка, если взятая точка не совпадаетъ съ общимъ центромъ круговъ. Числовыя отмѣтки r и φ этихъ двухъ линій, проходящихъ черезъ точку P, и называются полярными координатами этой точки; r называется радіусомъ-векторомъ точки P, а φ—полярнымъ угломъ или амплитудою ея. Общій центръ круговъ O называется полюсомъ разсматриваемой системы координатъ, а начальный лучъ Ox—полярною осью. Радіусъ-векторъ r означаетъ разстояніе точки P до полюса, а φ -уголъ наклона этого радіуса къ полярной оси.



Черт. 100.

При опредѣленіи положенія точки на плоскости достаточно считать радіусъ-векторъ положительной величиной: $0 \leq r < \infty$, а амплитуду φ—заключенной въ интервалѣ отъ 0 до 2π, исключая 2π или отъ $-\pi$ до $+\pi$, исключая одну изъ этикъ границъ:

$$-\pi < \varphi \leqq +\pi \quad \text{или} \quad -\pi \leqq \varphi < \pi.$$

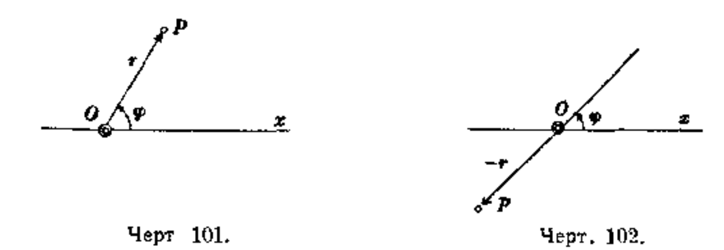
Каждой точкѣ плоскости въ такомъ случаѣ будетъ соотвѣтствовать одно значеніе радіуса-вектора r и одно, если точка не совпадаетъ съ полюсомъ, значеніе амплитуды φ.

При изученіи уравненій, связывающихъ r и φ, приходится разсматривать и неограниченныя измѣненія полярныхъ координатъ. Въ такомъ случаѣ при положительномъ r каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ безчисленное множество амплитудъ, отличающихся одна отъ другой на цѣлое число полныхъ оборотовъ, т. е.

на $2k\pi$, гдѣ k—какое-нибудь цѣлое число. Радіусъ-векторъ, если онъ имѣетъ положительную величину, откладывается на второй сторонѣ полярнаго угла, отложеннаго отъ полярной оси (черт 101), если же r— отрицательная величина, то на продолженіи этой стороны (черт. 102) — построеніе, подобное построенію линіи секанса или косеканса въ тригонометріи.

Для полюса O радіусъ-векторъ равенъ нулю, а амплитуда неопредѣленна.

Преобразованіе декартовыхъ координатъ въ полярныя Примемъ полярную ось за ось абсциссъ, а перпендику-



Черт 101. Черт. 102.

ляръ къ ней, возставленный изъ полюса—за ось ординатъ. Можно составить формулы преобразованія декартовыхъ координатъ въ полярныя и обратно.

Пусть полярныя координаты какой-нибудь точки P (черт. 103) будутъ r и φ, а прямоугольныя x и y

$$OP = r, \quad x\widehat{O}P = \varphi; \qquad OP_1 = x, \quad P_1P = y.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника OP_1P имѣемъ

$$OP_1 = OP.\cos\varphi \quad \text{и} \quad P_1P = OP.\sin\varphi,$$

или

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \qquad (1,$$

Черт. 103.

Изъ того же треугольника OP_1P или изъ формулъ (1) получаемъ и выраженія для полярныхъ координатъ черезъ декартовы:

$$OP = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + P_1P^2} \quad \text{и} \quad \frac{P_1P}{OP_1} = tg\,\varphi,$$

или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \frac{y}{x} = tg\,\varphi.$$

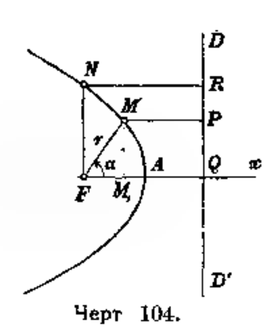
Рѣшая послѣднее уравненіе относительно φ, будемъ имѣть

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{и} \qquad \varphi = arctg\,\frac{y}{x}. \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) являются формулами преобразованія полярныхъ координатъ въ прямоугольныя и обратно

Пользуясь этими формулами, можно уравненіе, связывающее полярныя координаты, преобразовать въ уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ и обратно. При изученіи кривыхъ линій такой переходъ отъ одного вида ихъ уравненій къ другому можетъ оказаться полезнымъ или потому, что такимъ образомъ можно обнаружить общія свойства различныхъ кривыхъ, или потому, что уравненія одного вида будутъ проще уравненій другого вида.

§ 3. **Полярное уравненіе эллипса, гиперболы и параболы.** Примемъ фокусъ эллипса, гиперболы или параболы за полюсъ полярной системы координатъ и ось кривой въ направленіи къ ближайшей ея вершинѣ—за полярную ось (черт. 104). Координаты какой-нибудь точки M разсматриваемой кривой пусть будутъ r и φ:



Черт 104.

$$FM = r, \quad A\widehat{F}M = \varphi. \tag{3}$$

Пусть DD' — директриса этой кривой. Отношеніе разстояній любой точки эллипса, гиперболы или параболы до фокуса и до соотвѣтствующей директрисы постоянно и равно эксцентрицитету кривой:

$$\frac{FM}{MP} = e, \qquad \text{или} \qquad \frac{r}{MP} = e, \tag{4}$$

гдѣ e — эксцентрицитетъ кривой. MP — разстояніе точки M до директрисы — можно выразить черезъ нѣкоторыя постоянныя и уголъ φ. Обозначимъ черезъ p перпендикуляръ FN, возставленный изъ фокуса F къ полярной оси до встрѣчи съ кривой. Такъ какъ точка N лежитъ на кривой, то и для этой точки имѣетъ мѣсто такое же соотношеніе, какъ и для точки M:

$$\frac{FN}{NR} = e, \qquad \text{или} \qquad \frac{p}{NR} = e$$

Отсюда опредѣляемъ разстояніе NR точки N до директрисы, иначе—разстояніе фокуса до директрисы:

$$NR = \frac{p}{e}, \qquad \text{или} \qquad FQ = \frac{p}{e}. \tag{5}$$

Но

$$MP = M_1Q = FQ \quad FM_1 = \frac{p}{e} - FM_1,$$

а изъ треугольника FM_1M имѣемъ

$$FM_1 = r \cos \varphi,$$

слѣдовательно,

$$MP = \frac{p}{e} - r \cos\varphi \tag{6}$$

Такимъ образомъ, равенство (4) можно написать въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{r}{\frac{p}{e} - r \cos \varphi} = e, \qquad \text{или} \qquad r = p - r\,e \cos \varphi$$

откуда

$$r + r\,e \cos \varphi = p, \qquad \text{или} \qquad r(1 + e \cos \varphi) = p$$

и наконецъ

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \tag{7}$$

Уравненіе (7) есть полярное уравненіе эллипса, если $e < 1$, — гиперболы, если $e > 1$ и параболы, если $e = 1$; p называется параметромъ кривой. Параметръ p входитъ въ уравненіе параболы и въ прямоугольныхъ координатахъ. Для эллипса и гиперболы p можно опредѣлить, зная оси этихъ кривыхъ и принявъ во вниманіе, что декартовы координаты точки N будутъ c и p.

Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ эллипса имѣемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{или} \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Подставляя въ это уравненіе координаты точки N (c, p), получимъ

$$p = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Но $a^2 - c^2 = b^2$. Слѣдовательно,

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{8}$$

Въ случаѣ гиперболы имѣемъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{или} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Подставляя въ это уравненіе координаты точки N (c, p), получимъ

$$p = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

Но для гиперболы $c^2 - a^2 = b^2$. Слѣдовательно, и для гиперболы

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

§ 4. **Спирали.** Полярныя координаты особенно удобны при изученіи кривыхъ линій, называемыхъ спиралями. Уравненія спиралей въ полярныхъ координатахъ гораздо проще, чѣмъ въ прямоугольныхъ.

1. Спираль Архимеда описывается точкой, движущейся равномѣрно по прямой, которая въ свою очередь равномѣрно вращается вокругъ одной своей точки. Принимая эту послѣднюю за полюсъ полярной системы координатъ, мы заключаемъ изъ предыдущаго опредѣленія, что радіусъ-векторъ движущейся точки мѣняется пропорціонально амплитудѣ ея и, стало быть, уравненіе спирали Архимеда въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ

$$r = a\varphi, \tag{1}$$

гдѣ a—постоянный множитель, иначе -факторъ пропорціональности.

Примѣняя формулы преобразованія полярныхъ координатъ въ декартовы, получимъ изъ уравненія (1) болѣе сложное уравненіе архимедовой спирали въ прямоугольныхъ координатахъ:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot arctg\,\frac{y}{x}.$$

Давая въ уравненіи (1) различныя значенія амплитудѣ φ и вычисляя соотвѣтствующія значенія радіуса-вектора r, можно построить

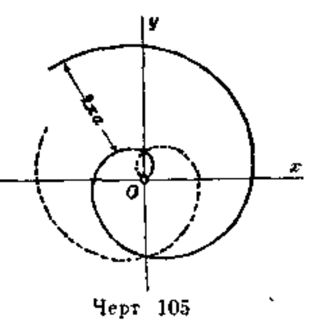
рядъ точекъ архимедовой спирали (черт. 105). Такъ для значенiй амплитуды

$$\varphi = 0, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{3\pi}{2}, \ 2\pi, \ldots.$$

будемъ имѣть

$$r = 0, \ \frac{a\pi}{4}, \ \frac{a\pi}{2}, \ a\pi, \ \frac{3a\pi}{2}, \ 2a\pi, \ldots.$$

Если брать и отрицательныя значенiя для φ, то получимъ и для r отрицательныя значенiя и, слѣдовательно, при построенiи соотвѣтствующихъ точекъ спирали пришлось бы откладывать радiусъ-векторъ на продолженiи стороны полярнаго угла. При увеличенiи амплитуды φ на 2π радiусъ-векторъ увеличивается, какъ слѣдуетъ изъ уравненiя спирали, на постоянную величину $2\pi a$. Поэтому спираль отмѣчаетъ на любой прямой, выходящей изъ полюса, одинаковые между собою отрѣзки, равные $2\pi a$.

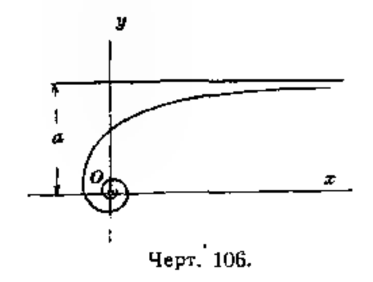


Черт 105

2. Гиперболическая спираль опредѣляется уравненiемъ

$$r\varphi = a.$$

Такъ какъ $r = \frac{a}{\varphi}$, то по мѣрѣ увеличенiя амплитуды φ радiусъ-векторъ r безгранично уменьшается. Кривая, завертываясь около начала координатъ, асимптотически приближается къ этой точкѣ (черт. 106), т.-е., безгранично приближаясь, никогда не достигаетъ этой точки. Кромѣ того, ордината точки кривой $y = r \sin\varphi$ (черт. 103), а $r = \frac{a}{\varphi}$; поэтому $y = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$. Но $\frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1$.



Черт. 106.

Слѣдовательно, $y < a$, т.-е. спираль расположена ниже прямой, параллельной оси абсциссъ и отстоящей отъ нея на разстоянiи, равномъ a. Если амплитуда φ, уменьшаясь, стремится къ нулю, то раз-

ница между синусомъ и дугой становится все меньше и меньше и $\lim\limits_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$ *). Слѣдовательно, спираль приближается къ прямой $y = a$ асимптотически.

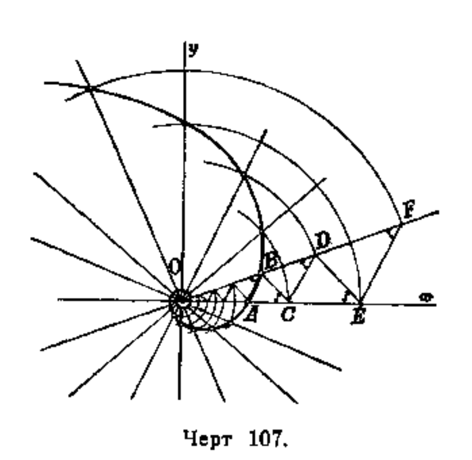
При отрицательныхъ значеніяхъ амплитуды и радіусъ-векторъ отрицателенъ: соотвѣтствующая вѣтвь кривой имѣетъ такой же видъ, какъ и первая вѣтвь, но расположена симметрично съ первой относительно оси ординатъ.

3. Логариѳмическая спираль опредѣляется уравненіемъ

$$r = a^{\varphi},$$

гдѣ a — постоянное положительное число **). Амплитуда φ является логариѳмомъ радіуса-вектора при основаніи a: $\varphi = \log_a r$. Если амплитуда получаетъ рядъ значеній, составляющихъ ариѳметическую прогрессію, то радіусъ-векторъ принимаетъ рядъ значеній, составляющихъ геометрическую прогрессію:

$$\varphi = 0,\quad \varphi_1,\quad 2\varphi_1,\quad 3\varphi_1,\quad 4\varphi_1,\ \ldots$$
$$r = 1,\quad r_1,\quad r_1^2,\quad r_1^3,\quad r_1^4,\ \ldots.$$



Черт 107.

Отсюда и слѣдуетъ способъ построенія сколькихъ угодно точекъ спирали. Строимъ рядъ подобныхъ треугольниковъ (черт. 107):

$$\triangle OAB \sim \triangle OBC \sim \triangle OCD \sim \ldots$$

Если

$$OA = 1 \quad \text{и} \quad OB = r,$$

то

$$OC = r^2, \qquad OD = r^3, \ldots$$

Если φ принимаетъ отрицательныя значенія

$$-\varphi_1,\ -2\varphi_1,\ -3\varphi_1,\ -4\varphi_1, \ldots,$$

---

*) Послѣ, при другомъ случаѣ, это равенство будетъ доказано.

**) Для черт. 107 $a > 1$.

то построеніе зигзагообразной линіи $ABCD...$ нужно продолжить въ сторону начала координатъ. Полученныя величины радіусовъ-векторовъ переносятся на соотвѣтствующія направленія.

Логариѳмическая спираль такъ же, какъ и гиперболическая, приближается къ началу координатъ асимптотически:

$$\lim_{\varphi = -\infty} r = \lim_{\varphi = -\infty} a^{\varphi} = 0, \quad \text{ибо} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0 \quad (a > 1).$$

Логариѳмическая спираль обладаетъ слѣдующимъ замѣчательнымъ свойствомъ. Если увеличить или уменьшить радіусы векторы всѣхъ точекъ спирали въ одномъ и томъ же отношеніи, то получимъ другую кривую, подобную первой, и эта новая кривая, если ее повернуть на соотвѣтствующій уголъ, совпадетъ съ первой, будетъ тою же самой, что и первая. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ радіусы векторы такой кривой черезъ R. По условію

$$R = kr,$$

гдѣ k — постоянный факторъ пропорціональности. Но $r = a^{\varphi}$; слѣдовательно,

$$R = ka^{\varphi}.$$

Всегда можно подобрать такое число α, чтобы

$$a^{\alpha} = k$$

Дѣйствительно рѣшая это уравненіе относительно α, находимъ

$$\alpha = \frac{\log_{10} k}{\log_{10} a}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$R = a^{\alpha} \cdot a^{\varphi}, \quad \text{или} \quad R = a^{(\varphi + \alpha)},$$

т.-е. радіусъ-векторъ R новой кривой, соотвѣтствующій амплитудѣ φ, имѣетъ ту же величину. что и радіусъ векторъ начальной спирали при амплитудѣ равной $\varphi + \alpha$ и потому, если повернуть начальную спираль на уголъ α (по часовой стрѣлкѣ при α положительномъ), то спираль въ этомъ новомъ положеніи совпадаетъ со второй. Поворачиваясь около полюса, она становится себѣ подобной; измѣненная

подобно, она лишь поворачивается на нѣкоторый уголъ, не измѣняя своего вида. И при многихъ другихъ преобразованіяхъ логариѳмическая спираль не измѣняетъ своего вида—измѣненная возстановляется тою же самою.

Пораженный этими свойствами логариѳмической спирали, Яковъ Бернулли (1692) смотрѣлъ на эту spiram mirabilem, какъ на прекрасную эмблему, которою желалъ бы украсить свой могильный памятникъ: libenter spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum epigrapho: Eadem mutata resurgo.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Вывести формулу разстоянія между двумя точками по даннымъ полярнымъ координатамъ ихъ непосредственно изъ чертежа, или преобразовывая формулу разстоянія въ декартовыхъ координатахъ.

Отв. $R=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

2. Составить уравненіе прямой въ полярныхъ координатахъ непосредственно изъ чертежа, или преобразовывая нормальное ея уравненіе.

Отв. $r\cos(\varphi-\alpha)=p$.

3. Вычислить площадь треугольника $A(r_1, \varphi_1)$, $B(r_2, \varphi_2)$, $C(r_3, \varphi_3)$.

4. Составить полярное уравненіе круга радіуса R, a) принявъ за полюсъ центръ круга; b) принявъ за полюсъ какую-нибудь точку круга, а за полярную ось діаметръ круга.

5. Составить полярное уравненіе круга радіуса R съ центромъ въ точкѣ (a, α).

6. Построить кривую, данную полярнымъ уравненіемъ

$$r=a+\frac{a}{\varphi}.$$

a) Показать, что кругъ съ центромъ въ полюсѣ и радіусомъ равнымъ a является асимптотическимъ т.-е. кривая при безграничномъ увеличеніи по абсолютной величинѣ угла φ стремится слиться съ этимъ кругомъ, но никогда не достигая такого слиянія. b) Показать, что кривая имѣетъ асимптоту, параллельную полярной оси и отстоящую отъ нея на разстояніи, равномъ a, иначе—что ордината точки кривой при безграничномъ уменьшеніи абсолютной величины φ стремится къ предѣлу a.

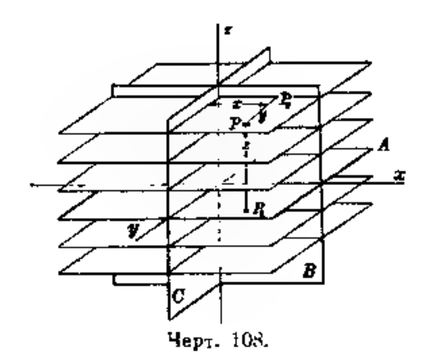
ГЛАВА VII.

МЕТОДЪ КООРДИНАТЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

§ 1. **Прямоугольная система координатъ въ пространствѣ.** Изслѣдованіе свойствъ геометрическихъ образовъ, не умѣщающихся на плоскости, помощью вычисленія составляетъ вторую часть аналитической геометріи—геометрію въ пространствѣ.

Подобно тому, какъ въ аналитической геометріи на плоскости и здѣсь первый вопросъ, подлежащій разрѣшенію, есть вопросъ объ опредѣленіи помощью чиселъ положенія точки въ пространствѣ, ибо всякій геометрическій образъ вполнѣ опредѣляется положеніемъ точекъ, его составляющихъ.

Мы видѣли, что на плоскости положеніе точки вполнѣ опредѣляется двумя координатами—двумя числами. Здѣсь двухъ чиселъ уже недостаточно. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ рядъ параллельныхъ плоскостей (ср. стр. 23), одну изъ которыхъ мы будемъ считать за начальную. Тогда положеніе всякой точки будетъ вполнѣ опредѣлено, если мы можемъ указать, на которой изъ этихъ плоскостей точка находится, и гдѣ на этой плоскости. Но положеніе плоскости опредѣляется ея разстояніемъ отъ начальной плоскости одним числомъ,—а положеніе точки на самой плоскости, какъ мы уже знаемъ—двумя числами, слѣдовательно, для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ необходимо три числа—три координаты.



Черт. 108.

Опредѣлимъ систему координатъ такимъ образомъ. Имѣемъ начальную плоскость A (черт. 108) и въ ней прямоугольныя оси координатъ Ox и Oy. Пусть эта плоскость перемѣщается параллельно самой себѣ такъ, чтобы линіи Ox и Oy описали плоскости

B и C, перпендикулярныя къ начальной плоскости. Линію пересѣченія плоскостей B и C назовемъ осью Oz.

Черезъ каждую точку пространства проходитъ одна изъ параллельныхъ плоскостей. Положеніе разсматриваемой точки въ этой плоскости опредѣляется смѣщеніемъ ея отъ осей координатъ въ этой плоскости. Эти смѣщенія будутъ въ то же время и смѣщеніями точки P отъ плоскостей B и C. Присоединяя еще смѣщеніе точки отъ начальной плоскости A, мы вполнѣ опредѣлимъ положеніе точки въ пространствѣ этими смѣщеніями или разстояніями ея отъ каждой изъ трехъ плоскостей A, B и C. Числа, измѣряющія эти разстоянія въ одной и той же единицѣ мѣры, мы будемъ называть **координатами** данной точки; плоскости A, B и C будемъ называть поэтому координатными плоскостями, линіи ихъ пересѣченія Ox, Oy и Oz **осями координатъ**, а общую точку O пересѣченія—**началомъ координатъ**.

Координату, измѣряющую смѣщеніе данной точки отъ плоскости C или плоскости yOz направо или налѣво, будемъ обозначать буквою x и называть **абсциссой**; точно такъ же координату, измѣряющую смѣщеніе точки отъ плоскости B или zOx впередъ или назадъ, будемъ обозначать буквою y и называть **ординатой**, и, наконецъ, координату, измѣряющую смѣщеніе точки отъ плоскости xOy вверхъ или внизъ, обозначимъ черезъ z и назовемъ **аппликатой** *) этой точки.

Смѣщенія точки отъ плоскостей координатъ измѣряются въ направленіяхъ соотвѣтствующихъ осей координатъ. Поэтому на координаты точки Ax, y, z можно смотрѣть, какъ на числа, измѣряющія звенья ломаной линіи OA_1A_2A (черт 111), параллельныя осямъ координатъ и ведущія изъ начала координатъ въ разсматриваемую точку A. При томъ эти смѣщенія условимся считать положительными въ одномъ направленіи и отрицательными въ обратномъ, именно—абсциссу x будемъ считать положительной, если она откладывается направо отъ начала координатъ, и отрицательной, если откладывается налѣво; ординату y—положительной, если она отложена впередъ, и отрицательной—если отложена назадъ, и, наконецъ, аппликату z положительной при направленіи вверхъ и отрицательной при направленіи внизъ.

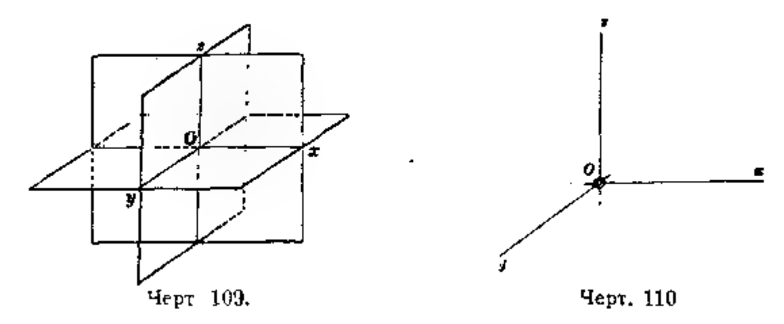
Плоскости координатъ, будучи продолжены во всѣ стороны, дѣлятъ пространство на восемь частей—на восемь октантовъ,—образуя

---

*) Терминъ „аппликата" не вошелъ еще въ общее употребленіе.

восемь трехгранныхъ угловъ (черт. 109). Каждый изъ октантовъ характеризуется опредѣленной комбинаціей знаковъ координатъ для точекъ, лежащихъ въ этомъ октантѣ. Октантъ, для котораго всѣ три координаты положительны, называется **нормальнымъ**.

Разсмотрѣнная система координатъ называется прямоугольной, такъ какъ углы между плоскостями—прямые; въ болѣе общемъ случаѣ эти углы можно предполагать не прямыми, а какими угодно. Но мы во всемъ послѣдующемъ будемъ пользоваться только прямоугольной системой координатъ. Въ дальнѣйшемъ мы не будемъ вычерчивать плоскостей координатъ, а только однѣ оси координатъ (черт. 110). При этомъ полезно имѣть въ виду при изображеніи



Черт 109. Черт. 110

пространственныхъ образовъ на плоскости нѣкоторыя положенія начертательной геометріи *).

Изображеніе пространственнаго образа на плоскости есть **проекція** этого образа на эту плоскость. Если всѣ проектирующіе лучи выходятъ изъ одной точки, то проекція будетъ **центральной**, а изображеніе—художественной **перспективой**. Если проектирующіе лучи параллельны какому-либо данному напередъ направленію, то проекція называется **параллельной**. Параллельная проекція можетъ быть ортогональной или косоугольной. При параллельной проекціи параллельныя прямыя въ натурѣ и изображаются параллельными, параллелограммъ—параллелограммомъ, квадратъ, вообще говоря, параллелограммомъ, кругъ, вписанный въ квадратъ—эллипсомъ, вписаннымъ въ соотвѣтствующій параллелограммъ, перпендикулярные діаметры круга сопряженными діаметрами эллипса. Если изображаемый пространственный образъ отнесенъ къ какой-

*) Предметомъ **начертательной геометріи** является изображеніе **пространственныхъ** формъ на **плоскости** и изученіе ихъ по такимъ плоскимъ ихъ изображеніямъ.

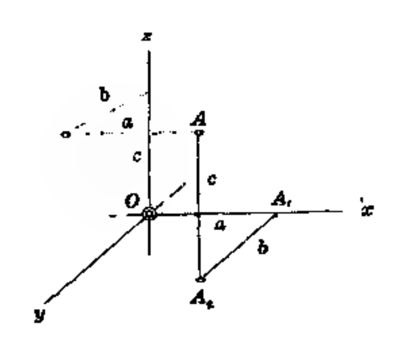
нибудь системѣ осей, то вмѣсто того, чтобы выбирать для установленія параллельной проекціи направленіе проектирующихъ лучей, можно произвольно изобразить оси координатъ тремя какими-нибудь различными прямыми, выходящими изъ одной точки, и произвольно для каждой изъ этихъ осей выбрать свою единицу мѣры. Этими единицами соотвѣтственно и измѣряются отрѣзки, проведенные въ направленіи осей координатъ. Единицамъ мѣры для каждой изъ осей координатъ на чертежѣ соотвѣтствуютъ въ натурѣ отрѣзки одинаковои длины*) Построеніе по этому правилу называется аксонометрическимъ, а теорія, устанавливающая его, аксонометріей.

Этими построеніями мы и будемъ пользоваться Въ большинствѣ случаевъ будемъ вычерчивать оси Ox и Oz подъ прямымъ угломъ, а ось Oy какъ-нибудь къ нимъ наклоненною, и выбирать единицы мѣры на осяхъ Ox и Oz одинаковыми, а на оси Oy какой-нибудь иною.

Задача 1. Опредѣлить положеніе точки по даннымъ координатамъ

$$x = a, \quad y = b \quad \text{и} \quad z = c.$$

Рѣшеніе. На оси Ox откладываемъ отрѣзокъ OA_1, равный a**) единицамъ длины (черт. 111); изъ точки A_1 проводимъ линію A_1A_2, параллельную оси Oy и равную b единицамъ длины, и, наконецъ, изъ точки A_2 — линію, параллельную оси Oz, на которой откладываемъ $A_2A = c$. Точка A и будетъ искомая.



Черт. 111.

Результатъ былъ бы тотъ же, если бы звенья ломаной (a, b, c) были построены въ другомъ какомъ нибудь порядкѣ, напр., сначала по оси z отложить отрѣзокъ, равный c, потомъ изъ конечной точки его провести въ плоскости yOz линію, параллельную оси y и равную b и, наконецъ, изъ конечной точки этой линіи возставить перпендикуляръ къ плоскости yOz, равный a; мы попадемъ опять въ ту же точку A.

Задача 2. По данному положенію точки A опредѣлить ея координаты.

Рѣшеніе. Пусть точка A (черт. 111) дана. Опускаемъ изъ нея перпендику-

---

*) Это положеніе составляетъ содержаніе такъ называемой теоремы Польке.

**) Если a—число отрицательное, то OA_1 придется отложить не вправо, какъ на чертежѣ, а влѣво.

ляръ на плоскость xOy до пересѣченія съ этой плоскостью, и изъ основанія A_2 *) этого перпендикуляра проводимъ линію A_2A_1, параллельную оси Oy, до пересѣченія съ осью Ox; тогда

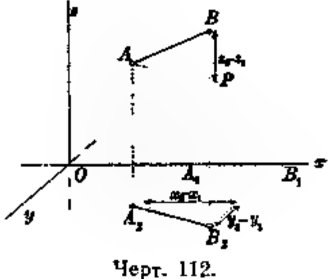
$$x=\frac{OA_1}{e},\quad y=\frac{A_1A_2}{e},\quad z=\frac{A_2A}{e},$$

гдѣ e — единица мѣры. Здѣсь опять порядокъ, въ которомъ можно производить это построеніе, остается произвольнымъ.

§ 2. **Разстояніе между двумя точками.** Даны двѣ точки своими координатами $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B(x_2, y_2,\ z_2)$; требуется опредѣлить разстояніе между этими точками (черт. 112). Построимъ координаты данныхъ точекъ:

$$OA_1=x_1,\quad A_1A_2=y_1,\quad A_2A=z_1,$$

$$OB_1=x_2,\quad B_1B_2=y_2,\quad B_2B=z_2$$



Черт. 112.

Линіи A_2A и B_2B, будучи перпендикулярными къ плоскости xOy, параллельны между собой и лежатъ въ одной плоскости. Поэтому, проведя линію AP параллельно прямой A_2B_2, получимъ прямоугольный треугольникъ APB, изъ котораго имѣемъ

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PB}^2}.$$

Но

$$\overline{AP}=\overline{A_2B_2},\quad \text{а}\quad A_2B_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

какъ разстояніе на плоскости xOy между точками $A_2(x_1,\ y_1)$ и $B_2(x_2,\ y_2)$; кромѣ того, по самому построенію $PB=z_2-z_1$; слѣдовательно,

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.\qquad (1)$$

Эта формула вполнѣ аналогична соотвѣтствующей формулѣ въ геометріи на плоскости.

Мы вывели эту формулу для точекъ въ нормальномъ октантѣ, но легко доказать ея общность для точекъ, какъ угодно въ про-

*) Въ натурѣ точка A_2 — вполнѣ опредѣленная точка, на чертежѣ можетъ быть выбрана произвольно, ибо однимъ изображеніемъ A положеніе этой точки въ пространствѣ еще не опредѣлено.

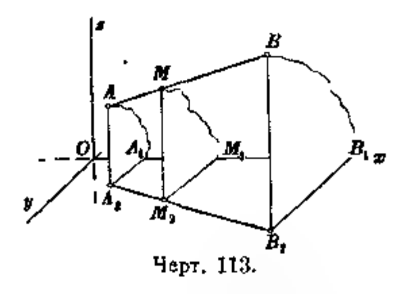
пространствѣ расположенныхъ Мы не будемъ останавливаться на этомъ доказательствѣ, такъ какъ оно вполнѣ аналогично доказательству при обобщеніи формулы для разстоянія двухъ точекъ въ геометріи на плоскости (стр. 24, 25).

Какъ слѣдствіе изъ формулы (1) вытекаетъ формула разстоянія R точки (x, y, z) отъ начала координатъ

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

Примѣчаніе. Если мы въ этой формулѣ x, y и z будемъ считать перемѣнными, то каждая система значеній x, y и z будетъ опредѣлять точку, обладающую тѣмъ свойствомъ, что ея разстояніе до начала координатъ равно R. Очевидно, такія точки будутъ лежать на сферѣ радіуса R съ центромъ въ началѣ координатъ; и обратно, координаты всякой точки сферы должны удовлетворять уравненію (2), такъ какъ ея разстояніе до центра, т.-е. до начала координатъ, равно R. Итакъ, уравненіе (2) при перемѣнныхъ значеніяхъ x, y, z представляетъ сферу и есть уравненіе сферы съ центромъ въ началѣ координатъ.

§ 3. **Вычисленіе координатъ точки, дѣлящей данный отрѣзокъ въ данномъ отношеніи.** Даны двѣ точки своими координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$; требуется вычислить координаты точки M, дѣлящей отрѣзокъ AB въ отношеніи $\frac{AM}{MB} = \lambda$ (черт. 113). Пусть x, y, z — координаты точки M. Соединяя звенья (y_1, z_1), (y_2, z_2) и (y, z) ломаныхъ, ведущихъ изъ начала координатъ въ точки A, B и M, плоскостями, не трудно замѣтить, что эти плоскости параллельны плоскости yOz. Тогда на основаніи теоремы: отрѣзки прямыхъ линій между параллельными плоскостями пропорціональны, имѣемъ



Черт. 113.

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB}, \quad \text{или} \quad \frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \lambda.$$

Но

$$A_1M_1 = x - x_1 \quad \text{и} \quad M_1B_1 = x_2 - x,$$

поэтому

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогично получимъ и соотвѣтствующія формулы для y и z, строя въ иномъ порядкѣ звенья ломаныхъ (x_1, y_1, z_1), (x, y, z) и (x_2, y_2, z_2).

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующія формулы для вычисленія координатъ точки, дѣлящей разстояніе между двумя данными точками въ данномъ отношеніи:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{1}$$

Въ частномъ случаѣ, когда $\lambda = 1$, т.-е. M лежитъ въ срединѣ отрѣзка AB, обозначая координаты этой точки черезъ x_0, y_0, z_0, будемъ имѣть

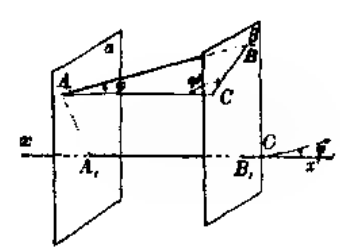
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Выведенныя формулы совершенно такія же, какъ и формулы, полученныя при рѣшеніи той же задачи на плоскости; прибавилась лишь новая формула для аппликаты z

Какъ и на плоскости, параметръ λ можетъ быть и отрицательнымъ: точка M лежитъ въ этомъ случаѣ внѣ отрѣзка AB.

§ 4. **Теоремы о проекціяхъ.** Установленіе тѣхъ или иныхъ формулъ или уравненій часто основывается на теоремахъ о проекціяхъ.

Возьмемъ нѣкоторую линію xx', которую назовемъ осью проекцій, и будемъ проектировать на нее отрѣзокъ AB, какъ-нибудь расположенный въ пространствѣ, проведя черезъ концы A и B этого отрѣзка плоскости α и β, перпендикулярныя къ оси xx' (черт. 114)



Черт. 114.

Точки пересѣченія этихъ плоскостей A_1 и B_1 съ осью xx' будутъ проекціями точекъ A и B, а отрѣзокъ A_1B_1—проекціей отрѣзка AB. Можно получить тѣ же точки A_1, B_1, опуская перпендикуляры изъ точекъ A и B на ось проекцій xx'.

1. Теорема. Проекція отрѣзка равняется произведенію про-

ектируемаго отрѣзка на косинусъ угла его наклона къ оси проекцій

$$\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \cos\varphi .$$

φ уголъ между положительными направленіями отрѣзка AB и оси проекцій. Такъ какъ AB и xx' вообще не пересѣкаются, то подъ угломъ между ними разумѣютъ уголъ, образованный двумя прямыми, проведенными изъ произвольной точки O параллельно AB и xx'.

Опускаемъ изъ точки A (черт. 114) перпендикуляръ AC на плоскость β и соединяемъ основаніе его C съ точкою B; получимъ треугольникъ ABC, въ которомъ уголъ BAC равенъ углу между AB и xx', такъ какъ прямая AC параллельна оси xx', и, кромѣ того, уголъ ACB прямой, ибо прямая AC перпендикулярна плоскости β. Изъ этого прямоугольнаго треугольника имѣемъ

$$AC = AB \cdot \cos\varphi$$

Но $AC = A_1B_1$, такъ какъ фигура ACA_1B_1—параллелограммъ:

$$AC \parallel A_1B_1 \quad \text{и} \quad AA_1 \parallel CB_1.$$

Слѣдовательно,

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos\varphi . \qquad 1)$$

Какъ и въ геометріи на плоскости, мы можемъ и здѣсь говорить о знакѣ проекціи, если на прямыхъ AB и xx' установлено опредѣленное положительное направленіе. При этомъ направленіе проектируемаго отрѣзка AB можетъ и не совпадать съ положительнымъ направленіемъ той прямой, на которой онъ лежитъ; въ такомъ случаѣ проектируемый отрѣзокъ долженъ считаться отрицательной величиной (ср. стр. 50, 51). При этихъ условіяхъ формула (1) опредѣлитъ и знакъ проекціи, если только, какъ было отмѣчено выше, подъ угломъ φ мы будемъ разумѣть уголъ между положительными направленіями обѣихъ прямыхъ.

Подъ проекціей ломаной линіи будемъ разумѣть сумму проекцій отдѣльныхъ ея звеньевъ. Подъ суммой здѣсь нужно разумѣть алгебраическую сумму, такъ какъ проекціи звеньевъ по предыдущему могутъ быть и отрицательными.

Начальной и конечной точкой данной ломаной линіи $ABCDE$

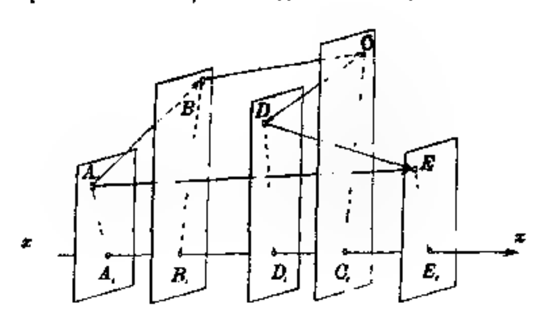
(черт. 115) устанавливается направленіе каждаго ея звена. Прямая AE, соединяющая начало и конецъ ломаной, называется **замыкающей.**

По опредѣленію имѣемъ:

$$пр_x\ ABCDE = пр_x\ AB + пр_x\ BC + пр_x\ CD + пр_x\ DE =$$

$$= A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 .$$

Обозначенія отрѣзковъ A_1B_1, B_1C_1 и т. д. порядкомъ буквъ указываютъ и направленія ихъ, а слѣдовательно, знаки ихъ величинъ.



Черт. 115.

Основываясь на правилахъ сложенія отрѣзковъ съ направленіемъ (стр. 24), имѣемъ

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1 , \quad A_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1 , \quad A_1D_1 + D_1E_1 = A_1E_1 ,$$

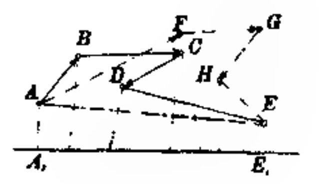
т. е.
$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 = A_1E_1 .$$

Но A_1E_1 есть проекція замыкающей AE:

$$A_1E_1 = пр_x\ AE:$$

Слѣдовательно,

$$пр_x\ ABCDE = пр_x\ AE$$



Черт. 116.

Такимъ образомъ имѣемъ второе предложеніе о проекціяхъ:

2. **Теорема.** Проекція ломаной равна проекціи замыкающей.

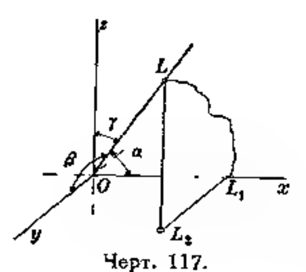
Изъ этого предложенія вытекаетъ третье:

3 **Теорема.** Проекціи двухъ ломаныхъ съ общимъ началомъ и общимъ концомъ—равны (черт. 116)

$$пр_x\ ABCDE = пр_x\ AFGHE ,$$

ибо обѣ ломаныя замыкаются однимъ и тѣмъ же отрѣзкомъ AE.

§ 5. Опредѣленіе направленія прямой въ пространствѣ. Уголъ между двумя прямыми. Всѣмъ прямымъ, параллельнымъ между собой, можно приписать одно и то же направленіе, и это направленіе можно опредѣлить углами наклона къ осямъ координатъ одной изъ этихъ прямыхъ, напр. той, которая выходитъ изъ начала координатъ (черт. 117). Но не всякіе три угла α, β, γ, выбранные произвольно, будутъ углами наклона одной прямой къ осямъ координатъ. Углы наклона прямой OL къ осямъ координатъ связаны однимъ соотношеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть эти углы будутъ α, β и γ:



Черт. 117.

$$\widehat{xOL} = \alpha, \quad \widehat{yOL} = \beta, \quad \widehat{zOL} = \gamma,$$

а какая-нибудь точка L на этой прямой имѣетъ координаты x, y, z:

$$OL_1 = x, \quad L_1L_2 = y, \quad L_2L = z.$$

Разстояніе точки L отъ начала координатъ опредѣляется формулой

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Проектируя OL на ось Ox, мы должны имѣть съ одной стороны

$$np_x\, OL = OL \,.\, \cos\alpha = R \cos\alpha,$$

такъ какъ плоскость, проходящая черезъ отрѣзки L_1L_2 и L_2L, перпендикулярна къ оси Ox и, слѣдовательно, точка L_1 является проекціей на ось Ox точки L; а съ другой

$$np_x\, OL = OL_1 = x.$$

Такимъ образомъ имѣемъ равенство

$$R \cos\alpha = x. \tag{1}$$

Вполнѣ аналогично найдемъ еще два равенства

$$R \,.\, \cos\beta = y, \tag{2}$$

$$R \,.\, \cos\gamma = z \tag{3}$$

Возвышая обѣ части равенствъ (1), (2) и (3) въ квадратъ и складывая, получимъ

$$R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

отсюда

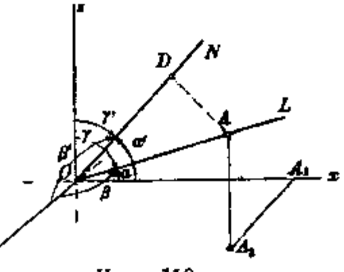
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (4)$$

Таково то соотношенiе, которому должны удовлетворять углы, опредѣляющiе направленiе прямой линiи.

Задача 1. Вывести соотношенiе, которымъ связаны синусы тѣхъ же угловъ α, β, γ.

Задача 2. Показать, что основная формула тригонометрiи $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ является частнымъ случаемъ формулы (4).

Уголъ между двумя прямыми. Опредѣлимъ теперь уголъ между двумя прямыми, выходящими изъ начала координатъ, направленiя которыхъ опредѣляются углами ихъ съ осями координатъ α, β, γ и α', β', γ'



Черт. 118

Пусть OL и ON (черт. 118) будутъ эти данныя прямыя, выходящiя изъ начала координатъ. Беремъ какую-нибудь точку A на линiи OL и проектируемъ отрѣзокъ OA, равный R, на линiю ON. Обозначая уголъ между прямыми черезъ φ, будемъ имѣть

$$np_{ON}\,OA = OA\,.\cos\varphi = R\,\cos\varphi\,.$$

Но OA—замыкающая ломаной линiи OA_1A_2A; поэтому

$$np_{ON}\,OA = np_{ON}\,OA_1 + np_{ON}\,A_1A_2 + np_{ON}\,A_2A$$

Звенья этой ломаной суть координаты точки A:

$$OA_1 = x,\quad A_1A_2 = y,\quad A_2A = z\,.$$

Кромѣ того углы, образуемые прямой ON съ звеньями x, y, z ломаной OA_1A_2A тѣ же, что и углы, образуемые той же прямой съ

соотвѣтственными параллельными этимъ звеньямъ осями координатъ. Слѣдовательно,

$$пр_{ON}\, OA_1 = x \,.\, cos\, \alpha', \quad пр_{ON}\, A_1A_2 = y \,.\, cos\, \beta', \quad пр_{ON}\, A_2A = z \,.\, cos\, \gamma'$$

и

$$R \,.\, cos\, \varphi = x \,.\, cos\, \alpha' + y \,.\, cos\, \beta' + z \,.\, cos\, \gamma' .$$

Но, какъ мы уже имѣли выше,

$$x = R \,.\, cos\, \alpha, \quad y = R \,.\, cos\, \beta, \quad z = R \,.\, cos\, \gamma .$$

Вставляемъ эти выраженія въ предыдущее равенство.

$$R \,.\, cos\, \varphi = R\, (cos\, \alpha\, cos\, \alpha' + cos\, \beta\, cos\, \beta' + cos\, \gamma\, cos\, \gamma') .$$

По сокращеніи на R получимъ желаемую формулу для опредѣленія угла между двумя прямыми

$$cos\, \varphi = cos\, \alpha\, cos\, \alpha' + cos\, \beta\, cos\, \beta' + cos\, \gamma\, cos\, \gamma' . \tag{5}$$

Если линіи ON и OL перпендикулярны, т.-е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $cos\, \varphi = 0$ и тогда равенство (5) даетъ условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ:

$$cos\, \alpha\, cos\, \alpha' + cos\, \beta\, cos\, \beta' + cos\, \gamma\, cos\, \gamma' = 0 \tag{6}$$

Задача. *Показать*, что формула тригонометріи для косинуса разности двухъ угловъ

$$cos\, (\alpha' - \alpha) = cos\, \alpha\, cos\, \alpha' + sin\, \alpha\, sin\, \alpha'$$

является частнымъ случаемъ формулы (5).

§ 6. **Геометрическое значеніе уравненій.** Пусть намъ дано уравненіе, связывающее текущія координаты x, y, z:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

Уравненіе опредѣляетъ одну изъ координатъ, напр. z, какъ неявную функцію другихъ x и y, и всякой системѣ значеній x, y будетъ соотвѣтствовать по уравненію (1) одно или нѣсколько значеній z; другими словами z есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y.

Посмотримъ, что можетъ выражать геометрически уравненіе (1). Присоединимъ къ уравненію (1) еще уравненіе

$$z = c,$$

иными словами будемъ разсматривать только точки, лежащія въ плоскости на высотѣ c отъ плоскости xOy. Уравненіе (1) принимаетъ тогда видъ

$$F(x, y, c) = 0$$

и содержитъ теперь двѣ перемѣнныхъ x и y. Какъ мы уже знаемъ, оно выражаетъ нѣкоторую линію на указанной плоскости. Измѣняя непрерывно c, мы будемъ перемѣщать разсматриваемую плоскость параллельно самой себѣ. При этомъ перемѣщеніи будетъ перемѣщаться и, можетъ быть, измѣняться линія на плоскости, опредѣляемая уравненіемъ

$$F(x, y, c) = 0.$$

Линія, непрерывно перемѣщаясь и въ то же время, быть можетъ, деформируясь, опишетъ нѣкоторую поверхность. Такимъ образомъ, одно уравненіе (1), связывающее перемѣнныя координаты x, y, z, представляетъ нѣкоторую поверхность въ пространствѣ.

Пусть теперь даны два уравненія

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

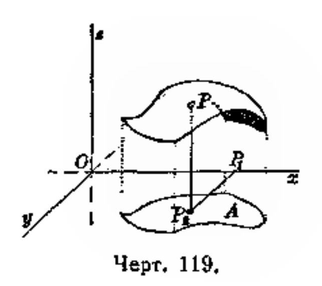
Каждое въ отдѣльности изъ нихъ опредѣляетъ, какъ мы видѣли, нѣкоторую поверхность. Точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ, должны принадлежать обѣимъ поверхностямъ. Общія точки двухъ поверхностей лежатъ на линіи пересѣченія этихъ поверхностей. Слѣдовательно, совокупность двухъ уравненій, связывающихъ три текущихъ координаты x, y, z, опредѣляетъ въ пространствѣ нѣкоторую линію. Эта линія будетъ дѣйствительной, если поверхности пересѣкаются. Если же поверхности не пересѣкаются, мы будемъ говорить, что онѣ пересѣкаются по мнимой линіи.

Наконецъ, совокупность трехъ уравненій между координатами x, y, z

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

опредѣляетъ одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ въ простран-

ствѣ, если только данныя уравненія независимы одно отъ другого, т.-е. если одно изъ нихъ не является слѣдствіемъ двухъ другихъ или два не являются слѣдствіемъ одного. Каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности опредѣляетъ поверхность. Двѣ поверхности пересѣкаются по линіи, которая пересѣкаетъ третью въ одной или нѣсколькихъ отдѣльныхъ точкахъ Координаты этихъ точекъ можно опредѣлить, разсматривая данныя уравненія, какъ три уравненія съ тремя неизвѣстными, и рѣшая ихъ. Если третье уравненіе является слѣдствіемъ двухъ первыхъ, то это означало бы, что третья поверхность проходитъ черезъ линію пересѣченія двухъ первыхъ.



Черт. 119.

Обратно, пусть **дана** поверхность, отнесенная къ какой-нибудь системѣ координатъ, и какая-нибудь точка P (черт. 119) этой поверхности пусть имѣетъ координаты x, y, z:

$$x = OP_1, \quad y = P_1P_2, \quad z = P_2P.$$

При перемѣщеніи этой точки по поверхности координаты точки мѣняются и основаніе аппликаты P_2P, т. е. точка P_2, перемѣщается на плоскости xOy въ нѣкоторой области A, ограниченной или безграничной, смотря по размѣрамъ данной поверхности. При любомъ положеніи точки P_2 въ этой области аппликата P_2P будетъ имѣть опредѣленную для разсматриваемаго положенія величину Слѣдовательно, мы можемъ давать абсциссѣ и ординатѣ x, y какія-либо произвольныя значенія, только бы опредѣляемая ими въ плоскости xOy точка P_2 не выходила изъ разсматриваемой области. Но для аппликаты z послѣ выбора x и y произвольнаго значенія дать уже нельзя: величина аппликаты опредѣляется самою поверхностью. Такимъ образомъ z является функціей **двухъ независимыхъ** перемѣнныхъ x и y

$$z = f(x, y). \tag{4}$$

Какова природа этой функціи и можно ли выразить ее аналитически, это зависитъ отъ того, какъ дана намъ поверхность.

Равенство (4) представляетъ **уравненіе**, связывающее перемѣнныя координаты x, y, z. Такимъ образомъ **данной** поверхности соотвѣтствуетъ опредѣленное **уравненіе**, связывающее измѣненія координатъ точки, движущейся по этой поверхности.

§ 7 **Примѣры составленія уравненія данной поверхности.** 1. Составить уравненіе плоскости, разсматривая ее какъ геометрическое мѣсто точекъ, одинаково отстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ

Примемъ за одну изъ данныхъ точекъ начало координатъ, а за другую—точку A (черт. 120), симметричную къ началу относительно плоскости:

$$OB = BA\,.$$

Пусть координаты этой точки A будутъ m, n и p. Всякая точка $P(x, y, z)$ данной плоскости одинаково отстоитъ отъ точекъ O и A:

$$OP = PA\,.$$

По формуламъ разстоянія имѣемъ

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

$$PA = \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2}\,.$$

Черт. 120.

Слѣдовательно,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2}$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2\,,$$

откуда

$$2mx + 2ny + 2pz - (m^2 + n^2 + p^2) = 0\,.$$

Получили уравненіе первой степени относительно x, y, z. Всякую плоскость можно разсматривать какъ геометрическое мѣсто точекъ, одинаково отстоящихъ отъ двухъ точекъ, симметрично расположенныхъ относительно плоскости. Слѣдовательно, всякая плоскость въ пространствѣ выражается уравненіемъ первой степени, связывающимъ текущія координаты x, y, z.

2. Составить уравненіе шара съ центромъ въ точкѣ $M(a, b, c)$ и радіусомъ, равнымъ r

Всякая точка $P(x, y, z)$ шаровой поверхности отстоитъ отъ центра шара $M(a, b, c)$ на постоянномъ разстояніи, равномъ r. Но по формулѣ разстоянія

$$MP = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}\,.$$

Слѣдовательно,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Этому уравненію и должны удовлетворять координаты любой точки шара.

Въ частности уравненіе шара съ центромъ въ началѣ координатъ принимаетъ видъ

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Пользуясь выведенными уравненіями, покажемъ геометрическое значеніе совокупныхъ уравненій.

Два уравненія

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \tag{1}$$

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r_1^2 \tag{2}$$

представляютъ линію въ пространствѣ. Что это за линія? Уравненіе (1) представляетъ шаръ съ центромъ въ точкѣ $M(a, b, c)$ и радіусомъ, равнымъ r. Уравненіе (2) представляетъ тоже шаръ съ центромъ въ точкѣ $M_1(a_1, b_1, c_1)$ и радіусомъ, равнымъ r_1. Координаты точекъ, лежащихъ на линіи пересѣченія этихъ двухъ шаровъ, должны удовлетворять обоимъ уравненіямъ. Два шара пересѣкаются по кругу. Слѣдовательно, уравненія (1) и (2) совмѣстно представляютъ кругъ въ пространствѣ. Если шары не пересѣкаются, мы будемъ говорить, что эти уравненія представляютъ мнимый кругъ.

Положимъ теперь, что даны три уравненія:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \tag{1}$$

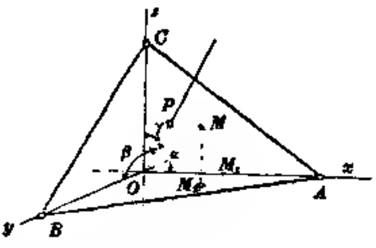
$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r_1^2, \tag{2}$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=r_2^2. \tag{3}$$

Каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности представляетъ шаръ съ опредѣленнымъ центромъ и опредѣленнымъ радіусомъ. Что представляютъ совмѣстно эти три уравненія? Точка, координаты которой удовлетворяютъ всѣмъ тремъ уравненіямъ, должна лежать на каждой изъ этихъ шаровыхъ поверхностей. Слѣдовательно, рѣшая

три уравненія (1), (2), (3) съ тремя неизвѣстными x, y, z, мы найдемъ координаты точекъ пересѣченія трехъ шаровъ. Три шара вообще пересѣкаются въ двухъ точкахъ. Можетъ случиться, что три шара не имѣютъ общихъ точекъ, черезъ которыя проходилъ бы каждый изъ нихъ. Въ этомъ случаѣ уравненія (1), (2), (3) будутъ имѣть мнимыя рѣшенія и мы будемъ говорить, что такіе три шара имѣютъ двѣ общихъ мнимыхъ точки

§ 8. **Уравненіе плоскости.** Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что текущія координаты точки, движущейся по плоскости, связаны въ своемъ измѣненіи уравненіемъ первой степени. Мы разсматривали плоскость, какъ геометрическое мѣсто точекъ, одинаково отстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ, изъ которыхъ за одну мы брали начало координатъ; координаты другой вошли въ коэффиціенты уравненія. Но положеніе плоскости относительно осей координатъ можно опредѣлить иначе; соотвѣтственно этому и коэффиціенты уравненія будутъ имѣть иное геометрическое значеніе. Такъ, за опредѣляющія положеніе плоскости величины можно взять величину перпендикуляра p, опущеннаго на нее изъ начала координатъ, и углы наклона этого перпендикуляра къ осямъ координатъ α, β, γ Углы α, β, γ связаны при этомъ извѣстнымъ (§ 5) соотношеніемъ



Черт. 121.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Составимъ уравненіе плоскости, имѣя эти опредѣляющія ея положеніе величины. Пусть плоскость пересѣкаетъ плоскости координатъ по прямымъ BC, CA и AB (черт. 121). Треугольникъ ABC и представляетъ намъ на чертежѣ разсматриваемую плоскость, которая въ дѣйствительности безгранично простирается во всѣ стороны. Пусть M—какая-нибудь точка этой плоскости, имѣющая координаты x, y, z:

$$OM_1 = x, \quad M_1M_2 = y, \quad M_2M = z .$$

Проектируемъ ломаную OM_1M_2M на перпендикуляръ OP къ этой плоскости, опущенный изъ начала координатъ. Всякая прямая, лежащая въ плоскости и проходящая черезъ основаніе перпендику-

ляра P, перпендикулярна къ прямой OP. Слѣдовательно, прямая MP перпендикулярна къ OP; кромѣ того $OP = p$ и потому

$$np_{OP}\, OM_1M_2M = p \tag{1}$$

Но проекція ломаной равна суммѣ проекцій ея звеньевъ

$$np_{OP}\, OM_1M_2M = np_{OP}\, OM_1 + np_{OP}\, M_1M_2 + np_{OP}\, M_2M$$

Углы наклона звеньевъ этой ломаной къ оси проекцій, т.-е. къ прямой OP, тѣ же самые, что и углы наклона осей координатъ къ этой прямой, именно α, β и γ *). Слѣдовательно,

$$np_{OP}\, OM_1 = x \cos\alpha\,, \quad np_{OP}\, M_1M_2 = y\cos\beta\,, \quad np_{OP}\, M_2M = z\cos\gamma\,,$$

и, согласно равенству (1),

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p\,,$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,. \tag{2}$$

Равенство (1), а слѣдовательно и (2) справедливо только для точекъ, лежащихъ въ плоскости, ибо только въ этомъ случаѣ прямая MP перпендикулярна къ прямой OP. Устанавливая связь между текущими координатами точки, движущейся по плоскости, равенство (2) и будетъ уравненіемъ плоскости.

Мы видимъ, что уравненіе плоскости первой степени относительно текущихъ координатъ, и ясно, по самому его происхожденію, что оно не можетъ быть какой-либо иной степени

Уравненіе (2) называется нормальнымъ уравненіемъ плоскости Какой же характерный признакъ нормальнаго уравненія? Коэффиціенты при x, y, z суть косинусы угловъ α, β и γ, т.-е. числа, не большія единицы. Эти коэффиціенты связаны соотношеніемъ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

Свободный членъ уравненія отрицателенъ. Такимъ образомъ изъ

---

*) Положительное направленіе оси координатъ, которое принимается во вниманіе *при опредѣленіи соотвѣтствующаго угла* α, β *или* γ, не всегда совпадаетъ съ направленіемъ звена. Въ этомъ случаѣ, не измѣняя угла, звено, какъ координату точки, мы при проектированіи считаемъ отрицательнымъ: отъ этого проекція его не мѣняется ни по величинѣ, ни по направленію (ср. стр. 50, 51).

уравненій

$$1)\ 3x - 5y + 8z - 6 = 0,$$

$$2)\ \frac{3}{13}x - \frac{4}{13}y + \frac{12}{13}z - 8 = 0,$$

$$3)\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{6}z + 9 = 0$$

второе будетъ нормальнымъ, ибо свободный членъ отрицателенъ, а коэффиціенты при x, y, z—правильныя дроби, связанныя соотношеніемъ

$$\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1.$$

Первое и третье уравненія, не удовлетворяя подобнымъ условіямъ, не будутъ нормальными.

Выше мы съ двухъ точекъ зрѣнія убѣдились, что всякая плоскость выражается уравненіемъ первой степени относительно текущихъ координатъ x, y, z, именно -или разсматривая плоскость какъ геометрическое мѣсто точекъ, одинаково отстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ (§ 7), или опредѣляя положеніе плоскости величиною перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ начала координатъ и углами наклона этого перпендикуляра къ осямъ координатъ. Но если намъ дано напередъ какое-нибудь уравненіе первой степени относительно текущихъ координатъ x, y, z, будетъ ли оно представлять плоскость?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, покажемъ предварительно, что всякое уравненіе первой степени относительно текущихъ координатъ x, y, z можно привести къ нормальному виду, т.-е. къ виду, обладающему вышеприведенными характерными признаками. каждый изъ коэффиціентовъ при текущихъ координатахъ въ нормальномъ уравненіи долженъ быть не больше единицы, сумма квадратовъ этихъ коэффиціентовъ должна равняться единицѣ и свободный членъ уравненія долженъ быть отрицательнымъ

Пусть дано уравненіе первой степени общаго вида

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Коэффиціенты A, B и C могутъ быть и больше единицы и вообще не обладать желаемыми признаками. Поэтому умножаемъ всѣ члены уравненія на нѣкоторый множитель R, пока намъ неизвѣстный

который долженъ привести данное уравненіе къ нормальному виду и который мы будемъ называть поэтому **нормирующимъ** множителемъ:

$$R\,.\,Ax + R\,.\,By + R\,.\,Cz + R\,.\,D = 0\,.$$

Если это уравненіе нормальнаго вида, то сумма квадратовъ коэффиціентовъ при x, y, z должна равняться единицѣ:

$$R^2A^2 + R^2B^2 + R^2C^2 = 1\,, \quad \text{или} \quad R^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1\,.$$

Отсюда для нормирующаго множителя получаемъ два рѣшенія, противоположныхъ по знаку:

$$R = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \tag{3}$$

Какое же изъ этихъ двухъ рѣшеній выбрать? Свободный членъ нормальнаго уравненія, т. е. RD, долженъ быть **отрицательнымъ**. Слѣдовательно, R и D должны имѣть **противоположные знаки**. Коэффиціентъ D данъ, а знакъ нормирующаго множителя R подлежитъ нашему выбору, и потому для нормирующаго множителя мы получаемъ теперь единственное и опредѣленное рѣшеніе: знакъ нормирующаго множителя долженъ быть противоположенъ знаку свободнаго члена уравненія.

Замѣняя R найденнымъ его значеніемъ (3), мы приводимъ данное уравненіе къ нормальному виду:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,z +$$

$$+ \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0\,,$$

или

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0\,. \tag{4}$$

Примѣръ. Привести уравненіе $3x - 4y + 12z + 8 = 0$ къ нормальному виду.

Рѣшеніе. Вычисляя по предыдущему нормирующій множитель и выбирая соотвѣтствующимъ образомъ его знакъ, получимъ

$$\frac{3x - 4y + 12z + 8}{-\sqrt{9 + 16 + 144}} = 0 \quad \text{или} \quad -\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13}z - \frac{8}{13} = 0\,.$$

Теперь докажемъ, что всякое уравненіе вида

$$Ax+By+Cz+D=0$$

представляетъ плоскость. По приведеніи даннаго уравненія къ нормальному виду:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+$$

$$+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0,$$

припишемъ его коэффиціентамъ соотвѣтствующее геометрическое значеніе, т.-е. то значеніе, какое имѣютъ коэффиціенты нормальнаго уравненія при рѣшеніи обратной задачи — задачи составленія уравненія данной плоскости. Такимъ образомъ назовемъ коэффиціентъ при x косинусомъ нѣкотораго угла α, коэффиціентъ при y — косинусомъ нѣкотораго угла β, коэффиціентъ при z — косинусомъ нѣкотораго угла γ, а свободный членъ обозначимъ черезъ $-p$; этимъ самымъ и опредѣляются введенныя нами величины α, β, γ и p:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad -p=\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Такъ какъ, какъ слѣдуетъ изъ этихъ равенствъ,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

то α, β и γ являются углами наклона нѣкоторой прямой, выходящей изъ начала координатъ O къ осямъ координатъ: α — къ оси Ox, β — къ оси Oy и γ — къ оси Oz. Построивъ эту прямую, отложимъ на ней отрѣзокъ OP отъ начала координатъ, равный p, и черезъ точку P проводимъ плоскость, перпендикулярную къ прямой OP. Положеніе этой плоскости относительно осей координатъ опредѣляется величинами α, β, γ и p, и, составляя уравненіе этой плоскости такъ, какъ это мы дѣлали раньше, мы получимъ его въ видѣ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

или, по замѣнѣ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p ихъ значеніями (5), въ видѣ

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 .$$

Такимъ образомъ построенная нами плоскость имѣетъ уравненіе, равносильное данному, иначе—данное уравненіе представляетъ плоскость, въ чемъ мы и желали убѣдиться.

Приведеніемъ общаго уравненія первой степени къ нормальному виду мы достигли не только того, что доказали, что оно представляетъ плоскость, но также и того, что узнали геометрическое значеніе его коэффиціентовъ: по формуламъ (5) мы можемъ вычисленіемъ опредѣлить разстояніе p начала координатъ отъ плоскости, можемъ вычисленіемъ опредѣлить направленіе перпендикуляра къ этой плоскости, опредѣляя углы α, β, γ. Этими величинами можно воспользоваться при рѣшеніи соотвѣтствующихъ задачъ относительно плоскости. Къ такимъ задачамъ прежде всего относятся слѣдующія: 1) опредѣлить уголъ между двумя плоскостями и 2) опредѣлить разстояніе точки, данной своими координатами, отъ плоскости, данной своимъ уравненіемъ.

§ 9. **Опредѣленіе угла между двумя плоскостями.** Пусть даны двѣ плоскости своими уравненіями

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 .$$

Уголъ между этими плоскостями можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ. Уголъ между плоскостями равенъ, какъ извѣстно, углу между перпендикулярами къ нимъ; уголъ же между этими перпендикулярами, какъ уголъ между двумя прямыми, можемъ опредѣлить по формулѣ (5) § 5. Обозначая этотъ уголъ черезъ φ, мы должны имѣть

$$\cos\varphi = \cos\alpha \, . \cos\alpha_1 + \cos\beta \, . \cos\beta_1 + \cos\gamma \, . \cos\gamma_1 ,$$

гдѣ α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 суть углы, составляемые этими перпендикулярами съ осями координатъ. Но формулы (5) предыдущаго параграфа даютъ

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} , \qquad \cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} ,$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} , \qquad \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} ,$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ; \qquad \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} .$$

Замѣняя косинусы ихъ выраженіями, получимъ формулу для вычисленія косинуса угла между данными плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{(\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2})\,.\,(\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2})}. \qquad (6)$$

Знаки передъ радикалами вполнѣ опредѣленные соотвѣтстенно принятому правилу приведенія уравненія плоскости къ нормальному виду Поэтому по формулѣ (6) вычисляется косинусъ того изъ двухъ смежныхъ угловъ между двумя плоскостями, внутри котораго не лежитъ начало координатъ, ибо этому углу равенъ уголъ между перпендикулярами, опущенными изъ начала координатъ на данныя плоскости.

Условіе перпендикулярности двухъ плоскостей. Если плоскости перпендикулярны, т.-е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = 0$, и поэтому

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Условіе параллельности Въ случаѣ параллельности плоскостей

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1, \quad \cos\beta = \cos\beta_1, \quad \cos\gamma = \cos\gamma_1.$$

Но $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ пропорціональны коэффиціентамъ A, B, C, а $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ пропорціональны коэффиціентамъ A_1, B_1, C_1, поэтому при параллельности плоскостей коэффиціенты при текущихъ координатахъ ихъ уравненій должны быть пропорціональны:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Примѣръ. Даны четыре плоскости своими уравненіями

$$1)\ x + 2y + 2z - 6 = 0. \quad 2)\ 3x - 4y + 12z + 8 = 0,$$

$$3)\ 3x + 6y + 6z - 5 = 0, \quad 4)\ 4x + 6y + z + 6 = 0.$$

Нѣтъ ли среди этихъ плоскостей параллельныхъ или перпендикулярныхъ?

Рѣшеніе. Первая и вторая плоскости не параллельны и не перпендикулярны, ибо не выполняется ни условіе параллельности (коэффиціенты 1, 2, 2 не пропорціональны коэффиціентамъ 3, —4, 12), ни условіе перпендикулярности [$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 1.3 + 2\,(-4) + 2.12 \neq 0$].

Первая и третья плоскости параллельны, ибо

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$$

Вторая и четвертая плоскости перпендикулярны, ибо

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 6 + 12 \cdot 1 = 0.$$

Вычислимъ косинусъ угла φ между первой и второй плоскостью.

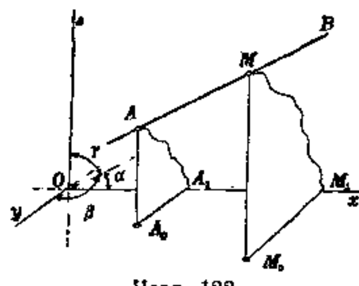
$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 12 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot (-\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2})} = \frac{19}{-3 \cdot 13} = -\frac{19}{39} \sim 0{,}49.$$

Слѣдовательно, уголъ φ немного меньше 120^0.

§ 10. **Уравненіе прямой линіи въ пространствѣ.** Прямая линія, какъ всякая линія въ пространствѣ, должна опредѣляться совокупностью двухъ уравненій, а такъ какъ прямая линія можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, то она должна опредѣляться двумя уравненіями первой степени:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Но можно получить уравненіе прямой въ болѣе симметричномъ видѣ относительно всѣхъ трехъ координатъ. Положеніе прямой опредѣляется вполнѣ положеніемъ одной ея точки и направленіемъ. Пусть A (черт. 122), данная точка прямой, имѣетъ координаты x_1, y_1, z_1, а направленіе прямой пусть опредѣляется углами α, β, γ, составляемыми ею или прямою, выходящей параллельно ей изъ начала координатъ, съ осями координатъ. Возьмемъ на прямой какую-нибудь точку $M(x, y, z)$. Проектируя отрѣзокъ прямой AM на ось Ox, получаемъ



Черт. 122.

$$np_x AM = AM \cdot \cos\alpha = A_1M_1;$$

но

$$A_1M_1 = x - x_1,$$

поэтому

$$AM \cdot \cos\alpha = x - x_1. \quad (2)$$

Подобнымъ же образомъ проектируя отрѣзокъ AM на другія оси координатъ, найдемъ

$$AM \cdot \cos\beta = y - y_1 \quad \text{и} \quad AM \cdot \cos\gamma = z - z_1. \quad (3)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) слѣдуетъ

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}. \qquad (4)$$

При перемѣщенiи точки M по прямой эти равенства, въ которыхъ x, y, z суть текущiя координаты движущейся точки, всегда имѣютъ мѣсто и являются уравненiями прямой.

Такимъ образомъ, уравненiя прямой мы получили въ видѣ ряда равныхъ отношенiй; этотъ видъ называется каноническимъ.

Умножая знаменатели въ уравненiяхъ прямой (4) на k и полагая

$$k.\cos\alpha=L,\quad k.\cos\beta=M,\quad k.\cos\gamma=N, \qquad (5)$$

получимъ равносильныя уравненiя, но въ болѣе общемъ видѣ

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}. \qquad (6)$$

Разнообразными способами систему уравненiй (1) можно преобразовать въ равносильную систему вида (6). Коэффицiенты L, M, N, какъ слѣдуетъ изъ равенствъ (5), пропорцiональны косинусамъ угловъ наклона прямой къ осямъ координатъ и опредѣляютъ такимъ образомъ направленiе прямой. Мы будемъ называть ихъ коэффицiентами направленiя. По даннымъ коэффицiентамъ L, M, N можно опредѣлить и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ (5) имѣемъ

$$k^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=L^2+M^2+N^2,$$

откуда

$$k^2=L^2+M^2+N^2 \quad \text{и} \quad k=\pm\sqrt{L^2+M^2+N^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\cos\alpha=\pm\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \qquad (7)$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

Знакъ передъ радикаломъ можно выбрать какой угодно соотвѣтственно тому, какое направленiе прямой мы считаемъ положительнымъ.

Такимъ образомъ, по даннымъ уравненіямъ прямой вычисленіемъ можно опредѣлить направленіе ея, а стало быть по формуламъ § 5 вычисленіемъ можно опредѣлить и уголъ φ между двумя прямыми, данными уравненіями.

Опредѣленіе угла между двумя прямыми. Даны двѣ прямыя своими уравненіями

$$\frac{x-a}{L}=\frac{y-b}{M}=\frac{z-c}{N} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{L_1}=\frac{y-b_1}{M_1}=\frac{z-c_1}{N_1},$$

гдѣ a, b, c координаты опредѣленной точки первой прямой и L, M, N — ея коэффиціенты направленія, а a_1, b_1, c_1 — координаты нѣкоторой опредѣленной точки второй прямой и L_1, M_1, N_1 ея коэффиціенты направленія. Косинусы угловъ наклона α, β, γ первой прямой и α_1, β_1, γ_1 второй къ осямъ координатъ опредѣляются по формуламъ (7):

$$\cos\alpha=\pm\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \qquad \cos\alpha_1=\pm\frac{L_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \qquad \cos\beta_1=\pm\frac{M_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \qquad \cos\gamma_1=\pm\frac{N_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}.$$

Косинусъ угла φ между этими прямыми опредѣляется по формулѣ (5) § 5:

$$\cos\varphi=\cos\alpha.\cos\alpha_1+\cos\beta.\cos\beta_1+\cos\gamma.\cos\gamma_1.$$

Послѣ замѣны косинусовъ угловъ α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 ихъ выраженіями получимъ

$$\cos\varphi=\pm\frac{LL_1+MM_1+NN_1}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}\,.\,\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}. \tag{8}$$

Изъ этой формулы вытекаетъ условіе перпендикулярности; при $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=0$ и слѣдовательно,

$$LL_1+MM_1+NN_1=0.$$

Условіе параллельности вытекаетъ изъ самаго значенія (7) коэффиціентовъ L, M, N и L_1, M_1, N_1.

$$\frac{L}{L_1}=\frac{M}{M_1}=\frac{N}{N_1}.$$

Если къ разсматриваемой прямой провести перпендикулярную плоскость, то косинусы угловъ направленія прямой и перпендикуляра къ плоскости должны быть равны, иначе коэффиціенты A, B, C соотвѣтственно пропорціональны коэффиціентамъ L, M, N:

$$\frac{A}{L}=\frac{B}{M}=\frac{C}{N}.$$

Напримѣръ, плоскость, выражаемая уравненіемъ

$$3x+4y+12z-26=0,$$

и прямая линія, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{12},$$

перпендикулярны, такъ какъ въ обоихъ случаяхъ

$$\cos\alpha=\frac{3}{13},\quad \cos\beta=\frac{4}{13},\quad \cos\gamma=\frac{12}{13}.$$

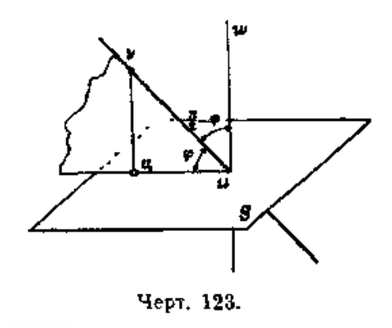
Опредѣленіе угла наклона прямой къ плоскости. Уголъ между прямой и плоскостью равенъ углу между этой прямой и ея проекціей на плоскость и по даннымъ уравненіямъ прямой и плоскости также можетъ быть вычисленъ.

Въ самомъ дѣлѣ, направленіе данной прямой uv (черт. 123) опредѣляется косинусами:

$$\cos\alpha=\frac{L}{\pm\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{M}{\pm\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{N}{\pm\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$



Черт. 123.

а направленіе перпендикуляра uw къ данной плоскости S опредѣляется косинусами

$$\cos\alpha'=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta'=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma'=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Но

$$\widehat{v\,u\,w} = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\alpha . \cos\alpha' + \cos\beta . \cos\beta' + \cos\gamma . \cos\gamma'.$$

Слѣдовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \ldots \quad (9).$$

Условіе параллельности плоскости и прямой Если прямая параллельна плоскости, то $\varphi = 0$ и $\sin\varphi = 0$. Слѣдовательно,

$$AL + BM + CN = 0.$$

A, B, C, какъ слѣдуетъ изъ нормальнаго уравненія плоскости, являются коэффиціентами направленія перпендикуляра къ плоскости [перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ, а стало быть и какого угодно перпендикуляра]. Слѣдовательно, условіе параллельности прямой и плоскости является условіемъ перпендикулярности данной прямой и перпендикуляра къ данной плоскости, что ясно и геометрически.

Условіе перпендикулярности плоскости и прямой. Коэффиціенты уравненія плоскости A, B, C, какъ мы видѣли, являются коэффиціентами направленія перпендикуляра къ плоскости. Поэтому, если прямая съ коэффиціентами направленія L, M, N перпендикулярна плоскости, то она будетъ параллельна къ перпендикуляру этой плоскости. Слѣдовательно,

$$\frac{L}{A} = \frac{M}{B} = \frac{N}{C}.$$

Примѣръ 1. Дана плоскость уравненіемъ $2x + y + 2z - 8 = 0$ и прямая уравненіями $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{12}$. Опредѣлить уголъ наклона данной прямой въ данной плоскости.

Рѣшеніе. Коэффиціенты направленія прямой 3, 4 и 12, а коэффиціенты направленія перпендикуляра къ плоскости 2, 1, 2. Если обозначимъ уголъ наклона прямой къ плоскости черезъ φ, то по формулѣ (9) будемъ имѣть

$$\sin\varphi = \frac{2.3 + 1.4 + 2.12}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{6 + 4 + 24}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{169}} = \frac{34}{3.13} = \frac{34}{39}.$$

Уголъ φ близокъ къ прямому, такъ какъ величина $\sin\varphi$, равная $\frac{34}{39}$, близка къ единицѣ.

Примѣръ 2. Черезъ точку $M(3, -1, 7)$ провести прямую, перпендикулярную къ плоскости $3x+2y-5z+6=0$ и составить уравненія этого перпендикуляра.

Рѣшеніе. Уравненія прямой напишемъ въ каноническомъ видѣ, т.-е. въ видѣ ряда равныхъ отношеній:

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}.$$

Задача состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить постоянныя величины, входящія въ это уравненіе, т.-е. x_1, y_1, z_1 и L, M, N. Числа x_1, y_1, z_1 являются координатами нѣкоторой точки прямой. За такую точку можно принять точку $M(3, -1, 7)$. Слѣдовательно можно положить

$$x_1=3, \quad y_1=-1, \quad z_1=7.$$

L, M, N—коэффиціенты направленія прямой, а коэффиціенты при текущихъ координатахъ въ уравненіи данной плоскости, т.-е. числа $3, 2, -5$ пропорціональны косинусамъ угловъ наклона къ осямъ координатъ перпендикуляра къ данной плоскости. Искомая прямая должна быть перпендикулярна къ данной плоскости. Слѣдовательно, коэффиціенты направленія L, M, N должны быть пропорціональны числамъ $3, 2, -5$:

$$L:M:N=3:2:-5,$$

т.-е. $3, 2, -5$ могутъ быть приняты за коэффиціенты направленія искомой прямой, и уравненіе ея будетъ имѣть видъ

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-7}{-5}.$$

Примѣръ 3. Черезъ точку $M(3, -1, 7)$ провести плоскость перпендикулярную прямой, данной уравненіями

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{6}.$$

Рѣшеніе. Пусть искомое уравненіе плоскости будетъ

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Эта плоскость должна по условію проходить черезъ данную точку $M(3, -1, 7)$. Слѣдовательно,

$$3A-B+7C+D=0.$$

Почленнымъ вычитаніемъ исключаемъ коэффиціентъ D

$$A(x-3)+B(y+1)+C(z-7)=0.$$

При произвольныхъ коэффиціентахъ A, B, C это уравненіе представляетъ любую плоскость, проходящую черезъ точку $M(3, -1, 7)$. Изъ нихъ нужно выбрать ту, которая перпендикулярна данной прямой, т.-е. A, B, C должны быть пропорціональны коэффиціентамъ направленія данной прямой.

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{4} = \frac{C}{6}.$$

Такимъ образомъ, въ уравненіи плоскости

$$A(x-3) + B(y+1) + C(z-7) = 0$$

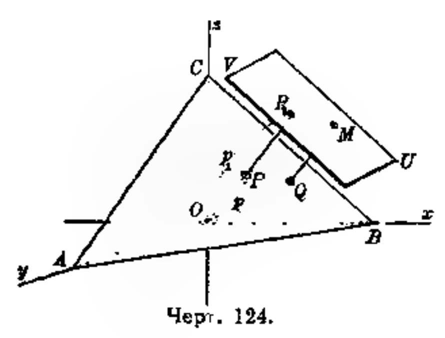
вмѣсто A, B, C можно взять какія угодно числа, пропорціональныя числамъ 5, 4, 6, напр. равныя этимъ числамъ:

$$5(x-3) + 4(y+1) + 6(z-7) = 0.$$

§ 11. **Опредѣленіе разстоянія точки отъ плоскости.** Пусть дана точка своими координатами $M(x_1, y_1, z_1)$ и нѣкоторая плоскость своимъ уравненіемъ

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

По этимъ даннымъ требуется опредѣлить разстояніе точки M отъ данной плоскости, т.-е. опредѣлить величину перпендикуляра (черт. 124) MQ, опущеннаго изъ этой точки на плоскость.



Черт. 124.

Будемъ обозначать этотъ перпендикуляръ черезъ d:

$$d = MQ$$

Проведемъ черезъ точку M плоскость UV, параллельную данной плоскости ABC. Разстояніе между этими плоскостями вездѣ одинаково и равно искомому разстоянію d данной точки отъ данной плоскости. Опускаемъ изъ начала координатъ O перпендикуляръ OP на данную плоскость ABC и продолжаемъ его до пересѣченія съ проведенной плоскостью UV въ точкѣ P_1. Обозначимъ черезъ p и p_1 разстоянія начала координатъ до первой и второй плоскости

$$OP = p \quad \text{и} \quad OP_1 = p_1.$$

Какъ видно изъ чертежа 124,

$$QM = PP_1 = OP_1 - OP = p_1 - p = d .$$

Такимъ образомъ, задача сводится къ опредѣленію p и p_1.

Приводимъ уравненіе данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ къ нормальному виду.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\mp\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \tag{2}$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2'}$$

если положимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\beta, \\ \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\gamma, \quad \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -p \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Знакъ передъ радикаломъ выбирается противоположнымъ знаку свободнаго члена D въ данномъ уравненіи. Углы α, β, γ суть углы наклона прямой OP къ осямъ координатъ

Такимъ образомъ, p можетъ считаться опредѣленнымъ:

$$p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} . \tag{3'}$$

Уравненіе второй плоскости UV будетъ отличаться отъ уравненія первой (2') только въ послѣднемъ членѣ, такъ какъ углы наклона перпендикуляра P на нее къ осямъ координатъ одни и тѣ же. Если бы начало координатъ было между плоскостями ABC и UV, то мы считали бы углы наклона перпендикуляра къ осямъ координатъ одинаковыми, но p_1 пришлось бы тогда считать отрицательнымъ *), а не положительнымъ, какъ принято при приведеніи уравненія плоскости къ нормальному виду. Такимъ образомъ, уравненіе второй плоскости должно имѣть видъ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0. \tag{4}$$

гдѣ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ опредѣляются формулами (3), а p_1 еще неизвѣстно и подлежитъ опредѣленію.

---

*) Ср. стр. 58.

Уравненію (4) должны удовлетворять координаты любой точки плоскости UV, стало быть, и координаты x_1, y_1, z_1 данной точки M. Такимъ образомъ, должно имѣть мѣсто равенство *)

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p_1 = 0. \tag{5}$$

Въ этомъ равенствѣ всѣ величины, кромѣ p_1, уже извѣстны: x_1, y_1, z_1 даны, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ опредѣлены формулами (3).

Изъ равенства (5) опредѣляемъ p_1:

$$p_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma. \tag{6}$$

Искомое разстояніе d, равное $p_1 - p$, теперь вполнѣ опредѣлилось:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p. \tag{7}$$

Подставляя вмѣсто $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p ихъ выраженія (3), получимъ величину искомаго разстоянія выраженной непосредственно черезъ данныя:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7'}$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія разстоянія данной точки отъ плоскости, данной уравненіемъ, надо привести уравненіе плоскости къ нормальному виду; первая часть этого уравненія при $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ и выражаетъ искомое разстояніе.

Разстояніе точки отъ плоскости, вычисленное по формулѣ (7) или (7'), можетъ оказаться и отрицательнымъ. По исходному опредѣленію $d = p_1 - p$. Самый способъ приведенія даннаго уравненія къ нормальному виду предполагаетъ для p положительное значеніе, но p_1 можетъ быть и отрицательнымъ. Разстояніе $d = p_1 - p$ будетъ положительнымъ, если $p_1 > p$ и отрицательнымъ, если $p_1 < p$. Если $p_1 > p$, то точка M и начало координатъ O лежатъ по разныя стороны отъ данной плоскости, а при $p_1 < p$ эти точки M и O лежатъ по одну сторону отъ данной плоскости.

Примѣръ. Опредѣлить разстояніе точки $M(-3, -2, 1)$ отъ плоскости данной уравненіемъ:

$$2x - y + 2z + 12 = 0.$$

---

*) Это равенство не есть уравненіе плоскости! — Ибо въ этомъ равенствѣ нѣтъ текущихъ координатъ.

Р ѣ ш е н і е. Нормальное уравненіе данной плоскости

$$\frac{2x - y + 2z + 12}{-\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 0.$$

Слѣдовательно,

[illegible] $$= \frac{2.(-3) - (-2) + 2.1 + 12}{-\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{-6 + 2 + 2 + 12}{-3} = -3^1/_3$$

Такимъ образомъ, сопоставляя содержаніе параграфовъ 9, 10 и 11, мы видимъ, что преобразованіемъ уравненія плоскости къ н о р м а л ь н о м у виду и преобразованіемъ уравненій прямой въ уравненія въ видѣ р я д а р а в н ы х ъ о т н о ш е н і й (4) мы рядъ геометрическихъ вопросовъ, касающихся прямой и плоскости, сводимъ къ вычисленію, достигая такимъ образомъ главной цѣли аналитической геометріи.

О с н о в н ы е в о п р о с ы. 1. Что такое уравненіе плоскости? Какой оно степени?

2. Какое геометрическое значеніе имѣютъ коэффиціенты нормальнаго уравненія плоскости?

3. По какой формулѣ вычисляется уголъ между двумя плоскостями, данными своими уравненіями?

4. Условіе параллельности двухъ плоскостей?

5. Условіе перпендикулярности двухъ плоскостей?

6. Что такое уравненія прямой въ пространствѣ? Сколько уравненій необходимо и достаточно для опредѣленія прямой?

7. Какое геометрическое значеніе имѣютъ коэффиціенты каноническихъ уравненій прямой?

8. По какой формулѣ вычисляется уголъ между двумя прямыми, данными своими уравненіями?

9. Условіе параллельности двухъ прямыхъ?

10. Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ?

11. По какой формулѣ вычисляется уголъ наклона прямой къ плоскости?

12. Условіе параллельности прямой и плоскости?

13. Условіе перпендикулярности прямой и плоскости?

14. Какъ вычислить разстояніе точки, данной своими координатами, отъ плоскости, данной своимъ уравненіемъ?

15. Какое геометрическое значеніе знака, получаемаго въ результатѣ предыдущаго (14) вычисленія?

О с н о в н ы я з а д а ч и. 1. Составить уравненіе плоскости, проходящей черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ параллельно данной плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

2. Составить уравненіе плоскости, проходящей черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной двумъ даннымъ плоскостямъ

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

3. Составить уравненія прямой, проходящей черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и параллельно данной прямой

$$\frac{x-a}{L_1}=\frac{y-b}{M_1}=\frac{z-c}{N_1}.$$

4. Составить уравненія прямой, проходящей черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной данной плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

5. Составить уравненія прямой, проходящей черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и параллельной двумъ даннымъ плоскостямъ

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{и} \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

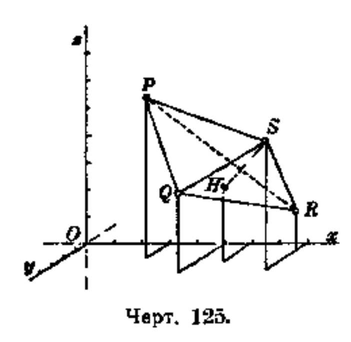
6. Какъ опредѣлить коэффиціенты направленія прямой пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей?

УПРАЖНЕНІЯ.

Даны координаты четырехъ вершинъ тетраэдра:

$$P(3,\ 2,\ 6),\quad Q(5,\ 4,\ 3),\quad R(8,\ 1,\ 1^1/_2),\quad S(8,\ 3^1/_2,\ 4^3/_4)$$

(черт. 125). 1) Опредѣлить координаты основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ тетраэдра на противоположныя грани. 2) Опредѣлить высоты тетраэдра. 3) Опредѣлить углы наклона каждой высоты къ ребрамъ, выходящимъ изъ той же вершины, какъ и высота 4) Опредѣлить уголъ наклона реберъ тетраэдра къ гранямъ его. 5) Опредѣлить координаты центра описаннаго шара. 6) Опредѣлить координаты центра вписаннаго шара. 7) Опредѣлить ребра тетраэдра. 8) Показать, что прямыя, соединяющія середины противоположныхъ реберъ тетраэдра, проходятъ черезъ одну точку и дѣлятся въ этой точкѣ пополамъ.



Черт. 125.

Рѣшеніе. 1) Будемъ разсматривать перпендикуляръ, опущенный изъ вершины S на грань PQR. Пусть основаніе этого перпендикуляра будетъ H. Координаты точки H удовлетворяютъ уравненію плоскости PQR и уравненіямъ прямой SH. Составимъ эти уравненія.

Уравненіе плоскости PQR. Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ — искомое уравненіе. Координаты точекъ $P(3,\ 2,\ 6)$, $Q(5,\ 4,\ 3)$ и $R(8,\ 1,\ 1^1/_2)$ должны удовлетворять этому уравненію:

$$3A+2B+6C+D=0,$$
$$5A+4B+3C+D=0,$$
$$8A+B+1^1/_2C+D=0.$$

Раздѣляя всѣ члены этихъ равенствъ на D, получимъ три уравненія для опредѣленія неизвѣстныхъ трехъ отношеній $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$:

$$3\frac{A}{D} + 2\frac{B}{D} + 6\frac{C}{D} = -1,$$

$$5\frac{A}{D} + 4\frac{B}{D} + 3\frac{C}{D} = -1,$$

$$8\frac{A}{D} + \frac{B}{D} + 1\frac{1}{2}\frac{C}{D} = -1.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ:

$$\frac{A}{D} = -\frac{1}{10}, \quad \frac{B}{D} = -\frac{1}{20}, \quad \frac{C}{D} = -\frac{1}{10}.$$

Слѣдовательно, уравненіе плоскости PQR имѣетъ видъ

$$-\frac{x}{10} - \frac{y}{20} - \frac{z}{10} + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 2x + y + 2z - 20 = 0. \tag{1}$$

Уравненіе прямой SH. Такъ какъ прямая SH перпендикулярна къ плоскости PQR, то коэффиціенты направленія прямой SH пропорціональны коэффиціентамъ при текущихъ координатахъ уравненія плоскости:

$$\frac{L}{2} = \frac{M}{1} = \frac{N}{2}.$$

Такимъ образомъ, уравненія прямой, проходящей черезъ точку $S(8,\ 3\frac{1}{2},\ 4\frac{3}{4})$, должны имѣть видъ

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-4\frac{3}{4}}{2}. \tag{2}$$

Для отысканія координатъ точки H нужно рѣшить совмѣстно уравненія (1) и (2). Называя общее отношеніе уравненій (2) черезъ λ, будемъ имѣть

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-4\frac{3}{4}}{2} = \lambda,$$

откуда

$$x = 8 + 2\lambda, \quad y = 3\frac{1}{2} + \lambda, \quad z = 4\frac{3}{4} + 2\lambda.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (1) плоскости PQR, получимъ

$$2\,.\,(8 + 2\lambda) + (3\frac{1}{2} + \lambda) + 2(4\frac{3}{4} + 2\lambda) - 20 = 0, \quad \text{или} \quad 9\lambda + 9 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = -1.$$

Слѣдовательно,

$$x = 8 - 2 = 6, \quad y = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}, \quad z = 4\frac{3}{4} - 2 = 2\frac{3}{4}.$$

Отвѣтъ: $H(6,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4})$.

2) Опредѣленіе высоты SH тетраэдра. SH можно опредѣлить, какъ разстояніе точки $S(8,\ 3\frac{1}{2},\ 4\frac{3}{4})$ отъ плоскости PQR, уравненіе которой уже извѣстно: $2x + y + 2z - 20 = 0$.

$$SH = \frac{2\,.\,8 + 3\frac{1}{2} + 2\,.\,4\frac{3}{4} - 20}{+\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{16 + 3\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} - 20}{3} = 3.$$

Отвѣтъ: $SH = 3$.

3) Уравненія прямой SH уже извѣстны

$$\frac{x-8}{2}=\frac{y-3\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-4\frac{3}{4}}{2}.$$

Составимъ теперь уравненія прямой SP. Принимая во вниманіе, что прямая SP проходитъ черезъ точку $S\left(8,\ 3\frac{1}{2},\ 4\frac{3}{4}\right)$, мы можемъ написать уравненія этого ребра въ слѣдующемъ видѣ.

$$\frac{x-8}{L}=\frac{y-3\frac{1}{2}}{M}=\frac{z-4\frac{3}{4}}{N}.$$

Коэффиціенты направленія пока неизвѣстны. Но та же прямая проходитъ черезъ точку $P(3,\ 2,\ 6)$. Слѣдовательно, координаты этой точки должны удовлетворять предыдущимъ уравненіямъ:

$$\frac{3-8}{L}=\frac{2-3\frac{1}{2}}{M}=\frac{6-4\frac{3}{4}}{N},\quad \text{или}\quad \frac{L}{5}=\frac{M}{1\frac{1}{2}}=\frac{N}{-1\frac{1}{4}}.$$

Такимъ образомъ, уравненія прямой SP теперь вполнѣ опредѣлились:

$$\frac{x-8}{5}=\frac{y-3\frac{1}{2}}{1,5}=\frac{z-4\frac{3}{4}}{-1,25}.$$

Уголъ между прямыми SH и SP пусть будетъ φ

$$\cos\varphi=\frac{5.2+1,5.1-1,25.2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{5^2+1,5^2+1,25^2}}=\frac{3}{\sqrt{28,8125}}$$

$\log.\cos\varphi=\overline{1},74733$; $\varphi=56^0\,1'\,13''$

Отвѣтъ: $\varphi=56^0\ 1'\ 13''$

4) Обозначимъ уголъ наклона прямой SP къ грани PQR черезъ ψ.

$$\sin\psi=\frac{3}{\sqrt{28,8125}}.$$

Отвѣтъ. $\psi=33^0\ 58'\ 47''$.

5) Указаніе. Обозначимъ центръ описаннаго шара черезъ M, координаты точки M неизвѣстны. По условію имѣемъ

$$MP=MQ,\quad MP=MR,\quad MP=MS$$

Примѣняя формулы разстоянія, получимъ три уравненія съ тремя неизвѣстными. Рѣшая ихъ и найдемъ искомыя координаты центра описаннаго шара.

6) Указаніе. Если N — центръ вписаннаго шара, то разстоянія точки N отъ граней тетраэдра $PQRS$ равны между собою. Примѣняя формулу для опредѣленія разстоянія точки отъ плоскости, уравненіе которой дано, и сравнивая полученныя выраженія, мы получимъ достаточное число уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ координатъ точки N. При этомъ нужно обратить вниманіе на положеніе начала координатъ относительно даннаго тетраэдра и на знакъ выраженій, опредѣляющихъ разстоянія точки N, лежащей внутри тетраэдра $PQRS$, отъ граней его.

7) Отвѣтъ. $PQ=\sqrt{17}\sim 4,1$ и т. д.

8) Указаніе. Опредѣляются координаты серединъ противоположныхъ реберъ и потомъ координаты середины разстоянія между этими серединами. Какія бы пары противоположныхъ реберъ ни взяли, получимъ одну и ту же точку.

ГЛАВА VIII.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. **Поверхности, представляемыя уравненіями второй степени относительно текущихъ координатъ.** Поверхность, представляемая уравненіемъ второй степени относительно координатъ x, y, z, т.-е. уравненіемъ вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \qquad (1)$$

называется поверхностью второго порядка, такъ какъ съ каждою прямой такая поверхность имѣетъ не болѣе двухъ общихъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, мы ищемъ точки пересѣченія поверхности съ прямою, выражаемой уравненіями

$$\frac{x-a}{L} = \frac{y-b}{M} = \frac{z-c}{N}. \qquad (2)$$

Рѣшая совмѣстно уравненіе (1) и два изъ уравненій (2), мы найдемъ два рѣшенія x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Каждое изъ этихъ рѣшеній и даетъ точку перасѣченія прямой съ поверхностью. Если эти рѣшенія дѣйствительны, прямая дѣйствительно пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ; если рѣшенія мнимы, прямая не пересѣкаетъ поверхности; если оба рѣшенія совпадаютъ, обѣ точки пересѣченія сливаются въ одну и прямая касается поверхности.

При рѣшеніи уравненій (1) и (2) всего проще ввести новое неизвѣстное t, равное общему отношенію въ уравненіяхъ (2):

$$\frac{x-a}{L} = \frac{y-b}{M} = \frac{z-c}{N} = t$$

Отсюда

$$x = a + Lt, \quad y = b + Mt, \quad z = c + Nt \qquad (3)$$

Вставляя эти выраженія въ уравненіе поверхности (1), получимъ

$$A(a + Lt)^2 + B(b + Mt)^2 + C(c + Nt)^2 + D(a + Lt)(b + Mt) + E(a + Lt)(c + Nt) +$$
$$+ F(b + Mt)(c + Nt) + G(a + Lt) + H(b + Mt) + I(c + Nt) + K = 0.$$

Раскрывая скобки и располагая выраженіе въ первой части по степенямъ t, будемъ имѣть

$$Pt^2 + Qt + R = 0, \tag{4}$$

гдѣ P, Q и R—сокращенныя обозначенія полученныхъ коэффиціентовъ предыдущаго уравненія. Опредѣливъ отсюда t, по формуламъ (3) вычисляемъ и искомыя координаты x, y, z.

Можетъ случиться, что величины a, b, c и L, M, N, входящія въ уравненія прямой, будутъ таковы, что коэффиціенты P, Q, R уравненія (4) обратятся въ нули:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Въ такомъ случаѣ уравненіе (4) имѣетъ неопредѣленное рѣшеніе для t, а слѣдовательно, и координаты (3) x, y, z, удовлетворяющія уравненіямъ (1) и (2), будутъ неопредѣленными, т.-е. всякая точка прямой (2) принадлежитъ и поверхности (1), иначе — прямая (2) умѣщается всѣми своими точками на поверхности второго порядка. Такимъ образомъ прямая или пересѣкаетъ поверхность второго порядка въ двухъ точкахъ, или ее совсѣмъ не пересѣкаетъ, или касается поверхности, или умѣщается всѣми своими точками на поверхности.

Мы ограничимся изслѣдованіемъ только отдѣльныхъ типовъ поверхностей второго порядка; именно разсмотримъ слѣдующія четыре группы:

I. Поверхности, уравненія которыхъ не содержатъ одной или двухъ текущихъ координатъ, т.-е. уравненія вида

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, z) = 0, \quad f(y, z) = 0, \quad f(x) = 0 \text{ и т. д.}$$

и притомъ только слѣдующіе частные случаи этихъ уравненій:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad 2)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad 3)\ y^2 - 2px = 0,$$

$$4)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad 5)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad 6)\ z^2 = c^2, \quad 7)\ z^2 + c^2 = 0, \quad 8)\ z^2 = 0.$$

II. Поверхности, уравненія которыхъ однородны относительно координатъ x, y, z, т.-е. каждый членъ уравненія—одного измѣренія относительно текущихъ координатъ:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad 2)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

III. Поверхности, выражаемыя уравненіями вида:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\quad 2)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,\quad 3)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,,$$

$$4)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

IV. Поверхности, выражаемыя уравненіями

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \text{ при чемъ } p>0\,,\ q>0.$$

Путемъ преобразованія координатъ *) общее уравненіе второй степени можетъ быть сведено къ одному изъ этихъ типовъ.

О формѣ поверхности, данной уравненіемъ, можно судить по ряду сѣченій съ плоскостями. Всего проще опредѣляются сѣченія съ плоскостями координатъ и плоскостями, имъ параллельными.

Относительно изображенія изучаемой поверхности на чертежѣ должно замѣтить слѣдующее. Абрисъ или контуръ изображенія поверхности раздѣляетъ ее на двѣ части: одну переднюю, которая видна зрителю чертежа, и другую, которая этою переднею стороной отъ него закрыта. Если какая-либо линія начерчена на передней видной сторонѣ поверхности, то мы будемъ изображать ее сплошной линіей (черт. 126); если линія начерчена на закрытой части поверхности, то будемъ изображать ее пунктиромъ, а если линія переходитъ изъ видной части поверхности на закрытую, то изображеніе ея на чертежѣ касается абриса и въ точкѣ прикосновенія раздѣляется на двѣ части: видную (сплошная линія) и закрытую (пунктирная линія). Иногда ради большей выпуклости чертежа, пунктиры на закрытой части поверхности совсѣмъ можно опустить.



Черт. 126.

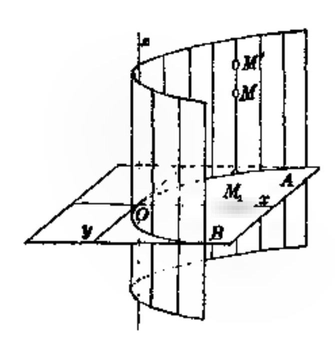
§ 2. **Цилиндры.** Изъ первой группы разсмотримъ уравненіе 3), изслѣдованіе же двухъ первыхъ будетъ совершенно аналогично.

Уравненіе

$$y^2=2px \tag{1}$$

*) Формулы преобразованія координатъ въ пространствѣ можно установить аналогично формуламъ преобразованія координатъ на плоскости.

представляетъ, какъ мы знаемъ, на плоскости xy параболу AOB, а въ пространствѣ цилиндрическую поверхность съ этимъ параболическимъ основаніемъ или сѣченіемъ, и образующими, параллельными оси z (черт. 127). Въ самомъ дѣлѣ, если $M_1(x_1, y_1)$ — какая нибудь точка параболы, а прямая M_1M проведена параллельно оси Oz, то координаты любой точки M этой прямой x_1, y_1, z_1 будутъ удовлетворять уравненію (1), к а к о в о б ы н и б ы л о z, ибо по условію точка $M_1(x_1, y_1)$ лежитъ на параболѣ



Черт. 127.

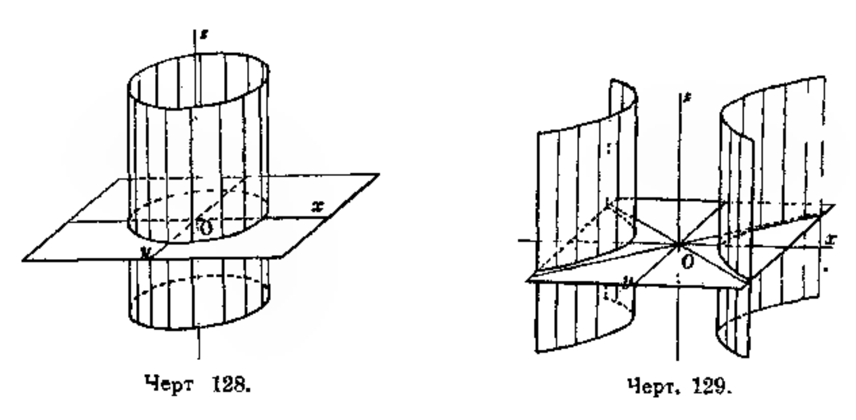
$$y_1^2 = 2px_1;$$

а z_1 въ уравненіе (1) совсѣмъ не входитъ, иначе — входитъ съ коэффиціентами равными нулю.

Точно также уравненія

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

представляютъ цилиндрическія поверхности съ образующими, параллельными оси Oz, а сѣченіями первое съ эллиптическимъ



Черт 128. Черт. 129.

(черт. 128), а второе съ гиперболическимъ (черт. 129). Вообще уравненіе, въ которомъ отсутствуетъ какая-нибудь координата, представляетъ цилиндрическую поверхность съ образующими, параллельными соотвѣтственной оси координатъ. Такъ, уравненіе $f(x, z) = 0$ представляетъ цилиндрическую поверхность съ образующими, параллельными оси y.

Но такого же вида уравненія могутъ представлять поверхности второго порядка, распавшіяся на пару плоскостей. Дѣйствительно, введя въ уравненіе цилиндра соотвѣтствующій параметръ, можно путемъ измѣненія этого параметра довести цилиндръ до распаденія.

Такъ уравненія

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k^2$$

представляютъ первое эллиптическій цилиндръ, второе—гиперболическій цилиндръ съ полуосями перпендикулярнаго сѣченія ka и kb. Если k будемъ уменьшать до нуля, то первый цилиндръ будетъ становиться тоньше и тоньше и въ предѣлѣ обратится въ прямую линію—ось z, а второй будетъ деформироваться, стремясь въ предѣлѣ къ своимъ асимптотическимъ плоскостямъ. Предѣльныя уравненія этихъ поверхностей и будутъ уравненія 4) и 5) § 1:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Эти уравненія могутъ быть представлены въ видѣ равенствъ нулю произведеній линейныхъ множителей *)

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}i\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}i\right)=0, \quad \text{гдѣ } i=\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0.$$

Первое уравненіе представляетъ пару мнимыхъ плоскостей съ дѣйствительною осью пересѣченія, именно осью z:

$$\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0;$$

вторая—пару дѣйствительныхъ плоскостей,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

Въ уравненіи 6) § 1

$$z^2-c^2=0$$

отсутствуютъ двѣ координаты: и потому оно представляетъ пару параллельныхъ плоскостей, параллельныхъ именно плоскости Oxy, ибо x постоянно:

$$z^2-c^2=0 \quad \text{или} \quad (z+c)(z-c)=0 \begin{cases} z+c=0, & \text{или} \\ z-c=0. \end{cases}$$

*) Ср. гл. IV § 5.

Тѣ же разсужденія можно примѣнить и къ уравненію 7) § 1:

$$z^2 + c^2 = 0\,.$$

Но здѣсь лѣвая часть распадается на мнимые множители.

$$(z + ic)\ (z - ic) = 0 \left\{ \begin{array}{l} z + ic = 0 \\ z - ic = 0 \end{array} \right.$$

Дѣйствительными значеніями координатъ удовлетворить нельзя, но алгебраически x остается постояннымъ и потому мы можемъ сказать, что такое уравненіе представляетъ также пару параллельныхъ, но мнимыхъ плоскостей.

Уравненіе 8) § 1:

$$z^2 = 0$$

можно разсматривать какъ предѣльное уравненія 6) § 1, когда c стремится къ нулю. Обѣ параллельныя плоскости стремятся къ совпаденію и сливаются въ одну плоскость Oxy. Уравненіе $z^2 = 0$ представляетъ пару слившихся плоскостей.

§ 3. **Конусъ.** Обращаемся теперь къ уравненію

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,. \tag{2}$$

Если x_1, y_1 и z_1 удовлетворяютъ этому уравненію, то и величины, имъ пропорціональныя kx_1, ky_1, kz_1 тоже удовлетворяютъ ему. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя въ уравненіе (2) вмѣсто текущихъ координатъ координаты kx_1, ky_1 и kz_1, получимъ

$$\frac{k^2x^2_1}{a^2} + \frac{k^2{y_1}^2}{b^2} - \frac{k^2{z_1}^2}{c^2} = k\ \left(\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} - \frac{{z_1}^2}{c^2}\right).$$

Поэтому, если

$$\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} - \frac{{z_1}^2}{c^2} = 0\,,$$

то и

$$\frac{k^2{x_1}^2}{a^2} + \frac{k^2{y_1}^2}{b^2} - \frac{k^2{z_1}^2}{c^2} = 0\,.$$

Но точки съ координатами x_1, y_1, z_1 и kx_1, ky_1, kz_1 лежатъ на одной и той же прямой, выходящей изъ начала координатъ. Дѣйствительно,

пусть OA (черт. 130) такая прямая. Возьмемъ на ней двѣ точки $B(x_1, y_1, z_1)$ и $M(x, y, z)$. Изъ подобія треугольниковъ OB_1B_2 и OM_1M_2, а потомъ треугольниковъ OB_2B и OM_2M имѣемъ:

$$\frac{OM_1}{OB_1} = \frac{M_1M_2}{B_1B_2} = \frac{OM_2}{OB_2} = \frac{M_2M}{B_2B},$$

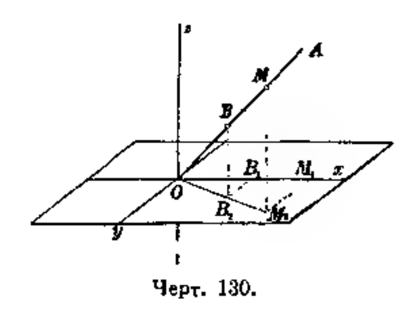
или

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{OM_2}{PB_2} = \frac{z}{z_1}.$$

Полагая общія отношенія равными k, получимъ

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = k, \quad \text{или} \quad x = kx_1,\ y = ky_1,\ z = kz_1.$$

Если точка M будетъ перемѣщаться по прямой OA, то координаты ея будутъ мѣняться при измѣненіи k пропорціонально x_1, y_1, z_1. Согласно предыдущему, если точка B лежитъ на поверхности, представляемой уравненіемъ (2), то и прямая OB лежитъ на той же поверхности и при перемѣщеніи точки B по этой поверхности опишетъ ее. Но движеніемъ прямой, проходящей постоянно черезъ одну точку, описывается к о н и ч е с к а я поверхность. Слѣдовательно, уравненіе (2) представляетъ коническую поверхность съ вершиной въ началѣ координатъ.

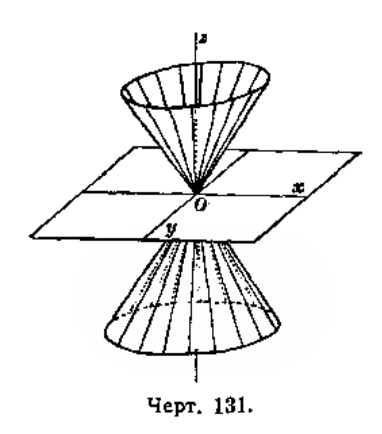


Черт. 130.

Чтобы опредѣлить, какой это конусъ, найдемъ сѣченіе его нѣкоторой плоскостью, не проходящей черезъ его вершину, напримѣръ плоскостью, параллельной плоскости xy и расположенной на высотѣ c отъ нея. Для этого мы должны положить въ уравненіи (2) $z = c$ и получимъ въ этой плоскости уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Такой конусъ называется эллиптическимъ (черт. 131). Если $a=b$, то получимъ круглый конусъ:



Черт. 131.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

По тѣмъ же основаніямъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (3)$$

должно представлять конусъ. Но никакими дѣйствительными значеніями текущихъ координатъ, кромѣ нулевыхъ, оно удовлетворено быть не можетъ, ибо лѣвая часть его является при этихъ условіяхъ суммою положительныхъ чиселъ. Можно удовлетворить этому уравненію только мнимыми значеніями текущихъ координатъ и потому мы будемъ говорить, что уравненіе (3) представляетъ мнимый конусъ, у котораго одна только дѣйствительная точка вершина его.

§ 4. **Эллипсоидъ.** Поверхность, представляемая уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (4)$$

называется эллипсоидомъ. Такъ какъ дроби $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$, какъ квадраты, существенно положительныя числа и въ суммѣ составляютъ единицу, то каждая изъ нихъ не можетъ превосходить единицы. Поэтому

$$|x|\leqq a, \quad |y|\leqq b, \quad |z|\leqq c.$$

Слѣдовательно, поверхность, представляемая уравненіемъ (4), заключена внутри прямоугольнаго параллелепипеда, вершины котораго имѣютъ координаты $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ при различныхъ комбинаціяхъ знаковъ.

Ищемъ теперь линіи пересѣченія этой поверхности съ плоскостями координатъ. Для этого нужно въ уравненіи поверхности положить $z=0$ для плоскости (xy), $y=0$ для плоскости (zx) и $x=0$ для плоскости (yz). Такимъ образомъ, получимъ уравненія соот-

вѣтствующихъ линій пересѣченія:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{5}$$

Каждое изъ этихъ уравненій представляетъ эллипсъ.

Пересѣчемъ эту поверхность еще плоскостью, параллельной плоскости (xy) и отстоящей отъ нея на разстояніи z_1. Полагая въ уравненіи (4) $z=z_1$, получимъ

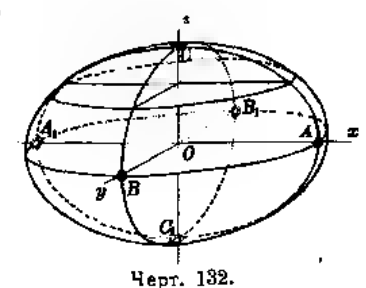
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1\,,\quad \text{или}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2-z_1^2}{c^2}\,;$$

отсюда находимъ

$$\frac{x^2}{\left[a\cdot\frac{\sqrt{c^2-z_1^2}}{c}\right]^2}+\frac{y^2}{\left[b\cdot\frac{\sqrt{c^2-z_1^2}}{c}\right]^2}=1, \tag{6}$$

т.-е. плоскость $z=z_1$ пересѣкаетъ изслѣдуемую поверхность по эллипсу съ полуосями

$$a\,\frac{\sqrt{c^2-z_1^2}}{c}\quad \text{и}\quad b\,\frac{\sqrt{c^2-z_1^2}}{c}\,.$$



Черт. 132.

Мѣняя z_1 отъ 0 до c, мы получимъ рядъ параллельныхъ сѣкущихъ плоскостей, которыя будутъ пересѣкать эллипсоидъ, какъ показываетъ уравненіе (5), по эллипсамъ. Оси этихъ эллипсовъ пропорціональны

$$a\,\frac{\sqrt{c^2-z_1^2}}{c}:b\,\frac{\sqrt{c^2-z_1^2}}{c}=a\,\frac{\sqrt{c^2-z_2^2}}{c}:b\,\frac{\sqrt{c^2-z_2^2}}{c}=a:b$$

Такіе эллипсы называются подобными. Съ увеличеніемъ абсолютной величины z_1 эти эллипсы уменьшаются. Если $z_1=c$, то эллипсъ обращается въ точку, если $z_1>c$, то плоскость не будетъ пересѣкать эллипса, оси эллипса будутъ мнимыя. То же самое можно сказать и о сѣченіяхъ плоскостями, параллельными другимъ плоскостямъ координатъ.

Вычерчивая эллипсы (5) и (6) и абрисъ, касающійся каждаго изъ этихъ эллипсовъ въ двухъ противоположныхъ относительно центра точкахъ, мы и получимъ изображеніе изслѣдуемой поверхности — эллипсоида (черт. 132). Величины $2a$, $2b$, $2c$ называются его осями. Вообще говоря, эти оси не равны между собою. Такой

эллипсоидъ называется трехоснымъ. Но если окажется, что двѣ оси равны, т.-е.

$$a = b\,,\quad \text{или}\quad b = c\,,$$

то линіи сѣченія плоскостями, параллельными въ первомъ случаѣ плоскости (xy), во второмъ плоскости (yz), будутъ кругами. Эллипсоидъ называется тогда эллипсоидомъ вращенія, такъ какъ такой эллипсоидъ можетъ быть полученъ вращеніемъ эллипса около одной изъ осей. Если эллипсъ вращается около малой своей оси, то эллипсоидъ вращенія называется сжатымъ или сфероидомъ, если эллипсъ вращается около большой своей оси, то эллипсоидъ вращенія называется растянутымъ.

Задача. Уравненіе эллипса на плоскости (xy)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Этотъ эллипсъ вращается около оси $2a$ или около оси $2b$. Написать уравненіе эллипсоида вращенія, полученнаго въ томъ и другомъ случаѣ.

§ 5. **Гиперболоиды**. Обратимся теперь къ изслѣдованію поверхностей, выражаемыхъ уравненіями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\,, \tag{8}$$

называемыхъ гиперболоидами перваго рода (7) или второго рода (8).

Находимъ, какъ раньше, линіи пересѣченія этихъ поверхностей координатными плоскостями и плоскостями параллельными.

1. Гиперболоидъ перваго рода даетъ въ сѣченіи съ плоскостью:

a) xy ($z = 0$) эллипсъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,; \tag{9}$$

b) zx ($y = 0$) гиперболу:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,; \tag{10}$$

c) yz ($x = 0$) гиперболу:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11}$$

d) Плоскость, параллельная плоскости (xy) и отстоящая отъ нея на разстояніи $z=z_1$, пересѣкаетъ эту поверхность по кривой, уравненіе которой въ плоскости $z=z_1$ имѣетъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=1,$$

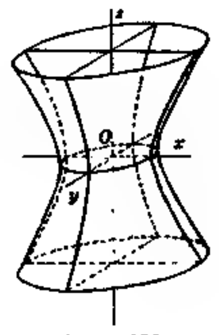
или

$$\frac{x^2}{\left[a\,\frac{\sqrt{c^2+z_1^2}}{c}\right]^2}+\frac{y^2}{\left[b\,\frac{\sqrt{c^2+z_1^2}}{c}\right]^2}=1. \qquad (12)$$

По этому уравненію можно заключить, что разсматриваемое сѣченіе будетъ эллипсъ. Мѣняя z_1, мы получимъ рядъ подобныхъ эллипсовъ, такъ какъ оси ихъ пропорціональны:

$$a\frac{\sqrt{c^2+z_1^2}}{c}:b\frac{\sqrt{c^2+z_1^2}}{c}=a\frac{\sqrt{c^2+z_2^2}}{c}:b\frac{\sqrt{c^2+z_2^2}}{c}=a:b.$$

Съ увеличеніемъ абсолютной величины z_1 эллипсъ сѣченія увеличивается При всякой дѣйствительной величинѣ z_1 оси эллипса будутъ дѣйствительны. Такимъ образомъ, гиперболоидъ перваго рода простирается безгранично въ томъ и другомъ направленіи оси z. Вычерчивая сѣченія (9), (10), (11) и два сѣченія плоскостями $z=z_1$ и $z=-z_1$, мы и получимъ представленіе о формѣ этой поверхности (черт. 133). Абрисъ, котораго коснутся эти сѣченія въ діаметрально-противоположныхъ точкахъ, имѣетъ гиперболическую форму.



Черт. 133.

2. Пересѣкая гиперболоидъ второго рода, представляемый уравненіемъ (8), тѣми же плоскостями, какъ и гиперболоидъ перваго рода, мы получимъ слѣдующіе результаты.

a) Плоскость xy $(z=0)$ не пересѣкаетъ совсѣмъ разсматриваемой поверхности, иначе—пересѣкаетъ ее по мнимой кривой:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1; \qquad (13)$$

b) плоскость zx $(y=0)$ пересѣкаетъ по гиперболѣ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad (14)$$

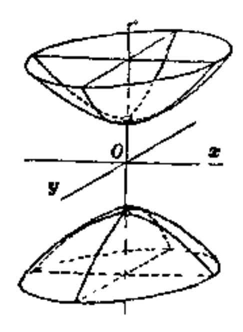
c) плоскость yz $(x=0)$ также по гиперболѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1; \tag{15}$$

d) плоскость, параллельная плоскости xy $(z=z_1)$, если $z_1 > c$, пересѣкаетъ по эллипсу:

$$\frac{x^2}{\left[a\frac{\sqrt{z_1^2 - c^2}}{c}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[b.\frac{\sqrt{z_1^2 - c^2}}{c}\right]^2} = 1, \tag{16}$$

если $z_1 < c$, по мнимой кривой, иначе не пересѣкаетъ поверхности, если $z_1 = c$, то плоскость имѣетъ только одну дѣйствительную общую точку съ поверхностью $x=0$, $y=0$, $z_1=c$, ибо уравненіе (16) или уравненіе



Черт 134.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_1^2 - c^2}{c^2}$$

при $z_1 = c$ обращается въ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Такимъ образомъ, между плоскостями $z = -c$ и $z = c$ нѣтъ ни одной точки этой поверхности, которая лежитъ внѣ этого пространства выше плоскости $z=c$ и ниже плоскости $z=-c$, образуя, такимъ образомъ, двѣ полости. Съ увеличеніемъ абсолютной величины z эллипсъ сѣченія (16) увеличивается. Гиперболы (14), (15) имѣютъ дѣйствительныя вершины на оси z. Вычерчивая сѣченія (14), (15) и два сѣченія плоскостями $z=z_1$ и $z= z_1$, гдѣ $z_1 > c$, мы и составимъ представленіе о формѣ этой поверхности (черт. 134). Абрисъ имѣетъ гиперболическую форму

Гиперболоидъ второго рода называется также двуполостнымъ, а гиперболоидъ перваго рода—однополостнымъ.

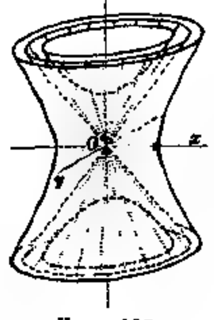
§ 6. Асимптотическій конусъ. Если какую-нибудь точку $M(x, y, z)$ того или другого гиперболоида соединить съ началомъ координатъ O и удалять точку M по поверхности въ безконечность, то прямая OM въ предѣлѣ займетъ положеніе одной изъ образующихъ нѣкотораго конуса, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{17}$$

и который называется асимптотическимъ (черт. 135). Въ самомъ дѣлѣ, пусть $B(x_1, y_1, z_1)$ какая-нибудь точка прямой OM (черт. 130). Координаты точекъ M и B по предыдущему (§ 3) пропорціональны:

$$x = kx_1, \quad y = ky_1, \quad z = kz_1.$$

Чѣмъ больше факторъ пропорціональности k, тѣмъ дальше точка M отъ начала координатъ. Координаты точки $M(x, y, z)$ должны по условію удовлетворять уравненію гиперболоида:



Черт. 135

$$\frac{(kx_1)^2}{a^2} + \frac{(ky_1)^2}{b^2} - \frac{(kz_1)^2}{c^2} = \pm 1,$$

Знакъ $+$ во второй части берамъ въ случаѣ гиперболоида однополостнаго; знакъ $-$въ случаѣ двуполостнаго. Изъ предыдущаго уравненія имѣемъ

$$k^2\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2}\right] = \pm 1, \quad \text{или} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = \pm \frac{1}{k^2}.$$

При $k = \infty$, т.-е. когда точка M удаляется какъ-нибудь по поверхности въ безконечность, получимъ

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 0,$$

т.-е. оказывается, что координаты точки $B(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяютъ уравненію конуса (§ 3), слѣдовательно, лежатъ на этомъ конусѣ и прямая OM служитъ образующей его.

Если a, b и c для обоихъ гиперболоидовъ одинаковы или пропорціональны, то асимптотическій конусъ у нихъ будетъ общимъ. Гиперболоидъ однополостный лежитъ внѣ этого конуса, а двуполостный внутри его.

§ 7. **Прямолинейныя образующія гиперболоида перваго рода.** Выше было отмѣчено, что всякая прямая пересѣкаетъ поверхность второго порядка не болѣе какъ въ двухъ точкахъ, или же вся умѣщается на поверхности (§ 1). Этотъ послѣдній случай можетъ имѣть мѣсто на однополостномъ гиперболоидѣ. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшая совмѣстно уравненіе этого гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

и уравненія какой-нибудь прямой

$$\frac{x-x'}{L}=\frac{y-y'}{M}=\frac{z-z'}{N}, \qquad (2)$$

гдѣ x', y', z' координаты нѣкоторой опредѣленной точки P этой прямой, а L, M, N ея коэффиціенты направленія, изслѣдуемъ, при какихъ условіяхъ данная прямая умѣщается вся на поверхности. При рѣшеніи введемъ вспомогательную неизвѣстную t, обозначая этою буквой общее отношеніе уравненій (2):

$$\frac{x-x'}{L}=\frac{y-y'}{M}=\frac{z-z'}{N}=t. \qquad (3)$$

Изъ уравненій (3) имѣемъ:

$$x=x'+Lt, \quad y=y'+Mt, \quad z=z'+Nt$$

Подставляя эти выраженія для x, y, z въ уравненіе гиперболоида, получимъ

$$\frac{(x'+Lt)^2}{a^2}+\frac{(y'+Mt)^2}{b^2}-\frac{(z'+Nt)^2}{c^2}=1.$$

Располагая это уравненіе по степенямъ t, находимъ

$$\left[\frac{L^2}{a^2}+\frac{M^2}{b^2}-\frac{N^2}{c^2}\right]t^2+2\left[\frac{x'L}{a^2}+\frac{y'M}{b^2}-\frac{z'N}{c^2}\right]t+\left[\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}-1\right]=0. \qquad (4)$$

Для того, чтобы прямая вся умѣщалась на гиперболоидѣ, необходимо, чтобы t было неопредѣленнымъ, т.-е. чтобы коэффиціенты уравненія (4) въ отдѣльности обращались въ нуль:

$$\frac{L^2}{a^2}+\frac{M^2}{b^2}-\frac{N^2}{c^2}=0, \quad \frac{x'L}{a^2}+\frac{y'M}{b^2}-\frac{z'N}{c^2}=0, \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}-1=0.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что точка P (x', y', z') должна лежать на поверхности; первыя два опредѣляютъ направленіе прямой, проходящей черезъ точку P (x', y', z') и умѣщающейся на поверхности. Для опредѣленія направленія прямой достаточно знать **отношенія** ея коэффиціентовъ направленія, т.-е. отношенія $\frac{L}{N}$, $\frac{M}{N}$.

Уравненія

$$\frac{L^2}{a^2}+\frac{M^2}{b^2}-\frac{N^2}{c^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x'L}{a^2}+\frac{y'M}{b^2}-\frac{z'N}{c^2}=0 \qquad (5)$$

послѣ дѣленія перваго на N^2, а второго на N можно представить въ видѣ

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{L}{N}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{M}{N}\right)^2-\frac{1}{c^2}=0 \quad и \quad \frac{x'}{a^2}\left(\frac{L}{N}\right)+\frac{y'}{b^2}\left(\frac{M}{N}\right)-\frac{z'}{c^2}=0. \qquad (5')$$

Для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ $\frac{L}{N}$ и $\frac{M}{N}$ мы имѣемъ такимъ образомъ достаточное число уравненій — два уравненія. Слѣдовательно, поставленная задача — задача изысканія прямой, умѣщающейся на поверхности — возможна и вопросъ заключается лишь въ томъ, будутъ ли рѣшенія этихъ уравненій дѣйствительны или мнимы.

Напишемъ уравненія (5) или (5') въ такомъ видѣ:

$$\left(\frac{cL}{aN}\right)^2+\left(\frac{cM}{bN}\right)^2=1, \quad \frac{cx'}{az'}\left(\frac{cL}{aN}\right)+\frac{cy'}{bz'}\left(\frac{cM}{bN}\right)=1 \qquad (5'')$$

и обозначимъ ради краткости выраженія, содержащія неизвѣстныя L и M, черезъ u и v, а коэффиціенты при нихъ черезъ l и m:

$$\frac{cL}{aN}=u, \quad \frac{cM}{bN}=v; \quad \frac{cx'}{az'}=l, \quad \frac{cy'}{bz'}=m. \qquad (6)$$

Послѣ введенія такихъ обозначеній уравненія (5'') принимаютъ видъ

$$u^2+v^2=1 \quad и \quad lu+mv=1. \qquad (5''')$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ:

$$v^2=1-u^2, \quad m^2v^2=(1-lu)^2, \qquad (7)$$

$$m^2(1-u^2)=(1-lu)^2, \quad или \quad (l^2+m^2)u^2-2lu+(1-m^2)=0,$$

$$u=\frac{l+\sqrt{l^2-(l^2+m^2)(1-m^2)}}{l^2+m^2}=\frac{l+m\sqrt{l^2+m^2-1}}{l^2+m^2} \qquad (8)$$

Преобразуемъ подкоренное выраженіе въ полученномъ рѣшеніи, замѣняя l и m ихъ значеніями:

$$l^2+m^2-1=\frac{c^2x'^2}{a^2z'^2}+\frac{c^2y'^2}{b^2z'^2}-1=\frac{c^2}{z'^2}\left[\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}\right].$$

Точка $P\ (x', y', z')$ лежитъ на поверхности; слѣдовательно,

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1 \qquad и \qquad l^2+m^2-1=\frac{c^2}{z'^2}.$$

c и z'—дѣйствительныя числа, а потому $\frac{c^2}{z'^2}$ положительное число, а, стало быть, для u и v получаемъ по два дѣйствительныхъ рѣшенія (8 и 7). Слѣдовательно, по два дѣйствительныхъ значенія имѣютъ и искомыя отношенія коэффиціентовъ направленія, какъ слѣдуетъ изъ формулъ (6) и (8).

Такимъ образомъ черезъ каждую точку $P\ (x', y', z')$ однополостнаго гиперболоида можно провести **двѣ** различныхъ прямыхъ, умѣщающихся на этой поверхности. Обозначимъ одну изъ нихъ черезъ p, другую черезъ q. Если на прямой p возьмемъ рядъ точекъ M_1, M_2, M_3,..., то черезъ каждую изъ нихъ, кромѣ прямой p, по предыдущему проходитъ по одной прямой q_1, q_2, q_3..., иначе—при движеніи точки M по прямой p прямая q будетъ перемѣщаться, оставаясь на поверхности, своимъ движеніемъ **образуя** поверхность. Прямыя q, q_1, q_2... составляютъ серію **прямолинейныхъ образующихъ**. Но точка M можетъ перемѣщаться по прямой q, занимая рядъ положеній M', M'', M'''... Изъ каждой точки M', M'', M'''... кромѣ прямой q выходитъ еще по одной прямой; назовемъ ихъ p_1, p_2, p_3..., которыя составляютъ вторую серію прямолинейныхъ образующихъ.

Двѣ прямолинейныхъ образующихъ, принадлежащихъ одной серіи, напр. образующія q_i и q_k **не пересѣкаются**, ибо иначе онѣ вмѣстѣ съ прямой p, ихъ пересѣкающей, лежали бы въ одной плоскости, и, стало быть, всякая прямая этой плоскости, пересѣкая эти три прямыя p, q_i, q_k, пересѣкала бы поверхность въ трехъ точкахъ, что невозможно.

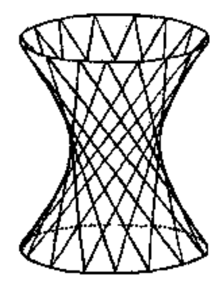
Каждыя двѣ прямолинейныя образующія разныхъ серій, напр. p_i и q_l, пересѣкаются. Въ самомъ дѣлѣ, прямыя q_l и p **по опредѣленію** пересѣкаются и потому лежатъ въ одной плоскости—обозначимъ ее черезъ α:

$$\alpha=(p,\ q_l)\ .$$

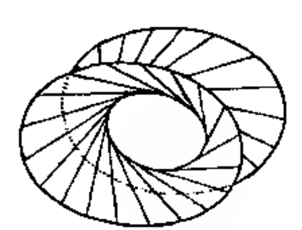
Плоскость α, кромѣ точекъ, лежащихъ на прямыхъ p и q_l, **не имѣетъ** съ поверхностью общихъ точекъ. Но плоскость α пересѣкаетъ **каждую** прямую p_i, всѣ точки которой принадлежатъ поверхности. Точки пересѣченія прямыхъ p_i съ плоскостью α не могутъ

лежать на прямой p, ибо двѣ прямолинейныхъ образующихъ, принадлежащихъ одной серіи, не пересѣкаются. Слѣдовательно, эти точки должны лежать на другой прямой гиперболоида, лежащей въ этой плоскости, т.-е. на прямой q_l А это и значитъ, что прямыя p_l и q_l, принадлежащія къ разнымъ серіямъ прямолинейныхъ образующихъ, пересѣкаются.

Такимъ образомъ прямолинейная образующая одной серіи, перемѣщаясь по гиперболоиду, пересѣкаетъ всѣ прямыя второй серіи

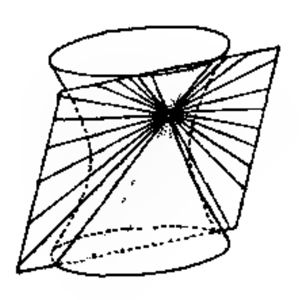


Черт. 136.



Черт. 137.

и этими прямыми направляется въ своемъ движеніи. Поэтому одну изъ двухъ серій прямыхъ, лежащихъ на гиперболоидѣ, можно назвать серіей прямолинейныхъ образующихъ, другую — серіей направляющихъ (черт. 136). На чертежѣ 137 представленъ гиперболоидъ съ одной серіей прямолинейныхъ образующихъ и мнимою осью, направленной въ сторону зрителя.



Черт 138.

Плоскость, соединяющая прямолинейную образующую, напр. p_l, и направляющую q_l, пересѣкаетъ гиперболоидъ по этимъ двумъ прямымъ. Всякая прямая въ этой плоскости, проходящая черезъ точку M пересѣченія прямыхъ p_l и q_l, имѣетъ съ поверхностью двѣ слившихся въ одну точки, т.-е. касается поверхности. Плоскость (p_l, q_l) является такимъ образомъ геометрическимъ мѣстомъ касательныхъ прямыхъ къ поверхности въ точкѣ M и потому будетъ касательной плоскостью къ гиперболоиду въ этой точкѣ (черт. 138).

Изгибъ гиперболоида въ каждой точкѣ сѣдлообразный, а не такой, какъ у шара или эллипсоида, и потому касательная

плоскость въ то же время пересѣкаетъ поверхность по двумъ линіямъ, перекрещивающимся въ точкѣ прикосновенія. Такого рода точки какой-либо поверхности называются гиперболическими. Точки же поверхности, около которыхъ поверхность изогнута какъ шаръ или эллипсоидъ, называются эллиптическими. Точки поверхности, обладающія переходнымъ свойствомъ отъ свойствъ гиперболических къ свойствамъ эллиптическихъ, называются параболическими точками поверхности. Таковы, напр., точки цилиндра и конуса.

§ 8. **Параболоиды**. Поверхности, представляемыя уравненіями

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{13}$$

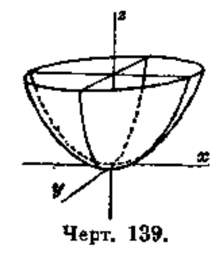
$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \tag{14}$$

называются параболоидами, первый (13) эллиптическимъ, второй (14) гиперболическимъ.

Эллиптическій параболоидъ пересѣкается плоскостью xy ($z=0$) по линіи:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0,$$

но такъ какъ p и q мы считаемъ положительными, то это уравненіе удовлетворяется дѣйствительными значеніями координатъ лишь при $x=0$ и $y=0$, и плоскость xy лишь касается этой поверхности (черт. 139). Плоскость xz ($y=0$) пересѣкаетъ параболоидъ по параболѣ



Черт. 139.

$$x^2=2pz. \tag{15}$$

Плоскость yz ($x=0$) пересѣкаетъ также по параболѣ

$$y^2=2qz. \tag{16}$$

Плоскость, параллельная плоскости xy ($z=z_1$), если $z_1>0$, по эллипсу

$$\frac{x^2}{2pz_1}+\frac{y^2}{2qz_1}=1, \tag{17}$$

а если $z_1<0$, то по мнимой кривой, иначе — совсѣмъ не пересѣкаетъ. Если z_1, начиная отъ нуля, безгранично увеличивается, то и эллипсъ сѣченія (17) увеличивается, оставаясь подобнымъ себѣ

во всѣхъ положеніяхъ. Вершины его при этомъ движутся по параболамъ (15) и (16).

Этими сѣченіями и опредѣляется форма эллиптическаго параболоида.

Гиперболическій параболоидъ. Пересѣкая поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

тѣми же, что и въ предыдущихъ случаяхъ, плоскостями, находимъ въ пересѣченіи слѣдующія *линіи*.

Въ пересѣченіи съ плоскостью xy ($z=0$) получается пара прямыхъ:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0 \quad \text{или} \quad \left[\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right]\cdot\left[\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right]=0.$$

Слѣдовательно, плоскость xy касается параболоида (срв. § 7). Плоскость zx ($y=0$) пересѣкаетъ поверхность по параболѣ

$$x^2=2pz,$$

ось которой направлена вверхъ; плоскость yz ($x=0$) по параболѣ

$$y^2=-2qz,$$

ось которой направлена внизъ. Съ плоскостью, параллельной плоскости xy ($z=z_1$), поверхность пересѣкается по гиперболѣ:

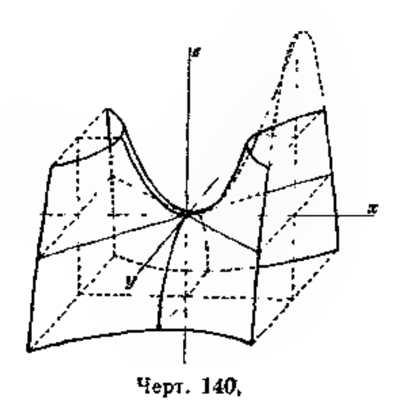
$$\frac{x^2}{2pz_1}-\frac{y^2}{2qz_1}=1$$

Если $z_1>0$, то дѣйствительная ось этой гиперболы направлена по оси x, а мнимая по оси y, если же $z_1<0$, то наоборотъ. Кромѣ того, плоскость, параллельная плоскости yz ($x=x_1$), пересѣкаетъ поверхность по параболѣ

$$-\frac{y^2}{q}=2z-\frac{x_1^2}{p}, \qquad \text{или} \qquad y^2=-2q\left(z-\frac{x_1^2}{2p}\right).$$

Будетъ ли x_1 положительнымъ или отрицательнымъ, парабола имѣетъ тотъ же видъ: ось ея направлена внизъ, а вершина на высотѣ $z=\frac{x_1^2}{2p}$.

Эта поверхность имѣетъ видъ, изображенный на черт. 140. Плоскія сѣченія гиперболическаго параболоида суть параболы или ги-



Черт. 140.

перболы. Плоскія сѣченія эллиптическаго параболоида—параболы или эллипсы.

§ 9. **Прямолинейныя образующія гиперболическаго параболоида.** Гиперболическій параболоидъ принадлежитъ къ числу линейчатыхъ поверхностей, содержитъ также двѣ серіи прямолинейныхъ образующихъ, какъ и линейчатый гиперболоидъ, и можетъ быть описанъ движущейся опредѣленнымъ образомъ прямой линіей, именно движущейся параллельно нѣкоторой плоскости

Въ самомъ дѣлѣ, рѣшая совмѣстно подобно тому, какъ это мы дѣлали въ случаѣ однополостнаго гиперболоида (§ 7), уравненіе гиперболическаго параболоида

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

и уравненія прямой

$$\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N} = t,$$

находимъ для вспомогательнаго неизвѣстнаго t квадратное уравненіе

$$\frac{(x_1 + Lt)^2}{p} - \frac{(y_1 + Mt)^2}{q} = 2(z_1 + Nt),$$

или

$$\left(\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q} - 2z_1\right) + 2\left(\frac{x_1 L}{p} - \frac{y_1 M}{q} - N\right) t + \left(\frac{L^2}{p} - \frac{M^2}{q}\right) t^2 = 0.$$

Для того, чтобы прямая умѣщалась вся на поверхности, необходимо, чтобы всѣ три коэффиціента обратились въ нули:

$$\frac{x_1^2}{p}-\frac{y_1^2}{q}-2z_1=0,\quad \frac{x_1L}{p}-\frac{y_1M}{q}-N=0,\quad \frac{L^2}{p}-\frac{M^2}{q}=0\,.$$

Первое уравненіе показываетъ, что точка $(x_1, y_1\ z_1)$, лежащая на прямой, должна лежать и на параболоидѣ. Изъ двухъ послѣднихъ уравненій опредѣляются два рѣшенія для коэффиціентовъ направленія прямой, умѣщающейся на поверхности. Именно изъ третьяго имѣемъ

$$\frac{L^2}{M^2}=\frac{p}{q},$$

откуда

$$\frac{L'}{M'}=\sqrt{\frac{p}{q}}\quad,\quad \frac{L''}{M''}=-\sqrt{\frac{p}{q}};$$

изъ второго

$$\frac{x_1}{p}\cdot\frac{L}{M}-\frac{y_1}{q}-\frac{N}{M}=0,$$

откуда

$$\frac{N}{M}=\frac{x_1}{p}\cdot\frac{L}{M}-\frac{y_1}{q};$$

принимая во вниманіе два рѣшенія для $\frac{L}{M}$, находимъ

$$\frac{N'}{M'}=\frac{x_1}{p}\cdot\sqrt{\frac{p}{q}}-\frac{y_1}{q}=\frac{\frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{y_1}{\sqrt{q}}}{\sqrt{q}},\qquad \frac{N''}{M''}=-\frac{x_1}{p}\sqrt{\frac{p}{q}}-\frac{y_1}{q}=\frac{\frac{x_1}{\sqrt{p}}+\frac{y_1}{\sqrt{q}}}{-\sqrt{q}}$$

Слѣдовательно,

$$1)\ L':M':N'=+\sqrt{p}:+\sqrt{q}:\left(\frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{y_1}{\sqrt{q}}\right)$$

и

$$2)\ L'':M'':N''=+\sqrt{p}:-\sqrt{q}:\left(\frac{x_1}{\sqrt{p}}+\frac{y_1}{\sqrt{q}}\right).$$

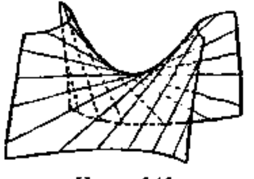
Такимъ образомъ, разсуждая подобно тому, какъ это мы сдѣлали относительно образующихъ однополостнаго гиперболоида (§ 7), приходимъ къ заключенію, что на гиперболическомъ параболоидѣ двѣ серіи прямолинейныхъ образующихъ, изъ которыхъ каждая служитъ серіей направляющихъ для другой. Всѣ образующія одной серіи параллельны проходящей черезъ ось z плоскости, опредѣляемой уравненіемъ

$$\sqrt{q}\,x-\sqrt{p}\,y=0;$$

ибо коэффиціенты направленія L', M', N' и коэффиціенты уравненія этой плоскости удовлетворяютъ условію параллельности (стр. 149):

$$L' . \sqrt{q} - M' . \sqrt{p} + N' . 0 = \sqrt{p} \sqrt{q} - \sqrt{q} . \sqrt{p} = 0 .$$

Точно также всѣ образующія второй серіи параллельны другой, также проходящей черезъ ось z плоскости



Черт. 141.

$$\sqrt{q}\, x + \sqrt{p}\, y = 0 ,$$

ибо

$$L'' . \sqrt{q} + M'' . \sqrt{p} + N'' . 0 = \sqrt{p} . \sqrt{q} - \sqrt{q} . \sqrt{p} = 0 .$$

На чертежѣ 141 изображенъ гиперболическій параболоидъ съ одной серіей прямолинейныхъ образующихъ.

§ 10. **Плоскія сѣченія поверхности второго порядка.** Всякое плоское сѣченіе какого-либо цилиндра второго порядка (§ 2) есть кривая второго порядка, т.-е. кривая, выражаемая уравненіемъ второй степени относительно текущихъ прямолинейныхъ координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы имѣемъ уравненіе второй степени цилиндрической поверхности съ образующими, параллельными оси z:

$$f(x, y) = 0 , \tag{1}$$

или

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 .$$

Какая-либо плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

пересѣкаетъ цилиндръ по кривой. Примемъ за оси координатъ $O'X$, $O'Y$ въ этой плоскости (2) прямыя пересѣченія ея съ плоскостями координатъ zOx и zOy. Эти новыя оси — въ общемъ случаѣ косоугольныя — наклонены къ осямъ Ox и Oy подъ нѣкоторыми углами — обозначимъ ихъ черезъ α и β. Какая-либо точка M кривой пересѣченія имѣетъ координаты въ плоскости (2) X, Y, а проекція этой точки — точка M_1 на плоскости xOy — имѣетъ координаты x, y. Такъ какъ абсцисса x есть проекція абсциссы X и ордината y — проекція ординаты Y, то (стр. 168)

$$x = X \cos \alpha , \qquad y = Y \cos \beta .$$

Точка M_1 лежитъ на кривой, служащей основаніемъ цилиндра, и

координаты ея должны удовлетворять уравненію (1). Слѣдовательно,

$$f(X\cos\alpha,\quad Y\cos\beta)=0. \tag{1'}$$

Уравненіе (1) второй степени относительно x и y, поэтому и уравненіе (1') второй степени относительно X, Y. Такимъ образомъ координаты любой точки M линіи пересѣченія плоскости (2) съ цилиндромъ (1) удовлетворяютъ уравненію второй степени (1'), т.-е. кривая пересѣченія есть кривая второго порядка.

Точно также и всякое плоское сѣченіе какой-либо поверхности второго порядка есть кривая второго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, пусть разсматривается сѣченіе эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{3}$$

съ плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

Этимъ двумъ уравненіямъ совмѣстно должны удовлетворять координаты точекъ пересѣченія плоскости съ эллипсоидомъ.

Исключаемъ изъ этихъ уравненій z, т.-е. опредѣлимъ изъ уравненія (2) z и вставимъ полученное выраженіе въ уравненіе (3):

$$z=-\frac{Ax+By+D}{C};\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\left(-\frac{Ax+By+D}{C}\right)^2}{c^2}-1=0.$$

По раскрытіи скобокъ въ послѣднемъ уравненіи получимъ уравненіе второй степени относительно x и y, которому должны удовлетворять абсцисса и ордината любой точки линіи пересѣченія эллипсоида (3) съ плоскостью (2):

$$\left[\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{C^2c^2}\right]x^2+\left[\frac{1}{b^2}+\frac{B^2}{C^2c^2}\right]y^2+2\frac{AB}{C^2c^2}xy+2\frac{AD}{C^2c^2}x+2\frac{BD}{C^2c^2}y+$$
$$+\left[\frac{D^2}{C^2c^2}-1\right]=0. \tag{4}$$

Это уравненіе представляетъ въ пространствѣ цилиндрическую поверхность второго порядка, проходящую черезъ линію пересѣченія эллипсоида съ плоскостью. Слѣдовательно, разсматриваемое сѣченіе эллипсоида (3) съ плоскостью есть въ то же время и пло-

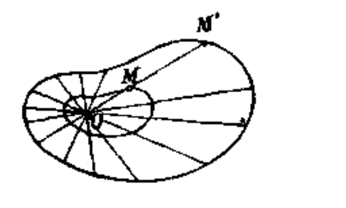
ское сѣченіе цилиндрической поверхности второго порядка, т.-е. есть кривая второго порядка.

Теперь не трудно убѣдиться, что въ сѣченіи поверхности второго порядка параллельными плоскостями получается рядъ подобныхъ и подобно расположенныхъ кривыхъ второго порядка. Но прежде выяснимъ, что мы разумѣемъ подъ подобными и подобно расположенными кривыми второго порядка.

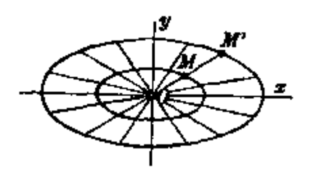
Подобныя и подобно расположенныя кривыя второго порядка. Если какую-либо точку O на плоскости, въ которой лежитъ какая-либо кривая U (черт. 142), соединимъ съ каждой точкой M этой кривой и полученные отрѣзки OM увеличимъ или уменьшимъ въ одномъ и томъ же отношеніи k—

$$\frac{OM'}{OM} = k,$$

то концы M' измѣненныхъ отрѣзковъ лежатъ на новой кривой U', подобной первой и подобно расположенной съ нею. Такъ увеличивъ всѣ полудіаметры эллипса (черт. 143), напр.,



Черт. 142.



Черт. 143.

вдвое, мы получимъ эллипсъ, подобный первому и подобно съ нимъ расположенный—имѣющій съ прежнимъ одинаковую форму и лишь въ размѣрахъ своихъ измѣненный.

Двѣ кривыя второго порядка, отнесенныя къ однѣмъ и тѣмъ же осямъ координатъ или къ осямъ параллельнымъ, подобны и подобно расположены, если старшіе члены ихъ уравненій имѣютъ соотвѣтственно равные или пропорціональные коэффиціенты. Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы имѣемъ двѣ кривыя второго порядка, уравненія которыхъ удовлетворяютъ этимъ условіямъ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{5}$$

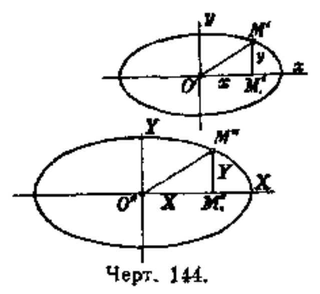
и

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0. \tag{6}$$

Параллельное перенесенiе осей координатъ не измѣняетъ коэффицiентовъ старшихъ членовъ уравненiя (стр. 124). Перенесемъ начало координатъ въ центръ O' (черт. 144) первой кривой и второй разъ въ центръ O'' второй. Получимъ уравненiя тѣхъ же кривыхъ, отнесенныхъ къ различнымъ, но соотвѣтственно параллельнымъ осямъ координатъ, въ видѣ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + c_{33} = 0, \qquad (5')$$

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + d_{33} = 0. \qquad (6')$$



Черт. 144.

Пусть M' какая-нибудь точка первой кривой. Проведемъ изъ центра O'' второй кривой прямую, параллельную прямой $O'M'$, получимъ на второй кривой соотвѣтственную точку M''. Координаты точекъ M' и M'' относительно соотвѣтствующихъ осей будутъ

$$x = O'M'_1, \quad y = M'_1M'; \quad X = O''M''_1, \quad Y = M''_1M''.$$

Изъ подобiя треугольниковъ $O'M'M'_1$ и $O''M''M''_1$ слѣдуетъ:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{O'M'}{O''M''} = k, \qquad (7)$$

гдѣ k величина общаго отношенiя соотвѣтственныхъ координатъ. При движенiи точки M' по первой кривой будетъ соотвѣтственно перемѣщаться и точка M'' по второй кривой; при этомъ будутъ мѣняться и координаты ихъ. Но если мы докажемъ, что общее отношенiе k соотвѣтственныхъ координатъ при этомъ не измѣняется, то тѣмъ самымъ будетъ доказано, что разсматриваемыя кривыя подобны и подобно расположены. Изъ пропорцiи (7) слѣдуетъ

$$x = Xk, \quad y = Yk.$$

Координаты x, y точки M' должны удовлетворять уравненiю (5'):

$$a_{11}(Xk)^2 + 2a_{12}(Xk)(Yk) + a_{22}(Yk)^2 + c_{33} = 0,$$

или

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + \frac{c_{33}}{k^2} = 0. \qquad (5'')$$

Такимъ образомъ координаты X, Y точки M'' второй кривой удо-

влетворяютъ уравненію ($5''$), но онѣ должны удовлетворять уравненію ($6'$) этой кривой. Слѣдовательно, уравненія ($5''$) и ($6'$) тождественны, и поэтому послѣдніе ихъ члены равны:

$$\frac{c_{33}}{k^2} = d_{33};$$

отсюда слѣдуетъ, что k постоянно.

$$k = \sqrt{\frac{c_{33}}{d_{33}}}, \qquad \text{или} \qquad \frac{O'M'}{O''M''} = constans,$$

т.-е. разсматриваемыя кривыя подобны и подобно расположены.

Параллельныя сѣченія поверхности второго порядка. Теперь разсмотримъ рядъ параллельныхъ сѣченій поверхности второго порядка, напр. эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{3}$$

Въ уравненіяхъ параллельныхъ плоскостей можно считать коэффиціенты при текущихъ координатахъ одинаковыми, послѣдніе же члены должны быть различны. Такимъ образомъ, давая послѣднему члену D въ уравненіи плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

различныя значенія $D_1, D_2, \ldots$, мы будемъ получать уравненія параллельныхъ плоскостей.

Исключая изъ уравненій (3) и (2) z, мы получимъ уравненіе

$$\left[\frac{1}{a^2} + \frac{A}{C^2c^2}\right]x^2 + \left[\frac{1}{b^2} + \frac{B^2}{C^2c^2}\right]y^2 + 2\,\frac{AB}{C^2c^2}\,xy + 2\,\frac{AD}{C^2c^2}\,x + 2\,\frac{BD}{C^2c^2}\,y +$$
$$+ \left[\frac{D^2}{C^2c^2} - 1\right] = 0, \tag{4}$$

въ которомъ коэффиціенты старшихъ членовъ не зависятъ отъ перемѣннаго коэффиціента D. Слѣдовательно, при различныхъ значеніяхъ D, т.-е. $D_1, D_2, \ldots$ это уравненіе представляетъ рядъ подобныхъ и подобно расположенныхъ кривыхъ второго порядка. Но эти кривыя будутъ проекціями кривыхъ, получаемыхъ въ пересѣченіи эллипсоида съ параллельными плоскостями. Для полученія уравненій этихъ сѣченій относительно осей координатъ, соотвѣтственно рас-

положенныхъ въ сѣкущихъ плоскостяхъ, нужно, какъ было разсмотрѣно выше, замѣнить x и y ихъ выраженіями $X\cos\alpha$, $Y\cos\beta$, гдѣ α и β — опредѣленные углы, не мѣняющіеся при движеніи точки по какой-либо кривой пересѣченія. Послѣ такой замѣны получимъ уравненіе сѣченій

$$\left[\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{C^2c^2}\right]\cos^2\alpha\, X^2+\left[\frac{1}{b^2}+\frac{B^2}{C^2c^2}\right]\cos^2\beta\, Y^2+2\,\frac{AB}{C^2c^2}\cos\alpha\cos\beta\, X\,Y+$$

$$+2\,\frac{AD}{C^2c^2}\cos\alpha\, X+2\,\frac{BD}{C^2c^2}\cos\beta\, Y+\left[\frac{D^2}{C^2c^2}-1\right]=0. \qquad (1)$$

Въ этомъ уравненіи коэффиціенты при старшихъ членахъ не зависятъ отъ D и остаются постоянными при измѣненіи D, т.-е. кривыя пересѣченія эллипсоида (или какой-нибудь другой поверхности второго порядка) съ параллельными плоскостями подобны и подобно расположены.

§ 11. **Круговыя сѣченія поверхностей второго порядка.** Круговыя сѣченія можно получить на тѣхъ поверхностяхъ второго порядка, на которыхъ есть эллиптическія сѣченія. Къ такимъ поверхностямъ принадлежатъ эллипсоидъ, гиперболоиды того и другого рода, эллиптическій параболоидъ, конусъ и эллиптическій цилиндръ. Возьмемъ, напр., эллипсоидъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

и пусть a будетъ наибольшей полуосью, b — средней, а c — меньшею:

$$a>b>c.$$

Черт. 145.

Проводимъ плоскость черезъ ось y (черт. 145). Въ сѣченіи съ эллипсоидомъ получимъ эллипсъ, симметрично расположенный относительно плоскости zOx, и слѣдовательно, полуоси этого эллипса будутъ b и d, гдѣ d — одинъ изъ полудіаметровъ эллипса

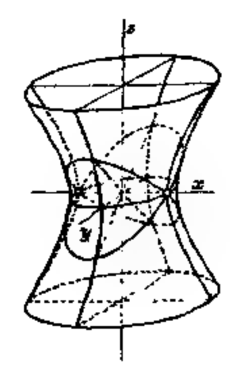
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1.$$

При вращеніи сѣкущей плоскости около оси Oy полудіаметръ d непрерывно мѣняется, увеличиваясь отъ c до a и потомъ уменьша-

ясь отъ a до c, и слѣдовательно, два раза дѣлается равнымъ b. Такимъ образомъ можно провести черезъ ось Oy двѣ плоскости, симметрично расположенныя относительно плоскостей координатъ, и эти плоскости пересѣкутъ эллипсоидъ по эллипсамъ съ равными полуосями $b = d$, т.-е. по кругамъ. Въ сѣченіи съ плоскостью, параллельною какой либо изъ этихъ двухъ плоскостей, получимъ, согласно § 10, кривую, подобную кругу, т.-е. тоже кругъ. Такимъ образомъ на эллипсоидѣ мы можемъ получить двѣ серіи круговыхъ сѣченій. Въ пересѣченіи эллипсоида съ плоскостями, проходящими черезъ ось Oz или Oy, получить дѣйствительнаго круга нельзя, ибо одна изъ полуосей сѣченія будетъ всегда или больше, или меньше другой.

Когда плоскость кругового сѣченія, перемѣщаясь параллельно самой себѣ, коснется эллипсоида, то кругъ сѣченія обратится въ точку прикосновенія, и эта точка называется точкой округленія эллипсоида. Какъ нетрудно сообразить, эллипсоидъ имѣетъ четыре точки округленія.

Такъ какъ старшіе члены уравненій гиперболоида однополостнаго и гиперболоида двуполостнаго



Черт. 146.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

при одинаковыхъ a, b, c одинаковы, то сѣченія ихъ любою плоскостью будутъ кривыя подобныя и подобно расположенныя; подобная же кривая получится и въ сѣченіи той же плоскости съ общимъ ихъ асимптотическимъ конусомъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Слѣдовательно, и круговыя сѣченія этихъ трехъ поверхностей будутъ въ тѣхъ же самыхъ плоскостяхъ.

Если мы найдемъ круговыя сѣченія гиперболоида однополостнаго, то этимъ самымъ мы найдемъ круговыя сѣченія остальныхъ поверхностей.

Пусть $a > b$; проведемъ плоскость черезъ ось Ox (черт. 146), въ сѣченіи съ однополостнымъ гиперболоидомъ получимъ эллипсъ, симметрично расположенный относительно плоскости yOz; одна изъ

полуосей этого эллипса a, другая d, служащая однимъ изъ полудіаметровъ гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

При вращеніи сѣкущей плоскости около оси Ox въ ту или другую сторону полуось d непрерывно и безгранично увеличивается, начиная съ b и, слѣдовательно, дѣлается два раза равной a; такимъ образомъ можно провести двѣ плоскости черезъ ось Ox, каждая изъ которыхъ пересѣкаетъ гиперболоидъ по эллипсу съ равными полуосями, т.-е. по кругу. Параллельныя плоскости также пересѣкаютъ гиперболоидъ по кругамъ. Ни одна изъ этихъ параллельныхъ плоскостей не коснется гиперболоида. Такимъ образомъ на гиперболоидѣ имѣются двѣ серіи круговыхъ сѣченій и ни одной точки округленія.

Тѣ же плоскости даютъ круговыя сѣченія на двуполостномъ гиперболоидѣ и на асимптотическомъ конусѣ. При этомъ четыре изъ этихъ плоскостей коснутся двуполостнаго гиперболоида и точки прикосновенія будутъ точками округленія его

Для отысканія круговыхъ сѣченій на эллиптическомъ параболоидѣ

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z , \tag{1}$$

если $p > q$, проведемъ сѣкущую плоскость параллельно оси Ox. Уравненіе этой плоскости не должно содержать x:

$$By + Cz + D = 0 . \tag{2}$$

Исключая изъ уравненій (1) и (2) z, мы получимъ уравненіе проекціи на плоскость xOy кривой пересѣченія разсматриваемой плоскости съ параболоидомъ:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = -2\frac{By + D}{C} . \tag{3}$$

Составимъ уравненіе кривой пересѣченія, принявъ за оси координатъ $O'X$, $O'Y$ прямыя пересѣченія плоскости (2) съ плоскостями zOx и yOz. Пусть плоскость (2) наклонена къ плоскости xOy подъ угломъ α. Этотъ уголъ α будетъ въ то же время и угломъ между осями Oy и $O'Y$; ось же $O'X$ параллельна оси Ox. Слѣдовательно,

$$x = X \quad \text{и} \quad y = Y\cos\alpha \tag{4}$$

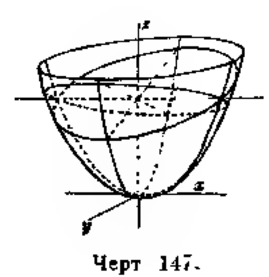
Замѣняя x и y въ уравненіи (3) этими ихъ выраженіями, мы и получимъ уравненіе кривой пересѣченія, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ $O'X$, $O'Y$:

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2 \cos^2 \alpha}{q} = -2\,\frac{B\,Y\cos\alpha + D}{C} \tag{5}$$

Кривая второго порядка, данная относительно прямоугольной системы координатъ общимъ уравненіемъ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

будетъ кругомъ, если $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$ (ср стр. 66). Слѣдовательно, уравненіе (5) представляетъ кругъ, если



Черт 147.

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos^2\alpha}{q}.$$

Отсюда можно опредѣлить два значенія для косинуса угла наклона сѣкущей плоскости (2) къ плоскости xOy:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}.$$

Такимъ образомъ черезъ каждую прямую, параллельную оси Ox (черт. 147), можно провести двѣ плоскости, симметрично наклоненныхъ къ плоскости zOx, и эти плоскости пересѣкутъ эллиптическій параболоидъ по кругамъ. Параллельныя сѣченія будутъ также круговыми. Изъ параллельныхъ плоскостей круговыхъ сѣченій двѣ коснутся параболоида и точки прикосновенія будутъ его точками округленія.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться въ существованіи двухъ серій круговыхъ сѣченій на эллиптическомъ цилиндрѣ.

Если поверхность второго порядка есть поверхность вращенія, то обѣ серіи круговыхъ сѣченій сливаются въ одну: плоскости круговыхъ сѣченій перпендикулярны къ оси вращенія.

Пользуясь круговыми сѣченіями поверхностей второго порядка, можно устроить модели этихъ поверхностей, вырѣзавъ изъ бумаги достаточное число круговъ, размѣры которыхъ легко могутъ быть разсчитаны графически, и сцѣпивъ круги различныхъ серій соотвѣтствующимъ образомъ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ
И
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЯ.

Первая часть.

ГЛАВА I.

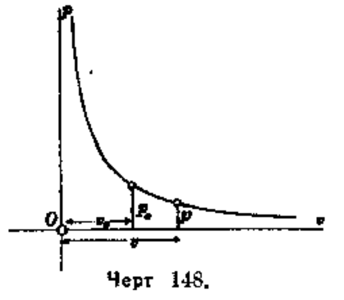
ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ФУНКЦІИ.

§ 1. **Функціи и ихъ опредѣленіе.** Во введеніи (стр. 14) было отмѣчено, что изученіе функцій составляетъ главную задачу высшей математики. Этимъ и обусловливается главнымъ образомъ приложимость ея методовъ къ рѣшенію соотвѣтствующихъ вопросовъ наукъ о природѣ.

Изслѣдованіе того или иного явленія природы имѣетъ цѣлью установленіе закона, объединяющаго однимъ выраженіемъ, одною какой-нибудь мыслью разнообразныя стороны этого явленія. Если въ изучаемое явленіе входятъ перемѣнныя величины, то установленіе закона сводится къ установленію функціональной зависимости этихъ величинъ. Такъ, изученіе состоянія газовъ при постоянной температурѣ приводитъ къ установленію закона Бойля-Маріотта

$$p\,v = p_0\,v_0,$$

гдѣ p_0, v_0 — постоянныя величины, p — перемѣнное давленіе, v — объемъ газа. Это уравненіе устанавливаетъ функціональную зависимость давленія и объема газа при постоянной температурѣ, зависимость, которая можетъ быть представлена графически въ видѣ одной вѣтви гиперболы, имѣющей оси координатъ своими асимптотами (черт. 148) *).



Черт 148.

*) Такъ какъ p и v — величины разнородныя, то на чертежѣ единицы мѣры для p и v можно взять и неравными отрѣзками.

Функціональная зависимость двухъ перемѣнныхъ величинъ x и y

$$y = f(x)$$

состоитъ въ томъ, что каждому значенію аргумента x изъ тѣхъ значеній, какія онъ можетъ принимать, соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе функціи. Если аргументъ x можетъ принимать любое значеніе въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, т.-е.

$$-\infty < x < +\infty$$

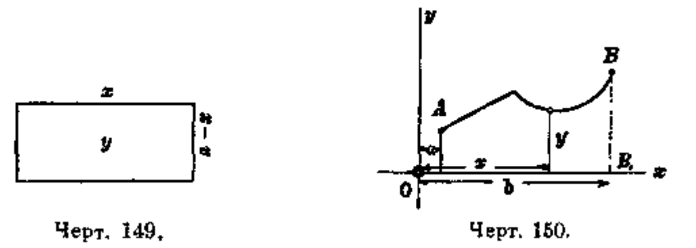
и каждому его значенію соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе y, то функція опредѣлена вполнѣ.

Но въ зависимости отъ самаго опредѣленія разсматриваемой функціи или отъ условій задачи, поставленной для изслѣдованія, на измѣненіе независимаго перемѣннаго можетъ быть наложено то или иное ограниченіе и функція для нѣкоторыхъ значеній аргумента, которыхъ можетъ быть и безчисленное множество, не будетъ опредѣлена.

Примѣръ 1. Произведеніе нѣсколькихъ первыхъ чиселъ натуральнаго ряда $1 . 2 . 3 \ldots . x$ является функціей послѣдняго изъ нихъ (x):

$$y = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots x.$$

По самому опредѣленію этой функціи аргументъ x можетъ принимать лишь цѣлыя значенія: $x = 1, 2, 3, \ldots$; функція y опредѣлена лишь для цѣлыхъ значеній аргумента.



Черт. 149. Черт. 150.

Примѣръ 2. Площадь прямоугольника, мѣняющаго свою форму но имѣющаго постоянный периметръ $2a$ (черт. 149), будетъ функціей одной изъ сторонъ x:

$$y = x(a - x).$$

По самому опредѣленію этой величины аргументъ x можетъ измѣняться отъ 0 до a: $0 < x < a$.

Примѣръ 3. Пусть функція опредѣлена какъ ордината данной линіи (черт. 150):

$$y = f(x).$$

Абсциссы концовъ этой линіи будутъ границами для измѣненія аргумента:

$$a \leqq x \leqq b.$$

Примѣръ 4. Ордината точки M, движущейся по прямой, расположенной какъ-нибудь относительно прямоугольной системы координатъ, является вполнѣ опредѣленной функціей абсциссы этой точки· абсцисса является независимымъ перемѣннымъ, неограниченнымъ въ своемъ измѣненіи.

Соотвѣтствіе значенія независимаго и зависимаго перемѣнныхъ можетъ быть установлено различными способами. Если функціональная зависимость двухъ перемѣнныхъ величинъ установлена указаніемъ тѣхъ ариѳметическихъ или общѣе—аналитическихъ операцій, какія нужно совершить надъ аргументомъ и постоянными, то функція называется явною.

$$y = f(x)$$

Если зависимость опредѣлена уравненіемъ, въ которомъ указаны операціи, совершаемыя надъ обѣими перемѣнными величинами—аргументомъ и опредѣляемой функціей, то послѣдняя называется неявною функціей:

$$F(x, y) = 0.$$

Рѣшая это уравненіе, если это возможно, мы сдѣлаемъ неявную функцію явною, т. е. второй случай сведемъ къ первому.

Смотря по характеру тѣхъ операцій, какія нужно совершить надъ постоянными и перемѣнными для установленія функціональной зависимости, функціи раздѣляются на два обширныхъ класса алгебраическихъ функцій и трансцендентныхъ.

Алгебраическія функціи опредѣляются помощью алгебраическихъ операцій, совершаемыхъ надъ перемѣнными. Подъ алгебраическими операціями разумѣются прежде всего прямыя дѣйствія: сложеніе, умноженіе и возведеніе въ степень съ цѣлымъ показателемъ, потомъ операціи, необходимыя для рѣшенія уравненій, составленныхъ помощью этихъ дѣйствій, сюда, слѣдовательно, относятся, не исчерпывая всей совокупности этого рода операцій, вычитаніе, дѣленіе, извлеченіе корня или возведеніе въ степень съ дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ показателемъ.

Разсмотримъ прежде всего элементарныя функціи того и другого класса. Къ нимъ сводятся обычно разсматриваемыя функціи.

Функціи, не сводящіяся къ элементарнымъ, называются высшими трансцендентными.

§ 2. **Степень:** $y = x^n$. Для полученія значенія функціи, соотвѣтствующаго данному значенію аргумента, нужно возвести послѣднее въ n-ную степень. При n положительномъ и цѣломъ эта операція сводится къ перемноженію: напр., при $n = 5$, $y = x.x.x.x.x$; при n дробномъ къ извлеченію корня изъ произведенія: напр., при $n = {}^3/_5$, $y = \sqrt[5]{x.x.x}$; при n отрицательномъ цѣломъ или дробномъ— къ дѣленію единицы на произведеніе или корень: напр.,

$$\text{при} \quad n = -3, \quad y = \frac{1}{x.x.x}; \qquad \text{при} \quad n = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x.x}}.$$

Если данное значеніе аргумента ирраціональное, напр., $x = \sqrt{2} = 1,414\ldots$, то предыдущія операціи—операціи надъ ирраціональными числами сводятся по опредѣленію (стр. 8) къ вычисленію надъ приближенными значеніями аргумента (1; 1,4; 1,41; ....), къ вычисленію приближенныхъ значеній искомаго результата, а сужденіе объ истинномъ результатѣ есть сужденіе о предѣлѣ.

Такимъ образомъ разсматриваемая функція при раціональномъ, т.-е. цѣломъ или дробномъ значеніи показателя степени опредѣлена вполнѣ для всякаго значенія аргумента. Но что разумѣется подъ степенью при ирраціональномъ показателѣ? Какія операціи, напр., надо совершить надъ аргументомъ для полученія соотвѣтствующаго значенія функціи $y = x^{\sqrt{6}}$ или $y = x^{\pi}$? Какой смыслъ имѣютъ эти символы? Для такихъ случаевъ разсматриваемая функція еще не опредѣлена. Замѣняя ирраціональнаго *) показателя его приближенными значеніями, мы можемъ составить вполнѣ опредѣленныя по предыдущему функціи. Такъ приближеннымъ значеніямъ π: 3; 3,1; 3,14; 3,141, 3,1415; 3,14159;.... соотвѣтствуютъ опредѣленныя степени: $y = x^3$, $y = x^{3,1}$, $y = x^{3,14}$, $y = x^{3,141}$, ... Подъ символомъ x^{π} мы должны разумѣть функцію предѣльную этихъ степеней: вычисленіе значеній этихъ степеней есть вычисленіе

---

*) Терминъ „ирраціональное число" употребляется въ двоякомъ смыслѣ въ болѣе широкомъ—какъ число не раціональное, и болѣе узкомъ — какъ число, получаемое при извлеченіи корня той или иной степени, когда этотъ корень не извлекается точно, напр. $\sqrt{2}$. Мы употребляемъ въ настоящемъ случаѣ этотъ терминъ въ болѣе широкомъ смыслѣ. Не всякое число, ирраціональное въ первомъ смыслѣ, ирраціонально во второмъ.

приближенныхъ значеній опредѣляемой функціи, и если мы убѣдимся, что эти приближенныя значенія стремятся къ опредѣленному предѣлу, то мы можемъ считать предѣльную функцію, т.-е. x^{π} опредѣленной.

Таковъ путь обобщенія и опредѣленія понятія степени на случай ирраціональнаго показателя. Отмѣтимъ, что вычисленіе значеній функціи не всегда можетъ ограничиться конечнымъ числомъ ариѳметическихъ дѣйствій, а сужденіе о результатѣ безконечнаго ряда ариѳметическихъ операцій есть сужденіе о предѣлѣ или, какъ говорятъ—переходъ къ предѣлу.

Степень съ цѣлымъ показателемъ есть функція раціональная, степень съ дробнымъ показателемъ — ирраціональная. Равенство $y = x^{p/q}$ можетъ быть сведено къ алгебраическому уравненію цѣлой степени какъ относительно x, такъ и относительно y: $y^q = x^p$. Но *если показатель n число ирраціональное*, то такое сведеніе невозможно: цѣлая и дробная степени, напр., $y = x^3$, $y = x^{2/3}$ суть функціи алгебраическія, степени же съ ирраціональнымъ показателемъ, напр., $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{\pi}$ суть функціи трансцендентныя.

Цѣлая раціональная функція. Многочленъ, расположенный по цѣлымъ степенямъ аргумента, составляетъ цѣлую раціональную функцію:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

Дробная раціональная функція. Дробь, числитель и знаменатель которой суть многочлены, расположенные по цѣлымъ степенямъ аргумента, составляетъ дробную раціональную функцію

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m} .$$

Алгебраическія функціи вообще, въ частности ирраціональныя опредѣляются алгебраическимъ уравненіемъ цѣлой степени относительно аргумента и опредѣляемой функціи, напр.,

$$y^2 (a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p) + y(b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q) +$$
$$+ (c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r) = 0$$

Рѣшая это уравненіе относительно y, мы сдѣлаемъ эту функцію явною:

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

гдѣ

$$A = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p, \quad B = b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q,$$

$$C = c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r.$$

§ 3. **Показательная функція:** $y = a^x$. Въ отличіе отъ функціи, называемой степенью (x^n), у показательной функціи перемѣннымъ будетъ не основаніе, а показатель, основаніе же (a) постоянно. Вычисленіе значеній показательной функціи a^x для даннаго значенія аргумента сводится къ такого же рода операціямъ, какъ и вычисленіе значеній степени x^n, и такимъ образомъ показательную функцію, какъ и степень, можемъ считать опредѣленной. При этомъ, чтобы каждому дѣйствительному значенію аргумента соотвѣтствовало дѣйствительное значеніе функціи, необходимо принять основаніе a положительнымъ. Кромѣ того, для дробныхъ значеній показателя x съ четнымъ знаменателемъ подъ a^x будемъ разумѣть одно ариѳметическое значеніе, т.-е. положительное; напр., при $a = 4$ и $x = \frac{1}{2}$ подъ a^x нужно разумѣть $4^{1/2} = +\sqrt{4} = +2$, а не $-\sqrt{4} = -2$. При такихъ условіяхъ показательная функція a^x есть функція однозначная, т.-е. каждому значенію аргумента соотвѣтствуетъ только одно значеніе функціи.

Если $a > 1$, то при положительныхъ значеніяхъ показателя $a^x > 1$, а при отрицательныхъ $a^x < 1$, напр., при $x = -3$,

$$a^x = a^{-3} = \frac{1}{a^3} < 1.$$

При $a = 1$, $a^x = 1$. Если $a < 1$, то при положительныхъ значеніяхъ показателя $a^x < 1$, а при отрицательныхъ $a^x > 1$, напр., при $x = -3$

$$a^x = a^{-3} = \frac{1}{a^3},$$

но $a < 1$ и $a^3 < 1$, слѣдовательно, $\frac{1}{a^3} > 1$.

Равенство $y = a^x$ не сводится къ алгебраическому уравненію, связывающему аргументъ x и функцію y: показательная функція—функція трансцендентная.

§ 4. **Логариѳмическая функція: $y = log_a x$.** Въ уравненіи $y = a^x$, опредѣляющемъ показательную функцію, показателя будемъ считать функціей, а прежнюю функцію аргументомъ и измѣнимъ въ этомъ смыслѣ обозначенія перемѣнныхъ, послѣ чего опредѣляющее равенство принимаетъ видъ

$$x = a^y \tag{1}$$

Этимъ уравненіемъ опредѣляется функція, обратная показательной, называемая логариѳмической и обозначаемая слѣдующимъ образомъ:

$$y = log_a x. \tag{2}$$

Читается: y есть логариѳмъ при основаніи a отъ x.

Равенства (1) и (2) устанавливаютъ одну и ту же функціональную зависимость перемѣнныхъ x и y. Изъ этихъ равенствъ вытекаютъ слѣдующія тождества, опредѣляющія символъ log_a:

$$a^{log_a x} = x \quad \text{и} \quad log_a a^y = y.$$

Изъ равенствъ (1) и (2) первое указываетъ первоначальный пріемъ вычисленія логариѳма по данному значенію аргумента x. Положимъ, требуется вычислить $log_a N$ съ точностью до 0,001. Обѣ части равенства (1), въ которомъ полагаемъ x равнымъ N, возводимъ въ степень, показатель которой равенъ 1000:

$$N^{1000} = a^{1000y}$$

Опредѣляемъ степень N^{1000}, перемножая N само на себя соотвѣтствующее число разъ: $N . N . N \ldots\ldots = M$. Потомъ перемножаемъ основаніе a само на себя, полученное произведеніе снова множимъ на основаніе a, повторяя перемноженіе на a новыхъ произведеній до тѣхъ поръ, пока въ произведеніи не получится число, всего ближе подходящее къ числу M, и считаемъ, сколько разъ было взято основаніе a множителемъ. Положимъ, для этого a нужно взять P разъ множителемъ, такъ что

$$a^P < M < a^{P+1}.$$

Въ такомъ случаѣ P отличается отъ $1000y$ меньше, чѣмъ на единицу, а $\frac{P}{1000}$ отличается отъ y, т.-е. отъ искомаго $log_a N$ меньше,

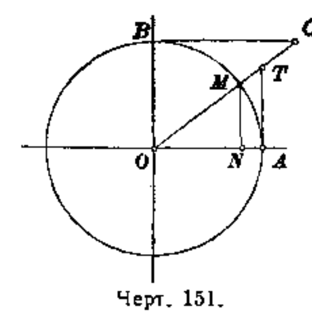
чѣмъ на одну тысячную; такимъ образомъ 0,001 P и будетъ искомымъ приближеніемъ $log_a N$:

$$log_a N \sim \frac{P}{1000}.$$

Но вычисленіе по такому способу граничитъ съ невозможностью. возведеніе числа въ очень высокія степени представляетъ работу слишкомъ продолжительную. Одна изъ задачъ высшей математики и состоитъ въ томъ, чтобы изыскать основанія для замѣны такихъ затруднительныхъ способовъ вычисленія иными, болѣе удобными и выполнимыми.

Логариѳмическая функція, какъ функція обратная показательной, функція трансцендентная.

§ 5. **Тригонометрическія функціи.** По первоначальному опредѣленію тригонометрическія функціи являются отношеніями сторонъ прямоугольнаго треугольника, одинъ изъ острыхъ угловъ котораго является аргументомъ (Введеніе § 8, черт. 2) и который теперь будемъ обозначать черезъ x.



Черт. 151.

$$sin\, x = \frac{a}{c}, \quad tg\, x = \frac{a}{b}, \quad sec\, x = \frac{c}{b}.$$

$$cos\, x = \frac{b}{c}, \quad cotg\, x = \frac{b}{a}, \quad cosec\, x = \frac{c}{a}.$$

При такомъ опредѣленіи аргументъ можетъ мѣняться въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Распространеніе опредѣленія тригонометрическихъ функцій и для значеній аргумента, выходящихъ изъ указанныхъ границъ, приводитъ къ обычной геометрической интерпретаціи этихъ функцій въ видѣ тѣхъ или иныхъ отрѣзковъ въ плоскости круга, радіусъ котораго принятъ за единицу, иначе—тригонометрическія функціи являются отношеніями этихъ отрѣзковъ къ радіусу круга (черт 151):

$$OA = OB = OM = R;$$

$$\frac{NM}{R} = sin\, x, \quad \frac{AT}{R} = tg\, x, \quad \frac{OT}{R} = sec\, x;$$

$$\frac{ON}{R} = cos\, x, \quad \frac{BC}{R} = cotg\, x, \quad \frac{OC}{R} = cosec\, x.$$

Аргументъ x будемъ разсматривать какъ уголъ AOM, измѣренный дуговой мѣрой или, что сводится къ тому же — какъ дугу AM круга, радіусъ котораго OA принятъ за единицу мѣры. Каждому значенію аргумента x, заключенному между $-\infty$ и $+\infty$, т.-е.

$$-\infty < x < +\infty,$$

соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе функціи, и лишь при $x = \pm\infty$ функціи остаются неопредѣленными, иначе — при безграничномъ и непрерывномъ увеличеніи абсолютной величины аргумента тригонометрическія функціи не стремятся къ какому-либо опредѣленному предѣлу.

Тригонометрическія функціи являются функціями періодическими: періодомъ для тангенса и котангенса служитъ π, а для остальныхъ 2π; прибавленіе періода къ аргументу не мѣняетъ величины функціи.

Основныя соотношенія тригонометрическихъ функцій. Изъ прямоугольнаго треугольника ONM слѣдуетъ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

Изъ подобія треугольниковъ ONM, OAT и CBO имѣемъ

$$\frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x, \quad \frac{\cos x}{\sin x} = cotg\, x; \tag{2}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad cosec\, x = \frac{1}{\sin x}, \quad cotg\, x = \frac{1}{tg\, x}. \tag{3}$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ OAT и OBC слѣдуетъ

$$\sec x = \sqrt{1 + tg^2 x}, \quad cosec\, x = \sqrt{1 + cotg^2 x} = \frac{\sqrt{1 + tg^2 x}}{tg\, x}, \tag{4}$$

откуда

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}}, \quad \sin x = \frac{tg\, x}{\sqrt{1 + tg^2 x}} \tag{5}$$

Тригонометрическія функціи суммы или разности двухъ угловъ. Пусть аргументъ x равенъ суммѣ двухъ угловъ α и β:

$$x = \alpha + \beta.$$

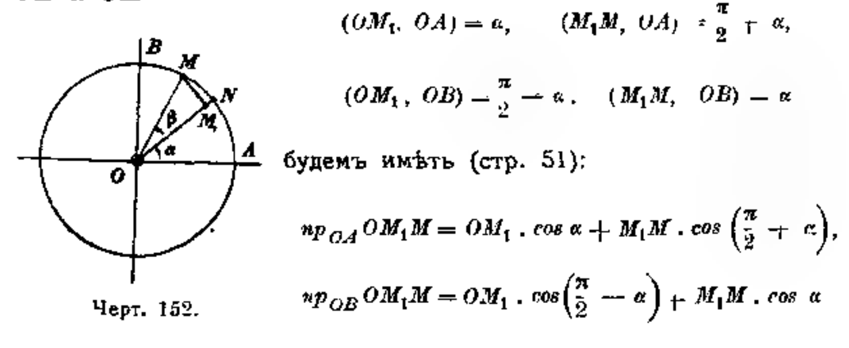
Принимая радіусъ круга равнымъ единицѣ, будемъ имѣть (черт. 152)

$$OM_1 = \cos\beta, \quad M_1M = \sin\beta. \tag{a}$$

Кромѣ того, проекція ломаной OM_1M на діаметръ OB равна проекціи замыкающей OM и, слѣдовательно, равна $\sin(\alpha+\beta)$, а проекція на діаметръ OA равна $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\left.\begin{array}{l} np_{OB}\, OM_1M = \sin(\alpha+\beta) \\ np_{OA}\, OM_1M = \cos(\alpha+\beta) \end{array}\right\} \tag{b}$$

Опредѣливъ углы наклона звеньевъ ломаной OM_1M къ діаметрамъ OB и OA —



Черт. 152.

$$(OM_1,\ OA) = \alpha, \qquad (M_1M,\ OA) = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$(OM_1,\ OB) = \frac{\pi}{2} - \alpha, \qquad (M_1M,\ OB) = \alpha$$

будемъ имѣть (стр. 51):

$$np_{OA}\, OM_1M = OM_1 \cdot \cos\alpha + M_1M \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$$np_{OB}\, OM_1M = OM_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + M_1M \cdot \cos\alpha$$

или, принимая во вниманіе равенства (a) и (b):

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{6}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \tag{7}$$

Такъ какъ теоремы о проекціяхъ имѣютъ мѣсто при любомъ наклонѣ звеньевъ къ осямъ проекцій и при измѣненіи направленія звена M_1M на противоположное мѣняется знакъ угла β, то формулы (6) и (7) имѣютъ мѣсто при всякомъ значеніи угловъ α и β. Слѣдовательно,

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{8}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{9}$$

Изъ формулъ (6) и (7) имѣемъ:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

или

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\;tg\,\beta}. \tag{10}$$

Точно также изъ формулъ (8) и (9) получимъ

$$tg\,(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\;tg\,\beta}. \tag{11}$$

Удвоеніе угла. Изъ формулъ (6), (7) и (10), полагая $\alpha=\beta$, будемъ имѣть:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\;\cos\alpha,\quad tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}. \tag{12}$$

Соотношенія, выражаемыя формулами (12), можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2},\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\qquad tg\,\alpha=\frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{13}$$

Дѣленіе угла пополамъ. Изъ равенствъ

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned}2\cos^2\frac{\alpha}{2}&=1+\cos\alpha,\\ 2\sin^2\frac{\alpha}{2}&=1-\cos\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

откуда

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{15}$$

Знакъ передъ радикалами берется въ согласіи съ величиной угла $\frac{\alpha}{2}$. Зная $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, можно опредѣлить и остальныя тригонометрическія функціи аргумента $\frac{\alpha}{2}$.

Сумма и разность синусовъ. Изъ формулъ (7) и (9):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

слѣдуетъ

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Полагая $\alpha+\beta=u$ и $\alpha-\beta=v$, а слѣдовательно, $\alpha=(u+v):2$ и $\beta=(u-v):2$, изъ предыдущихъ формулъ получимъ

$$\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}, \tag{16}$$

$$\sin u-\sin v=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}. \tag{17}$$

Сумма и разность косинусовъ. Изъ формулъ (6) и (8)

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

слѣдуетъ

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

или

$$\cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}, \tag{18}$$

$$\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}. \tag{19}$$

Числовыя значенія тригонометрическихъ функцій, какъ вытекаетъ изъ вышеприведеннаго ихъ геометрическаго опредѣленія, могутъ быть найдены путемъ измѣренія соотвѣтствующихъ отрѣзковъ радіусомъ основного круга, какъ единицею мѣры. Но измѣреніе является операціей, точность которой не можетъ быть увеличена до желаемой степени, да и степень точности измѣренія безъ сравненія съ числовыми результатами, полученными другимъ путемъ, трудно опредѣлима. Между тѣмъ предыдущія формулы даютъ возможность примѣнить къ рѣшенію поставленной задачи способъ вычисленія. Изъ формулъ (15) слѣдуетъ, если положимъ $\alpha=\frac{\pi}{2}$,

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{и}\quad\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Зная $\sin\frac{\pi}{4}$ и $\cos\frac{\pi}{4}$, можно вычислить и остальныя тригонометрическія функціи, напр.,

$$tg\,\frac{\pi}{4} = 1, \quad cotg\,\frac{\pi}{4} = 1.$$

Полагая $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и пользуясь тѣми же формулами (15), найдемъ $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ и остальныя тригонометрическія функціи того же аргумента. Повторяя ту же операцію, можно получить числовыя значенія тригонометрическихъ функцій для аргумента, равнаго $\frac{\pi}{2^n}$, гдѣ n какое угодно большое цѣлое число. Но любой уголъ α можетъ быть представленъ съ достаточной степенью точности какъ сумма *) угловъ $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots \frac{\pi}{2^n}$ и, слѣдовательно, помощью формулъ (6), (7), (10) и (15) можно съ любою степенью точности вычислить тригонометрическія функціи этого аргумента.

Вычисленіе и этимъ способомъ представляетъ конечно затрудненія; но по этому поводу мы должны повторить то же, что было сказано относительно вычисленія логариѳмовъ: одна изъ задачъ высшей математики и состоитъ въ томъ, чтобы изыскать основанія для замѣны затруднительныхъ способовъ вычисленія иными, болѣе удобными.

Переходъ отъ градусной мѣры угла къ дуговой. Въ практическихъ приложеніяхъ тригонометрическихъ функцій углы даются въ градусной мѣрѣ. Нетрудно выразить тѣ же углы и въ дуговой мѣрѣ. Пусть x дуговая, а α^0 градусная мѣра того же угла или той же дуги (*arcus*).

$$x = arc\,\alpha^0 \quad \text{(но не } x = \alpha^0 \text{!)}$$

Число π соотвѣтствуетъ дугѣ въ 180^0:

$$\pi = arc\,180^0, \quad \frac{\pi}{180} = arc\,1^0;$$

слѣдовательно,

$$x = arc\,\alpha^0 = \pi\,\frac{\alpha}{180} \quad \text{и} \quad \alpha^0 = \frac{x}{\pi}\cdot 180^0$$

Черт. 153.

Такъ какъ $\pi \sim 3{,}14159265$, то $1 \sim arc\,57^0\,17'\,44'',8$ (черт. 153) и

---

*) Можно считать $\alpha < \frac{\pi}{2}$, нѣкоторые изъ угловъ $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \ldots \frac{\pi}{2^n}$ могутъ, конечно, и не входить въ опредѣляющую уголъ α сумму.

$arc\,1^0 \sim 0{,}017$ (при радіусѣ, равномъ 1 дециметру. дуга въ 1° немного меньше 2 миллиметровъ).

§ 6. **Круговыя или циклометрическія функціи** Круговыя или циклометрическія функціи являются обратными тригонометрическимъ: ту или другую тригонометрическую величину мы теперь принимаемъ за аргументъ (x), а дугу (*arcus*) за функцію этого аргумента Такимъ образомъ получимъ слѣдующія функціи:

$$1.\ \ y = arc\,sin\,x,\quad 3.\ \ y = arc\,tg\,x,\quad 5.\ \ y = arc\,sec\,x.$$

$$2.\ \ y = arc\,cos\,x,\quad 4.\ \ y = arc\,cotg\,x,\quad 6.\ \ y = arc\,cosec\,x.$$

Равенство $y = arc\,sin\,x$ читается такъ. y есть аркусъ синусъ x, что означаетъ слѣдующее: y есть дуга, синусъ которой равенъ x. Подобное же значеніе имѣютъ и остальныя круговыя функціи

Для полученія дѣйствительныхъ значеній круговыхъ функцій аргументъ x можно мѣнять въ слѣдующихъ границахъ:

$$1.\ \text{для}\ \ arc\,sin\,x\ \ \text{и}\ \ arc\,cos\,x:\ \ -1 \leqq x \leqq +1;$$

$$2.\ \text{для}\ \ arc\,tg\,x\ \ \text{и}\ \ arc\,cotg\,x:\ \ -\infty \leqq x \leqq +\infty;$$

$$3\ \ \text{для}\ \ arc\,sec\,x\ \ \text{и}\ \ arc\,cosec\,x:\ \ -\infty \leqq x \leqq -1\ \ \text{и}\ \ +1 \leqq x \leqq +\infty$$

Такъ какъ тригонометрическія функціи періодическія, то имъ обратныя круговыя функціи многозначныя: каждому значенію аргумента соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній круговой функціи, напр., для $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = arc\,sin\frac{\sqrt{2}}{2}$, имѣетъ значенія $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ $\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \ldots$, вообще $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ или $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, гдѣ k какое-нибудь цѣлое число.

Но можно выдѣлить, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, для каждой круговой функціи одну ея вѣтвь и тѣмъ самымъ получить функцію однозначную; напр., для x, заключеннаго между -1 и $+1$ значенія $arc\,sin\,x$, заключенныя между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, составляютъ одну вѣтвь этой функціи, именно главную вѣтвь:

$$-1 \leq x \leqq 1,\qquad -\frac{\pi}{2} \leq arc\,sin\,x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Разсмотримъ нѣкоторыя соотношенія круговыхъ функцій, вытекающія изъ соотвѣтствующихъ соотношеній тригонометрическихъ функцій.

Изъ равенствъ

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x$$

слѣдуетъ

$$\alpha = \operatorname{arc}\sin x \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha = \operatorname{arc}\cos x,$$

а потому

$$\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2}.$$

Изъ формулы для тангенса суммы двухъ дугъ

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta},$$

если обозначимъ $tg\,\alpha$ черезъ x и $tg\,\beta$ черезъ y, слѣдуетъ:

$$\alpha = \operatorname{arc} tg\, x, \quad \beta = \operatorname{arc} tg\, y, \quad \alpha+\beta = \operatorname{arc} tg\, \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta}$$

или

$$\operatorname{arc} tg\, x + \operatorname{arc} tg\, y = \operatorname{arc} tg\, \frac{x+y}{1-xy}.$$

Въ этихъ равенствахъ подъ $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc} tg\, x$ и $\operatorname{arc}\cot x$ разумѣются значенія главныхъ вѣтвей этихъ функцій.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Сравнить значенія тригонометрическихъ функцій для угла x со значеніями ихъ для угловъ $x \pm k\pi$ и $x \pm (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $(k = 1,2,3 \ldots)$.

2. Какъ мѣняются значенія тригонометрическихъ функцій при измѣненіи знака аргумента?

3. Когда берется знакъ $+$ или $-$ передъ радикаломъ въ формулахъ (4) (5), (15) § 5?

ГЛАВА II.

ОСИОВАНІЯ УЧЕНІЯ О ФУНКЦІЯХЪ. ТЕОРІЯ ПРЕДѢЛОВЪ.

§ 1. **Безконечно большія и безконечно малыя величины.** Въ предыдущей главѣ, въ которой имѣлось въ виду опредѣленіе функціи вообще и главнымъ образомъ опредѣленіе функцій элементарныхъ, мы видѣли, что вычисленіе значеній функцій для какого-нибудь значенія аргумента не всегда можетъ быть сведено къ простой ариѳметикѣ, т.-е. къ конечному счету Слово „вычисленіе" приходится понимать теперь шире—именно какъ безконечный процессъ, который состоитъ изъ безграничнаго ряда ариѳметическихъ дѣйствій; сужденіе о результатѣ этого безконечнаго процесса есть переходъ къ предѣлу. Въ чемъ состоитъ этотъ переходъ къ предѣлу, устанавливается въ теоріи предѣловъ. Теорія предѣловъ и служитъ основаніемъ ученія о функціяхъ. Въ основѣ этой теоріи лежитъ понятіе безконечно малой величины, которое въ свою очередь тѣсно связано съ понятіемъ безконечно большого числа.

Безконечно большое число. Числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4,...., n,... безгранично увеличиваются и въ этомъ рядѣ нѣтъ послѣдняго числа. Число n, принимающее послѣдовательно значенія изъ этого ряда, можетъ превзойти (сдѣлаться больше) любое напередъ данное число. Въ этомъ смыслѣ мы говоримъ, что n стремится къ безконечности. Перемѣнное число можетъ принимать безграничный рядъ значеній и по иному закону. Пусть a_n будетъ такимъ числомъ, при чемъ значекъ— нумеръ этого числа —и указываетъ мѣсто его въ рядѣ значеній, которыя можетъ принимать это число:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n, \dots$$

Если число a_n, послѣдовательно принимая указанныя значенія, можетъ быть сдѣлано по абсолютной величинѣ больше любого напередъ заданнаго положительнаго числа M и при дальнѣйшемъ увеличеніи нумера оставаться таковымъ, то мы говоримъ, что это-

число стремится къ безконечности (∞); если при этомъ оно по крайней мѣрѣ съ нѣкотораго своего нумера становится положительнымъ и остается далѣе таковымъ, то мы говоримъ, что оно стремится къ положительной безконечности ($+\infty$); таково, напр., число $n - 100$; а если, сдѣлавшись отрицательнымъ, a_n остается отрицательнымъ, оно стремится къ отрицательной безконечности ($-\infty$); таково, напр., число $100 - n$.

Примѣръ 1. Число $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ принимаетъ рядъ значеній $a_n = 1/2, 4/3, 9/4, \ldots$ Можно подобрать такой величины нумеръ n, что число a_n будетъ по абсолютной величинѣ *) больше любого напередъ заданнаго положительнаго числа M

$$\left|\frac{n^2}{n+1}\right| > M.$$

Такъ какъ n мы считаемъ равнымъ положительному числу, то предыдущее неравенство равносильно слѣдующему:

$$\frac{n^2}{n+1} > M$$

Отсюда

$$n^2 > Mn + M \quad \text{или} \quad n^2 - Mn > M.$$

Но, при $n > M$, $n^2 - Mn = n(n - M) > n - M$, поэтому, если n возьмемъ настолько большимъ, чтобы $n - M$ было больше M, то тѣмъ больше $n^2 - Mn$ будетъ болѣе M, а стало быть и $a_n > M$. Такимъ образомъ при n, удовлетворяющемъ неравенству

$$n - M > M, \quad \text{т.-е. при} \quad n > 2M,$$

число a_n будетъ больше напередъ заданнаго числа M. Но будетъ ли при дальнѣйшемъ увеличеніи нумера n число a_n оставаться больше числа M? Дѣля числителя и знаменателя дроби $\frac{n^2}{n+1}$ на n, будемъ имѣть

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}}$$

Изъ этого выраженія числа a_n видно, что при увеличеніи числа n числитель этой дроби увеличивается, а знаменатель уменьшается и, слѣдовательно, дробь увеличивается и потому остается большей числа M, если она была уже больше M.

*) Абсолютная величина какого-либо числа z обозначается такъ: $|z|$.

Задача Показать, что $a_n = \frac{10 - n^2}{n}$, принимая рядъ значеній 9, 3, . . . , стремится къ отрицательной безконечности ($-\infty$).

Примѣръ 2. Число a^n при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ принимаетъ рядъ значеній $1, a, a^2, a^3, \ldots a^n, \ldots$ При $a > 1$ этотъ рядъ возрастаетъ, т.-е. съ увеличеніемъ показателя n степень a^n увеличивается

$$a^{n+1} = a^n \cdot a > a^n \qquad (\text{ибо } a > 1)$$

Покажемъ, что, увеличивая показателя, степень a^n можно сдѣлать больше любого заданнаго напередъ числа M.

Пусть $a = 1 + b$, гдѣ $b = a - 1$ соотвѣтствующее положительное число. Такимъ образомъ имѣемъ

$$a^n = (1 + b)^n .$$

Разлагая $(1 + b)^n$ по биному Ньютона, получимъ

$$a^n = (1 + b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 + \ldots + b^n$$

Такъ какъ b положительное число и биноміальные коэффиціенты положительныя числа, то

$$(1 + b)^n > 1 + n b, \quad \text{или} \quad a^n > 1 + nb$$

Если нумеръ n подберемъ такъ, чтобы $1 + nb$ было больше M, то a fortiori a^n будетъ больше этого числа M:

$$1 + nb > M \quad \text{и} \quad a^n > M.$$

Слѣдовательно, при $n > \frac{M-1}{b}$ число a^n будетъ больше напередъ заданнаго числа M.

Пусть, напримѣръ, $a = 2$, $M = 1\,000\,000$. Число 2^n во всякомъ случаѣ будетъ больше $1\,000\,000$ при

$$n > \frac{1\,000\,000 - 1}{1} = 999\,999.$$

Такимъ образомъ 2^n, безгранично увеличиваясь съ увеличеніемъ показателя, можетъ сдѣлаться больше любого напередъ заданнаго числа M и будетъ оставаться таковымъ при дальнѣйшемъ увеличеніи показателя.

Безконечно малая величина. Число a_n называется безконечно малымъ, если оно, послѣдовательно принимая значенія a_1, a_2, $a_3, \ldots$, становится, наконецъ, по абсолютной величинѣ меньше любого напередъ заданнаго положительнаго числа ε и при дальнѣйшемъ увеличеніи его нумера остается таковымъ:

$$|a_n| < \varepsilon$$

Такое число a_n, по крайней мѣрѣ съ нѣкотораго кумера, безгранично по абсолютной величинѣ уменьшается и стремится къ нулю.

Примѣръ 3. Число $a_n = \frac{1}{n}$ при безгранично увеличивающемся n будетъ безконечно малымъ, ибо всегда можно указать, съ какого мѣста это число будетъ меньше любого напередъ заданнаго положительнаго числа ε и оставаться таковымъ:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Напримѣръ, при $\varepsilon = \frac{1}{1\,000\,000}$, n должно быть больше $1\,000\,000$.

Примѣръ 4. Число $a_n = a^n$ при $|a| < 1$ и $n = 1, 2, 3 \ldots$ будетъ безконечно малымъ. Въ самомъ дѣлѣ, число это съ увеличеніемъ показателя уменьшается; ибо, считая a положительнымъ, будемъ имѣть

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{и} \quad a^{n+1} < a^n.$$

Далѣе, возьмемъ число C, обратное числу a:

$$a = \frac{1}{C} \quad \text{и} \quad a^n = \frac{1}{C^n}.$$

Чтобы a^n можно было сдѣлать меньше любого напередъ заданнаго числа ε, необходимо, чтобы C можно было сдѣлать больше любого напередъ заданнаго числа, ибо изъ неравенства

$$a^n < \varepsilon, \quad \text{или} \quad \frac{1}{C^n} < \varepsilon$$

слѣдуетъ, что

$$C^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Но $C > 1$ и C^n, по доказанному выше, можетъ быть сдѣлано при увеличеніи показателя больше любого напередъ заданнаго числа.

Пусть, напримѣръ, $a = \frac{1}{3}$ и $\varepsilon = \frac{1}{1\,000\,000}$. Слѣдовательно,

$$C = 3 = 1 + 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varepsilon} = 1\,000\,000;$$

$$C^n = (1 + 2)^n > 1 + 2n.$$

Если

$$1 + 2n > 1\,000\,000 \quad \text{или} \quad n > \frac{999\,999}{2},$$

то число $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ будетъ меньше $\frac{1}{1\,000\,000}$ и оставаться таковымъ при дальнѣйшемъ увеличеніи показателя.

Если число a отрицательное и по абсолютной величинѣ меньше единицы, т. е. $|a| < 1$, то a^n стремится къ нулю, принимая поперемѣнно то положительныя, то отрицательныя значенія *).

Если безконечно малое число a_n стремится къ нулю, оставаясь съ нѣкотораго своего нумера положительнымъ, то обратное число $\frac{1}{a_n}$ стремится къ $+\infty$; если a_n стремится къ нулю, оставаясь съ нѣкотораго своего нумера отрицательнымъ, то обратное число $\frac{1}{a_n}$

*) Степени a можно опредѣлить графически слѣдующимъ образомъ. На одной изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ (черт. 154) отъ точки ихъ пересѣченія O откладываемъ отрѣзокъ $OA_0 = 1$, а на другой прямой отрѣзокъ $OA_1 = a$. Изъ точки A_1 возстановляемъ перпендикуляръ A_1A_2 къ прямой A_0A_1 до встрѣчи въ точкѣ A_2 съ первой прямой. Изъ точки A_2 возстановляемъ перпендикуляръ къ прямой A_1A_2 до встрѣчи со второй прямой въ точкѣ A_3 и т. д. Изъ прямоугольнаго треугольника $A_0A_1A_2$ слѣдуетъ:

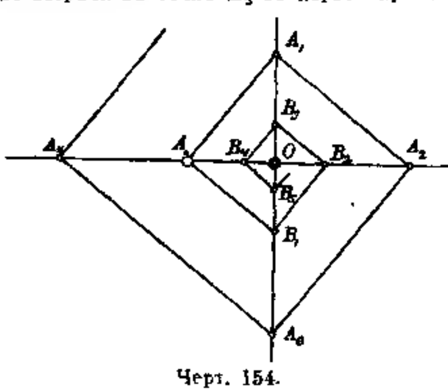
$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA_0} \cdot \overline{OA_2}$$

или

$$a^2 = 1 \cdot \overline{OA_2}$$

откуда $\overline{OA_2} = a^2$. Изъ прямоугольнаго треугольника $A_1A_2A_3$ имѣемъ

$$\overline{OA_2}^2 = \overline{OA_1} \cdot \overline{OA_3}$$



Черт. 154.

или

$$(a^2)^2 = a \cdot \overline{OA_3},$$

откуда $\overline{OA_3} = a^3$. Точно также найдемъ $\overline{OA_4} = a^4$, $\overline{OA_5} = a^5$, и т. д. — Для полученія отрицательныхъ степеней нужно возставить перпендикуляръ изъ точки A_0 къ прямой A_0A_1 до встрѣчи въ точкѣ B_1 со второй прямой, изъ точки B_1 возставить перпендикуляръ къ прямой A_0B_1 до встрѣчи въ точкѣ B_2 съ первой прямой и т. д. Изъ соотвѣтствующихъ прямоугольныхъ треугольниковъ найдемъ:

$$\overline{OB_1} = \frac{1}{a} = a^{-1}, \quad \overline{OB_2} = \frac{1}{a^2} = a^{-2},$$

$$\overline{OB_3} = \frac{1}{a^3} = a^{-3}, \quad \overline{OB_4} = \frac{1}{a^4} = a^{-4}, \ldots$$

Для той же цѣли можно воспользоваться также способомъ, который мы примѣняли при построеніи радіусовъ-векторовъ логариѳмической спирали (стр. 158).

стремится къ $-\infty$; если же a_n стремится къ нулю, принимая попеременно то положительное, то отрицательное значеніе, то обратное число $\frac{1}{a_n}$ не стремится къ опредѣленной (положительной или отрицательной) безконечности, а колеблется между $-\infty$ и $+\infty$.

Если α безконечно малое число, то и произведеніе его на постоянное число $a \cdot \alpha$ будетъ безконечно малымъ, т.-е. $|a \cdot \alpha|$ можно сдѣлать меньше любого положительнаго числа ε; для этого нужно только сдѣлать абсолютную величину α меньше $\frac{\varepsilon}{|a|}$:

$$\text{изъ} \quad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{|a|} \quad \text{слѣдуетъ} \quad |a\alpha| < \varepsilon.$$

Точно также не трудно убѣдиться, что сумма безконечно малыхъ слагаемыхъ, число которыхъ конечно, безконечно мала. Въ самомъ дѣлѣ, если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ безконечно малыя величины, то абсолютную величину суммы ихъ можно сдѣлать меньше любого напередъ заданнаго чиса ε:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n| < \varepsilon.$$

Для этого нужно только сдѣлать каждое слагаемое меньше по абсолютной величинѣ числа $\frac{\varepsilon}{n}$:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n| < |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \ldots + |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Съ понятіемъ безконечно малой величины тѣсно связано понятіе **предѣла**.

§ 2. **Предѣлъ.** Пусть перемѣнное число a_n принимаетъ безграничный рядъ значеній $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ и пусть A нѣкоторое постоянное число. Послѣдовательность этихъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, короче — перемѣнное число a_n **стремится къ предѣлу** A, если разность $a_n - A$ по абсолютной величинѣ съ увеличеніемъ указателя n можетъ быть сдѣлана меньше **любого** напередъ заданнаго положительнаго числа ε и при дальнѣйшемъ увеличеніи указателя остается меньше этого числа ε, другими словами если для всякаго даннаго положительнаго числа ε можно указать такое число m, что при $n \geq m$ всегда имѣетъ мѣсто не-

равенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Постоянное число A называется предѣломъ (limes) перемѣннаго числа a_n:

$$\lim a_n = A, \quad \text{если} \quad |a_n - A| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq m.$$

Иными словами, разность перемѣннаго числа a_n и его предѣла A, т.-е. $a_n - A$ есть величина безконечно малая. Предѣлъ безконечно малаго числа α_n есть нуль:

$$\lim \alpha_n = 0.$$

Примѣчаніе. Если число A_n стремится къ положительной безконечности (см. § 1), а число B_n къ отрицательной, то пишутъ такъ:

$$\lim A_n = +\infty, \quad \lim B_n = -\infty,$$

хотя о безконечно малой разности предѣла и перемѣннаго числа здѣсь говорить не имѣетъ смысла.

Назовемъ безконечно-малую разность перемѣннаго числа a_n и его предѣла A черезъ α_n:

$$a_n - A = \alpha_n.$$

Въ такомъ случаѣ

$$a_n = A + \alpha_n.$$

Если какое-либо перемѣнное число удалось представить въ видѣ суммы постояннаго числа и безконечно малаго, то постоянное слагаемое и будетъ предѣломъ перемѣнной величины.

Примѣръ 1. Отыскать предѣлъ числа $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ (черт. 155). По извѣстной формулѣ геометрической прогрессіи имѣемъ:

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Черт. 155.

Дробь $\frac{1}{2^n}$ — величина безконечно малая (примѣръ 4, § 1). Слѣдовательно,

$$\lim a_n = \lim \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right] = 2.$$

Но не всегда возможно изъ перемѣннаго числа выдѣлить то постоянное, къ которому перемѣнное число стремится какъ къ своему предѣлу. Возникаетъ такимъ образомъ вопросъ, стремится ли перемѣнное число a_n, принимающее рядъ значеній: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$

$a_3, \ldots,$ къ какому-либо предѣлу. Если этотъ предѣлъ существуетъ, то мы его можемъ считать даннымъ этою послѣдовательностью чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ на которыя мы можемъ смотрѣть какъ на приближенныя его значенія подобно тому, какъ ирраціональное число считается даннымъ тѣмъ сѣченіемъ, которымъ совокупность раціональныхъ чиселъ распредѣляется на два класса: числа одного (нижняго) класса считаются приближенными значеніями ирраціональнаго числа съ недостаткомъ, числа другого (верхняго)—приближенными значеніями съ избыткомъ (введеніе § 6). Послѣдовательность раціональныхъ чиселъ нижняго класса имѣетъ предѣломъ разсматриваемое ирраціональное число; точно также и послѣдовательность раціональныхъ чиселъ верхняго класса имѣетъ то же ирраціональное число своимъ предѣломъ.

Если способъ измѣненія числа a_n даетъ возможность распредѣлить всѣ раціональныя числа на два класса указаннаго свойства, т.-е. производитъ сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ, то мы и утверждаемъ, что предѣлъ числа a_n существуетъ.

Теорема. Если перемѣнное число a_n, принимая рядъ значеній $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ все время возрастаетъ (или по крайней мѣрѣ не убываетъ) и все время остается меньше нѣкотораго числа M, то оно стремится къ опредѣленному предѣлу.

Доказательство. Указанный способъ измѣненія перемѣннаго числа a_n распредѣляетъ всѣ раціональныя числа на два класса: раціональное число r отнесемъ къ первому (нижнему) классу, если перемѣнное a_n въ концѣ концовъ его превзойдетъ, напр., при $n \geq m$:

$$r < a_m$$

Очевидно, такія раціональныя числа существуютъ.

Къ другому (верхнему) классу отнесемъ всякое раціональное число R, если перемѣнное a_n не можетъ его превзойти, иначе—если для всякаго нумера n $a_n \leq R$. Къ этому классу принадлежитъ, напр., всякое раціональное число, большее числа M, ограничивающаго данную послѣдовательность сверху. Всякое раціональное число r, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, меньше всякаго раціональнаго числа R другого класса: $r < R$. Всякое раціональное число относится или къ тому или къ другому классу. Разность $R - r$ можетъ быть сдѣлана поэтому сколь угодно малой. Такимъ образомъ въ области раціональныхъ чиселъ установлено сѣченіе, опредѣляющее ирраціональное или раціональное число A Это постоянное и будетъ предѣломъ a_n, ибо $|r - A|$ —величина безконечно малая,

а съ увеличеніемъ n a_n можетъ превзойти r и стало быть $a_n - A$ также величина безконечно малая, что и требовалось доказать.

При убываніи перемѣннаго a_n, если всегда $a_n > M$, также существуетъ предѣлъ, другими словами - убывающая или лучше - никогда не возрастающая послѣдовательность, ограниченная снизу, имѣетъ предѣлъ.

Слѣдствіе. Если изъ двухъ перемѣнныхъ чиселъ a_n и b_m первое возрастаетъ, а второе убываетъ, кромѣ того, при всякихъ значеніяхъ указателей n и m, первое a_n всегда меньше второго b_m и разность ихъ $| b_n - a_n |$ безконечно мала, то оба числа стремятся къ одному опредѣленному предѣлу.

Значенія перваго перемѣннаго: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ возрастаютъ и всегда меньше любого значенія второго перемѣннаго, напр b_1, слѣдовательно, стремятся къ опредѣленному предѣлу A. Но

$$b_n - a_n = b_n - A + A - a_n$$

$$| b_n - A | = | (b_n - a_n) - (A - a_n) | \leq | b_n - a_n | + | a_n - A | .$$

По условію $b_n - a_n$ и $a_n - A$ безконечно малы; полагая абсолютную величину каждаго изъ нихъ меньшей $\frac{\varepsilon}{2}$, гдѣ ε сколь угодно малое положительное число, получимъ

$$| b_n - A | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{т.-е.} \quad | b_n - A | < \varepsilon \quad .$$

Слѣдовательно,

$$lim\ b_n = A = lim\ a_n.$$

Примѣръ 2. Пусть i_n —площадь правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ, а I_n—площадь правильнаго n-угольника, описаннаго около того же круга. При всякомъ числѣ сторонъ того и другого многоугольника имѣетъ мѣсто неравенство

$$i_n < I_n .$$

Кромѣ того, при увеличеніи числа сторонъ площадь вписаннаго многоугольника увеличивается, а площадь описаннаго уменьшается, а разность $I_n - i_n$, какъ доказывается въ элементарной геометріи, можетъ быть сдѣлана менѣе любой заданной напередъ величины. Слѣдовательно,

$$lim\ i_n = lim\ I_n.$$

Этотъ общій предѣлъ и будетъ площадью круга.

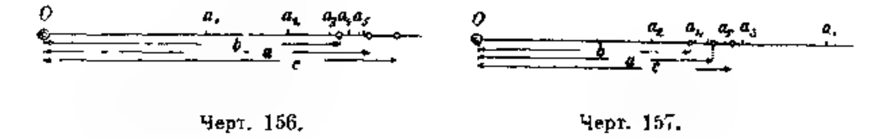
Необходимый и достаточный признакъ существованія предѣла. Пусть перемѣнное a_n, принимая рядъ значеній $a_1, a_2, a_3, \ldots$, стремится къ опредѣленному предѣлу:

$$\lim a_n = a.$$

Возьмемъ два какихъ нибудь числа b и c, изъ которыхъ одно меньше, а другое больше a:

$$b < a < c.$$

Какъ бы числа b и c ни были близки къ a, а стало быть и между собою, между ними заключено безчисленное множество значеній пе-



Черт. 156. Черт. 157.

ремѣннаго a_n; всѣ значенія этого перемѣннаго, начиная съ нѣкотораго нумера, напр. m, заключены между этими границами b и c (черт. 156 и 157):

$$b < a_{m+i} < c \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Въ этомъ и заключается сущность понятія о предѣлѣ. Разность двухъ значеній перемѣннаго, если указатели ихъ больше m,

$$a_{m+i} - a_{m+j}$$

по абсолютной величинѣ меньше $c - b = \varepsilon$, но b и c произвольно выбренныя числа, между которыми заключено a, слѣдовательно, $a_{m+i} \quad a_{m+j} < \varepsilon$, гдѣ ε любое, сколь угодно малое, положительное число. Отсюда вытекаетъ необходимый признакъ существованія предѣла перемѣннаго a_n: если послѣдовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ имѣетъ предѣлъ, то для любого положительнаго (сколь угодно малаго) числа ε можно подобрать настолько большой нумеръ m значенія перемѣннаго, что дальнѣйшія его значенія отличаются отъ a_m меньше, чѣмъ на ε:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{при} \qquad n > m.$$

Но этотъ же признакъ является и достаточнымъ для существованія предѣла послѣдовательности чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Въ самомъ дѣлѣ, пусть для любого положительнаго числа ε можно

подобрать такой указатель m, что будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqq m,$$

гдѣ n перемѣнный указатель.

Если вмѣсто числа ε возьмемъ другое число ε_1, то и указатель m, вообще говоря, будетъ иной. Такимъ образомъ согласно условію должны имѣть мѣсто безграничное число неравенствъ, подобныхъ предыдущему:

$$\begin{aligned} |a_n - a_{m_0}| &< \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad n \geq m_0, \\ |a_n - a_{m_1}| &< \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad n \geqq m_1, \\ |a_n - a_{m_2}| &< \varepsilon_2 \quad \text{при} \quad n \geqq m_2, \\ &\dots\dots\dots \\ |a_n - a_{m_i}| &< \varepsilon_i \quad \text{при} \quad n \geqq m_i, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1}$$

Здѣсь n перемѣнный указатель, удовлетворяющій въ каждомъ неравенствѣ своему условію, а указатели $m_0, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ постоянныя, соотвѣтственно подобранныя числа.

Исходя изъ этихъ неравенствъ, можно образовать безчисленное множество интерваловъ (b_0c_0), (b_1c_1), $(b_2c_2), \dots\dots$, $(b_ic_i), \dots\dots$, изъ которыхъ каждый слѣдующій лежитъ внутри предыдущаго, и концы которыхъ служатъ границами измѣненія перемѣннаго числа a_n при возрастаніи указателя n, начиная послѣдовательно съ m_0, m_1, $m_2, \dots\dots, m_i, \dots$

Дѣйствительно, пусть числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots$ образуютъ убывающую послѣдовательность, имѣющую предѣломъ нуль; для этого можно положить, напр.,

$$\varepsilon_0 = \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2^3}, \dots, \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^i}, \dots$$

При такомъ условіи соотвѣтствующіе указатели $m_0, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ образуютъ неубывающую послѣдовательность:

$$m_0 \leqq m_1 \leqq m_2 \leqq m_3 \leqq \dots \leqq m_i \leqq \dots$$

При $n \geqq m_0$ по условію должно имѣть мѣсто неравенство:

$$|a_n - a_{m_0}| < \varepsilon_0$$

Поэтому a_n не можетъ быть меньше $a_{m_0} - \varepsilon_0$ и не можетъ быть больше $a_{m_0} + \varepsilon_0$:

$$a_{m_0} - \varepsilon_0 < a_n < a_{m_0} + \varepsilon_0 \quad (\text{при } n \geqq m_0).$$

Эти числа и примемъ за границы перваго интервала $(b_0 c_0)$:

$$a_{m_0} - \varepsilon_0 = b_0, \quad a_{m_0} + \varepsilon_0 = c_0,$$

и

$$b_0 < a_n < c_0 \quad \text{при } n \geqq m_0.$$

Такъ какъ $m_1 > m_0$, то и

$$b_0 < a_{m_1} < c_0 .$$

При $n \geqq m_1$ по условію должно имѣть мѣсто неравенство:

$$| a_n - a_{m_1} | < \varepsilon_1 .$$

Поэтому a_n при $n \geqq m_1$ не можетъ быть меньше $a_{m_1} - \varepsilon_1$ и не можетъ быть больше $a_{m_1} + \varepsilon_1$:

$$a_{m_1} - \varepsilon_1 < a_n < a_{m_1} + \varepsilon_1 \quad (\text{при } n \geqq m_1).$$

Интервалъ между этими границами, равный $2\varepsilon_1$, меньше интервала $c_0 - b_0 = 2\varepsilon_0$ и середина его a_{m_1} лежитъ между b_0 и c_0; поэтому онъ или весь уменьшается внутри перваго интервала $(b_0 c_0)$—и въ такомъ случаѣ мы примемъ его за второй интервалъ $(b_1 c_1)$—или только часть его находится внѣ перваго интервала. Но ни одно значеніе a_n при $n \geqq m_1$, не можетъ находиться внѣ интервала $(b_0 c_0)$, ибо, если указатель n больше или равенъ m_1, то онъ больше и m_0. Поэтому эту внѣшнюю часть интервала $(a_{m_1} - \varepsilon_1, \ a_{m_1} + \varepsilon_1)$, если она существуетъ, можно отбросить и оставшуюся часть принять за второй интервалъ $(b_1 c_1)$. Итакъ и границы второго интервала b_1 и c_1 опредѣлены:

$$b_1 < a_n < c_1 \quad \text{при } n \geqq m_1,$$

при чемъ

$$b_0 \leqq b_1 \quad \text{и} \quad c_0 \geqq c_1 .$$

Такимъ же способомъ, исходя изъ остальныхъ неравенствъ (1), можно образовать третій, четвертый и т. д. интервалы $(b_2 c_2)$, $(b_3 c_3), \ldots, (b_i c_i), \ldots$, изъ которыхъ каждый умѣщается внутри

предыдущаго:

$$b_0 < a_n < c_0 \quad \text{при } n > m_0,$$
$$b_1 < a_n < c_1 \quad \text{„} \; n \geqq m_1,$$
$$b_2 < a_n < c_2 \quad \text{„} \; n \geqq m_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$
$$b_i < a_n < c_i \quad \text{„} \; n \geqq m_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$

Какъ вытекаетъ изъ самаго способа образованія этихъ интерваловъ, числа $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots$ образуютъ постоянно возрастающую или по крайней мѣрѣ никогда не убывающую послѣдовательность, а числа $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots$ никогда не возрастающую.

Разность между соотвѣтственными числами этихъ послѣдовательностей стремится къ нулю, ибо

$$c_i - b_i \leqq 2\varepsilon_i,$$

а ε_i по условію стремится къ нулю.

Поэтому согласно слѣдствію предыдущей теоремы обѣ послѣдовательности стремятся къ одному и тому же предѣлу:

$$\lim b_i = \lim c_i = A.$$

Но a_n при возрастаніи указателя постоянно заключено между соотвѣтственными членами послѣдовательностей b_i и c_i:

$$b_i < a_n < c_i \quad \text{при } n \geqq m_i.$$

Слѣдовательно, и это перемѣнное число стремится къ тому же предѣлу, ибо если

$$|b_i - A| < \varepsilon,$$

гдѣ ε любое сколь угодно малое число, то и подавно

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{т.-е.} \quad \lim a_n = A,$$

что и требовалось доказать.

Если перемѣнное число a_n все время, или по крайней мѣрѣ начиная съ нѣкотораго своего нумера, меньше соотвѣтствующаго по нумеру другого перемѣннаго числа b_n, т.-е.

$$a_n < b_n,$$

то предѣлъ перваго **не** можетъ быть больше предѣла другого, а, слѣдовательно, будетъ **или** меньше, **или** ревенъ ему.

$$\lim a_n < \lim b_n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, **около** $\lim a_n$ группируется безчисленное множество значеній a_n, а около $\lim b_n$ безчисленное множество значеній b_n; если $\lim a_n$ не равенъ $\lim b_n$, то около каждаго изъ этихъ предѣловъ можно отграничить такіе интервалы, что **всякое** число одного изъ нихъ не принадлежитъ другому; выражаясь геометрически — интервалы лежатъ внѣ одинъ другого; слѣдовательно, если бы $\lim a_n$ былъ больше $\lim b_n$, то при достаточно большомъ нумерѣ и при всѣхъ послѣдующихъ значеніяхъ этого нумера число a_n было бы больше числа b_n, что противорѣчитъ условію, и потому, если $a_n < b_n$, то

$$\lim a_n \leqq \lim b_n.$$

Точно также изъ неравенства $a_n > b_n$ слѣдуетъ неравенство или равенство

$$\lim a_n \geqq \lim b_n.$$

Примѣры перемѣнныхъ чиселъ, принимающихъ безграничный рядъ значеній и не имѣющихъ предѣла. Не всякое перемѣнное число, принимающее безграничный рядъ значеній, стремится обязательно къ предѣлу. Такъ, если

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2},$$

то при нечетныхъ значеніяхъ n это число a_n ревно 0, а при четныхъ 1-цѣ; такимъ образомъ a_n принимаетъ рядъ значеній: 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... и эти значенія не стремятся къ какому-либо предѣлу: перемѣнное число $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ не имѣетъ предѣла. Точно также, если $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$, то рядъ значеній этого числа будетъ слѣдующій:

$$\frac{1}{1}-1,\quad \frac{1}{2}+1,\quad \frac{1}{3}-1,\quad \frac{1}{4}+1,\quad \frac{1}{5}-1,\quad \frac{1}{6}+1,\ldots,$$

или

$$0,\quad \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\quad \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\quad \frac{7}{6},\ -\frac{6}{7},\ldots..$$

и не стремится къ какому-либо предѣлу, хотя значенія съ нечетнымъ указателемъ a_{2n-1} стремятся къ предѣлу, равному -1, а съ четнымъ a_{2n} къ предѣлу $+1$:

$$a_{2n-1} = 0, \; -\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{7}, \ldots; \quad \lim a_{2n-1} = -1.$$

$$a_{2n} = \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{7}{6}, \ldots; \quad \lim a_{2n} = +1.$$

§ 3. **Предложенія о предѣлахъ суммы, произведенія и частнаго.** Задачу отысканія предѣловъ сложныхъ выраженій стараются прежде всего свести къ отысканію предѣловъ перемѣнныхъ величинъ, составляющихъ изслѣдуемое выраженіе. Основаніемъ для такого сведенія служатъ слѣдующія предложенія, въ которыхъ предѣлы составляющихъ перемѣнныхъ величинъ и составного выраженія предполагается существующими.

Теорема 1. Предѣлъ суммы нѣсколькихъ перемѣнныхъ равенъ суммѣ предѣловъ этихъ перемѣнныхъ:

$$\lim (a_n + b_n + c_n) = \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n.$$

Доказательство. Пусть a, b, c — предѣлы перемѣнныхъ a_n, b_n, c_n:

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b, \quad \lim c_n = c.$$

Требуется доказать, что разность

$$(a_n + b_n + c_n) - (a + b + c)$$

величина безконечно малая, т.-е. можетъ быть сдѣлана по абсолютной величинѣ меньше сколько угодно малаго положительнаго числа ε. Такъ какъ

$$(a_n + b_n + c_n) - (a + b + c) = (a_n - a) + (b_n - b) + (c_n - c),$$

то

$$|(a_n + b_n + c_n) - (a + b + c)| = |(a_n - a) + (b_n - b) + (c_n - c)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| + |c_n - c|.$$

Но разности $a_n - a$, $b_n - b$, $c_n - c$ по условію величины безконечно малыя; слѣдовательно, число n можно сдѣлать настолько большимъ, чтобы

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Въ такомъ случаѣ

$$|a_n - a| + |b_n - b| + |c_n - c| < \varepsilon;$$

тѣмъ болѣе

$$|(a_n + b_n + c_n) - (a + b + c)| < \varepsilon,$$

т.-е.

$$\lim (a_n + b_n + c_n) = (a + b + c),$$

или

$$\lim (a_n + b_n + c_n) = \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n.$$

Теорема 2. Предѣлъ произведенія перемѣнныхъ величинъ равенъ произведенію ихъ предѣловъ:

$$\lim (a_n \,.\, b_n) = \lim a_n \,.\, \lim b_n.$$

Доказательство. Пусть a и b предѣлы перемѣнныхъ a_n и b_n:

$$\lim a_n = a\,, \qquad \lim b_n = b\,.$$

Теорема утверждаетъ, что ab есть предѣлъ $a_n b_n$, т.-е. что разность $(a_n b_n - ab)$ величина безконечно малая.

Дѣйствительно,

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = b_n (a_n - a) + a (b_n - b),$$

откуда

$$|a_n b_n - ab| = |b_n (a_n - a) + a (b_n - b)| < |b_n (a_n - a)| + |a (b_n - b)|$$

Такъ какъ значенія b_n группируются около своего предѣла b, то можно взять такое положительное число c, большее b, которое будетъ превосходить при достаточно высокихъ значеніяхъ указателя абсолютную величину b_n, т.-е. $c > b_n$ и потому

$$|a_n b_n - ab| < c\,|a_n - a| + |a (b_n - b)|\,.$$

По условію разности $(a_n - a)$ и $(b_n - b)$ величины безконечно малыя, множители a и c постоянныя и потому n можно сдѣлать на столько большимъ, чтобы

$$c\,|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |a (b_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

гдѣ ε любое данное напередъ положительное число. Слѣдовательно,

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon$$

и потому

$$\lim (a_n b_n) = a\,b = \lim a_n \, \lim b_n.$$

Слѣдствіе 1.

$$\lim (a \,.\, b \,.\, c \ldots g) = \lim a \,.\, \lim b \,.\, \lim c \ldots \lim g$$

Слѣдствіе 2. Предѣлъ степени перемѣнной равенъ степени предѣла:

$$\lim a_n^k = (\lim a_n)^k .$$

Теорема 3. Если предѣлъ перемѣннаго a_n не равенъ нулю, то предѣлъ обратнаго числа $\frac{1}{a_n}$ равенъ обратной величинѣ предѣла:

$$\lim a_n \quad a \neq 0, \quad \lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a_n} \cdot$$

Доказательство. Докажемъ, что разность обратныхъ величинъ перемѣннаго и предѣла можетъ быть сдѣлана меньше любого положительнаго числа ε. Дѣйствительно,

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{a_n - a \,|}{| a_n \cdot a |} \cdot$$

Пусть нѣкоторое положительное число b меньше абсолютной величины a:

$$b < | a$$

Такъ какъ a_n стремится къ a, какъ къ своему предѣлу, то, начиная съ нѣкотораго своего нумера n, оно постоянно будетъ больше b. Слѣдовательно, для такихъ значеній указателя n будемъ имѣть

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{| a_n \quad a |}{| a_n \cdot a |} < \frac{| a_n \quad a |}{b^2} \cdot$$

Разность $a_n - a \,|$ безконечно малая величина. Полагая $| a_n - a |$ меньше положительнаго числа $b^2 . \varepsilon$, гдѣ ε сколь угодно малое положительное число, получимъ

$$\left| \frac{1}{a_n} \quad \frac{1}{a} \right| < \frac{| a_n - a |}{b^2} < \frac{b^2 \varepsilon}{b^2}, \quad \text{т.-е.} \quad \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon.$$

Слѣдствіе. Предѣлъ частнаго двухъ перемѣнныхъ величинъ, если предѣлъ знаменателя не равенъ нулю, равенъ частному предѣловъ этихъ перемѣнныхъ:

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim b_n}{\lim a_n}, \quad \text{если} \quad \lim a_n \neq 0.$$

Ибо

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} \cdot b_n,$$

а потому

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \left(\frac{1}{a_n} \cdot b_n\right) = \lim \frac{1}{a_n} \lim b_n = \frac{1}{\lim a_n} \cdot \lim b_n = \frac{\lim b_n}{\lim a_n}.$$

§ 4. **Примѣры нахожденія предѣловъ.** 1. Опредѣлить, къ чему стремится $a_n = \frac{3n^3 + n}{n^3 - 1}$ при n стремящемся къ безконечности.

Предварительнымъ преобразованіемъ даннаго выраженія можно привести его къ новому виду, къ которому примѣнимы основныя теоремы о предѣлахъ.

Раздѣлимъ для этого числителя и знаменателя a_n на n^3:

$$a_n = \frac{3n^3 + n}{n^3 - 1} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}}.$$

Слѣдовательно,

$$\lim a_n = \frac{\lim\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}.$$

Такъ какъ $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{n^3}$ при n стремящемся къ безконечности величины безконечно малыя, то

$$\lim\left(3 + \frac{1}{n^2}\right) = 3, \quad \lim\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 1.$$

Поэтому

$$\lim a_n = 3.$$

Вопросъ. Почему нельзя примѣнить теоремъ о предѣлахъ непосредственно къ данному выраженію для a_n?

2. Къ чему стремится дробь $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при α стремящемся къ нулю?

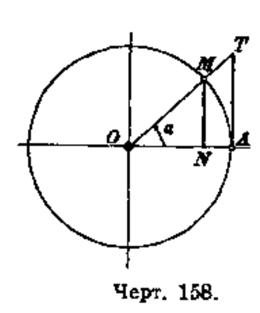
Числитель и знаменатель стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ, но оба къ нулю. Поэтому примѣнить для отысканія предѣла теоремы о предѣлѣ дроби нельзя. Нужно изыскать какой-либо иной способъ, который могъ бы привести къ рѣшенію поставленной задачи.

Разсмотримъ въ кругѣ, радіусъ котораго принятъ за единицу,

въ какомъ соотношеніи находятся нѣкоторая дуга α (или центральный уголъ въ дуговой мѣрѣ), ея синусъ и тангенсъ (черт. 158). Площадь сектора OAM очевидно больше площади треугольника ONM и меньше площади треугольника OAT:

$$\text{пл.}\ \triangle\ ONM < \text{пл.}\ O\breve{AM} < \text{пл.}\ \triangle\ OAT. \tag{3}$$

Опредѣляемъ эти площади, принимая во вниманіе, что радіусъ круга принятъ за единицу:



Черт. 158.

$$\text{пл}\ \triangle\ ONM = \frac{1}{2}\cdot \overline{ON}\,.\,NM = \frac{1}{2}\cdot \cos\alpha\,.\,\sin\alpha;$$

$$\text{пл.}\ O\breve{AM} = \frac{1}{2}\cdot AM\,.\,\overline{OA} = \frac{1}{2}\,.\,\alpha\,.\,1 = \frac{1}{2}\ \alpha;$$

$$\text{пл.}\ \triangle\ OAT = \frac{1}{2}\cdot \overline{OA}\,.\,AT = \frac{1}{2}\ 1\,.\,tg\,\alpha\ \ \frac{1}{2}tg\,\alpha$$

Подставляя полученныя выраженія въ неравенства (3), будемъ имѣть

$$\frac{1}{2}\cdot \cos\alpha\,.\,\sin\alpha < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\ tg\,\alpha,$$

или, по сокращеніи на $\frac{1}{2}$ и дѣленіи всѣхъ членовъ неравенствъ на $sin\alpha$,

$$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

Для обратныхъ величинъ смыслъ неравенствъ будетъ обратный.

$$\frac{1}{\cos\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

Переходя къ предѣлу, предполагая, что α стремится къ нулю, получимъ

$$1\ \geqq\ \lim_{\alpha=0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ \geqq\ 1.$$

Слѣдовательно,

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

§ 5. **Безконечно малыя и безконечно большія величины различныхъ порядковъ.** Кромѣ основныхъ дѣйствій ариѳметики высшая математика располагаетъ при изслѣдованіи своихъ задачъ новой операціей— переходомъ къ предѣлу, операціей, состоящей въ замѣнѣ перемѣнныхъ величинъ ихъ предѣлами. Съ этой операціей, какъ мы видѣли, тѣсно связано понятіе безконечно малыхъ величинъ, и сама операція перехода къ предѣлу можетъ быть сведена къ операціямъ надъ безконечно малыми. Поэтому высшая математика и называется, когда обращается вниманіе на эту характерную ея сторону, исчисленіемъ безконечно малыхъ (calcul infinitésimal).

При этомъ исчисленіи необходимо резличать порядокъ безконечно малыхъ. Если приходится разсматривать одновременно нѣсколько безконечно малыхъ величинъ, стремящихся къ нулю въ зависимости одна отъ другой, то естественно возникаетъ вопросъ о сравненіи ихъ между собою. Каждая изъ безконечно малыхъ стремится къ нулю, но одна можетъ стремиться быстрѣе, чѣмъ другая Безконечно малыя величины, стремящіяся къ нулю не одинаково быстро, будутъ величинами различнаго порядка Такъ изъ трехъ величинъ $\alpha_n = \frac{1}{10^n}$, $\beta_n = \alpha_n^2$, $\gamma_n = \alpha_n^3$ первая α_n стремится къ нулю въ убывающей геометрической прогрессіи со знаменателемъ, равнымъ $\frac{1}{10}$.

$$\alpha_1 = \frac{1}{10}, \ \alpha_2 = \frac{1}{100}, \ \alpha_3 = \frac{1}{1000}, \ \ldots \ \alpha_n = \frac{1}{10^n}, \ \ldots$$

между тѣмъ какъ вторая стремится къ нулю быстрѣе — именно въ геометрической прогрессіи со знаменателемъ, равнымъ $\frac{1}{100}$:

$$\beta_1 = \frac{1}{100}, \ \beta_2 = \frac{1}{10\,000}, \ \beta_3 = \frac{1}{1\,000\,000}, \ \ldots \ \beta_n = \frac{1}{100^n}, \ \ldots,$$

а третья еще быстрѣе—въ геометрической прогрессіи со знаменателемъ, ревнымъ $\frac{1}{1000}$:

$$\gamma_1 = \frac{1}{1000}, \ \gamma_2 = \frac{1}{1\,000\,000}, \ \ldots \ \gamma_n = \frac{1}{1000^n}, \ \ldots$$

Отношенія второй и третьей величины къ первой будутъ величи-

нами также безконечно малыми:

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{1}{100^n} : \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^n} \quad \text{и} \quad lim\,\frac{\beta_n}{\alpha^n} = 0,$$

$$\frac{\gamma_n}{\alpha_n} = \frac{1}{1000^n} : \frac{1}{10^n} = \frac{1}{100^n} \quad \text{и} \quad lim\,\frac{\gamma_n}{\alpha_n} = 0.$$

Поэтому величины β_n и γ_n будутъ безконечно малыми высшаго порядка.

Пусть α_n, $\alpha'_n, \beta_n \ldots, \gamma_n, \ldots, \delta_n, \ldots$ при безгранично увеличивающемся указателѣ n безконечно малыя величины, подлежащія сравненію между собой. Одну изъ нихъ α_n примемъ за главную или величину перваго порядка. Если отношеніе $\frac{\alpha'_n}{\alpha_n}$ стремится, какъ къ своему предѣлу, къ конечному числу, не равному нулю, то безконечно малая величина α'_n будетъ того же порядка, т.-е. перваго по отношенію къ главной α_n:

$$lim\,\frac{\alpha'_n}{\alpha_n} = A \begin{cases} \neq \pm\infty, \\ \neq 0. \end{cases}$$

Величина β_n будетъ безконечно малой второго порядка, если отношеніе $\frac{\beta_n}{\alpha_n^2}$ стремится къ конечному, не равному нулю, предѣлу:

$$lim\,\frac{\beta_n}{\alpha_n^2} = B \begin{cases} \neq \pm\infty, \\ \neq 0. \end{cases}$$

Вообще величина δ_n будетъ безконечно малой порядка p, если отношеніе $\frac{\delta_n}{\alpha_n^p}$ въ предѣлѣ равно конечному, не равному нулю, числу:

$$lim\,\frac{\delta_n}{\alpha_n^p} = D \begin{cases} \neq \pm\infty, \\ \neq 0. \end{cases}$$

Примѣръ. Сравнить безконечно малыя

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \quad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}.$$

принявъ первую изъ нихъ за главную.

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n^p} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{n^p} = \frac{n^p}{\sqrt{n+1}} = \frac{n^{p-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},$$

$$\lim \frac{\beta_n}{\alpha_n^p} = \frac{\lim n^{p-\frac{1}{2}}}{\lim \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim n^{p-\frac{1}{2}}.$$

Если $p \neq \frac{1}{2}$, то $n^{p-\frac{1}{2}}$ стремится или къ нулю (при $p < \frac{1}{2}$) или къ ∞ (при $p > \frac{1}{2}$). Если $p = \frac{1}{2}$, то $n^0 = 1$ и $\lim n^{p-\frac{1}{2}} = 1$. Поэтому величина $\beta = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ будетъ безконечно малой порядка $\frac{1}{2}$ сравнительно съ безконечно малой $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Точно также найдемъ, что величина γ_n будетъ безконечно малой перваго порядка:

$$\frac{\gamma_n}{\alpha_n^p} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} : \frac{1}{n^p} = \frac{2n^p}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{2n^{p-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}};$$

$$\text{при} \quad p = 1 \quad \lim \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = 2.$$

Пусть β_n — безконечно малая величина порядка p относительно безконечно малой α_n, т.-е.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n^p} = B,$$

гдѣ B конечная постоянная величина, не равная нулю. Изъ этого равенства слѣдуетъ

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n^p} = B + h,$$

гдѣ h тоже безконечно малая какого-нибудь порядка. Слѣдовательно,

$$\beta_n = B\alpha_n^p + h\,\alpha_n^p.$$

Такимъ образомъ безконечно малая β_n представлена нами въ видѣ суммы двухъ безконечно малыхъ. Изъ нихъ первая порядка p, а вторая, какъ произведеніе двухъ безконечно малыхъ, изъ которыхъ одна порядка p, представляетъ безконечно малую порядка высшаго чѣмъ p. Первое слагаемое $B\alpha_n^p$ называется главной частью без-

конечно малой β_n и представляетъ эту послѣднюю не только съ безконечно малой абсолютной погрѣшностью, но и съ безконечно малой относительной, т.-е. не только остатокъ $h\alpha^p_n$ безконечно малая величина, но и отношеніе этого безконечно малаго остатка къ самой безконечно малой β_n будетъ безконечно малымъ:

$$\lim_{n\,\infty} \frac{h\alpha_n^p}{\beta_n} = 0 .$$

Предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ β_n и γ_n одинаковаго порядка, напр. p, равенъ отношенію ихъ главныхъ частей. Дѣйствительно, если

$$\beta_n = B\alpha_n^p + h\alpha_n^p \quad \text{и} \quad \gamma_n = C\alpha_n^p + k\alpha_n^p ,$$

гдѣ h и k безконечно малыя величины, то

$$\lim \frac{\beta_n}{\gamma_n} = \lim \frac{B\alpha_n^p + h\alpha_n^p}{C\alpha_n^p + k\alpha_n^p} = \lim \frac{B+h}{C+k} = \frac{B}{C} .$$

Но точно также

$$\frac{B\alpha_n^p}{C\alpha_n^p} = \frac{B}{C} .$$

Слѣдовательно,

$$\lim \frac{\beta_n}{\gamma_n} = \frac{B\alpha_n^p}{C\alpha_n^p} .$$

Если предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ равенъ единицѣ, то главныя ихъ части одинаковы.

Безконечно большія величины такъ же, какъ и безконечно малыя, различаются по порядкамъ относительно одной изъ нихъ принятой за главную. Такимъ образомъ, если M и N безконечно большія величины, изъ которыхъ N главная, и

$$\lim \frac{M}{N^p} = A ,$$

гдѣ A конечная отличная отъ нуля величина, то N называется безконечно большой порядка p.

Пусть, напр., n безгранично увеличивающееся число, а $M = \sqrt{2n^3 - 1}$. M будетъ безконечно большой величиной при безграничномъ уве-

личеніи n порядка $^3/_2$, ибо

$$\lim \frac{M}{n^{3/2}} = \lim \frac{\sqrt{2n^3-1}}{n^{3/2}} = \lim \sqrt{\frac{2n^3-1}{n^3}} = \lim \sqrt{2-\frac{2}{n^3}} = \sqrt{2}\ .$$

По существу дѣла порядокъ безконечно малой или безконечно большой величины число положительное. Но если при изслѣдованіи какой-либо перемѣнной величины, мы находимъ порядокъ ея равнымъ нулю или отрицательному числу, то такой результатъ надо понимать слѣдующимъ образомъ: безконечно малая величина нулевого порядка есть конечная величина; безконечно малая порядка $-p$ то же самое, что и безконечно большая порядка p и обратно.

Если α безконечно малая величина перваго порядка и M безконечно большая, удовлетворяющая условію

$$\lim M\alpha^p \quad A,$$

гдѣ A постоянная конечная величина, отличная отъ нуля, то порядокъ безконечно большой M равенъ p.

§ 6. **Непрерывность и прерывность функціи.** Примѣнимъ теорію предѣловъ прежде всего къ установленію понятія непрерывности функціи. Опираясь на геометрическія представленія, можно было бы сказать такъ: функція $y = f(x)$ будетъ непрерывной, если графически она представляется непрерывной линіей. Но функція можетъ быть дана и не графически, т.-е. линіей напередъ вычерченной, а тѣмъ или инымъ аналитическимъ выраженіемъ, или какими-либо опредѣляющими ее условіями. Будетъ ли графика такой функціи, т.-е. совокупность всѣхъ точекъ, ординаты которыхъ представляютъ всевозможныя значенія функціи, а абсциссы соотвѣтствующія значенія аргумента, непрерывной линіей или нѣтъ, рѣшить это можно лишь зная, что изслѣдуемая функція непрерывна или прерывна. Такимъ образомъ необходимо установить критерій непрерывности функціи.

Мы будемъ разсматривать непрерывное измѣненіе аргумента x, т.-е. будемъ предполагать, что аргументъ x принимаетъ послѣдовательно всѣ возможныя значенія въ разсматриваемомъ интервалѣ, напр., отъ l до m, хотя бы разсматриваемая функція $f(x)$ и не для всякаго изъ значеній аргумента была опредѣлена. Вопросъ теперь и заключается въ томъ, какъ располага-

ются соотвѣтственныя значенія функціи. Подъ символомъ $f(a)$ разумѣется значеніе функціи $f(x)$, соотвѣтствующее значенію аргумента $x=a$, если только для этого значенія аргумента функція опредѣлена, иначе—результатъ подстановки въ выраженіе $f(x)$ вмѣсто x числа a, если только такая подстановка имѣетъ согласно опредѣленію смыслъ. Пусть, напр., $f(x)\equiv x^3-2x+2$ *); въ такомъ случаѣ $f(3)$ означаетъ $3^3-2.3+2$:

$$f(3)=3^3-2.3+2=5.$$

Если $f(x)\equiv 1.2.3\ldots x$, то

$$f(3)=1.2.3=6, \quad f(5)=1.2.3.4.5=120,$$

но $f\left(\frac{2}{3}\right)$ не имѣетъ смысла, ибо разсматриваемая функція опредѣлена лишь для цѣлыхъ значеній аргумента. Функція $f(x)=sin\left(\frac{1}{x}\right)$ опредѣлена для всякаго значенія аргумента за исключеніемъ $x=0$, ибо дѣленіе на нуль $\left(\frac{1}{0}\right)$ не имѣетъ ариѳметическаго смысла; если даже условиться считать $\frac{1}{0}$ какъ предѣльное значеніе дроби $\frac{1}{x}$, когда x безгранично уменьшается до нуля, то и тогда функція $sin\frac{1}{x}$ для $x=0$ была бы не опредѣлена, ибо тригонометрическія функціи для безконечно большого значенія аргумента не опредѣлены (стр. 16, 235).

Для непрерывности функціи въ разсматриваемомъ интервалѣ прежде всего необходимо, чтобы она была **опредѣлена** для **каждаго** значенія аргумента въ этомъ интервалѣ, т.-е. чтобы каждому значенію аргумента соотвѣтствовало опредѣленное значеніе функціи. Но одного этого условія недостаточно Въ самомъ дѣлѣ, функція можетъ быть опредѣлена, напр., не однообразно для раціональныхъ значеній аргумента $\left(x=\frac{m}{n}\right.$, гдѣ m и n цѣлыя числа$\left.\right)$ и для ирраціональныхъ; пусть для раціональныхъ значеній аргумента $f(x)=x^2$, для ирраціональныхъ $f(x)=-x^2$, а для $x=0$ $f(0)=0$. Для **каждаго** значенія аргумента функція опредѣлена; а между тѣмъ при **непрерывномъ** измѣненіи аргумента, т.-е когда аргу

*) Тремя чертами ($\equiv$) часто пользуются какъ знакомъ **тождества**.

ментъ послѣдовательно принимаетъ всѣ значенія въ какомъ-либо интервалѣ, функція постоянно мѣняетъ свой знакъ, принимая то положительныя, то отрицательныя значенія, не обращаясь въ нуль, если $x \neq 0$: о непрерывности функціи, какъ мы ее представляемъ хотя бы геометрически, не можетъ быть и рѣчи.

Чтобы подойти къ тѣмъ условіямъ, которыя опредѣляютъ непрерывность функціи въ какомъ-либо интервалѣ, мы должны прежде разсмотрѣть вопросъ, что должно разумѣть подъ непрерывностью въ точкѣ, непрерывностью функціи при какомъ-либо опредѣленномъ значеніи аргумента. Функція, непрерывная въ каждой точкѣ какого-либо интервала, непрерывна и въ этомъ интервалѣ.

Непрерывность въ точкѣ. Выдѣлимъ изъ непрерывной послѣдовательности значеній аргумента рядъ значеній. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$, имѣющій предѣломъ число a, заключающееся въ указанномъ интервалѣ $(l\, m)$.

$$l < a < m, \quad \lim a_n = a,$$

и пусть для каждаго изъ этихъ значеній аргумента функція $f(x)$ опредѣлена. Соотвѣтствующій рядъ значеній функціи $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3), \ldots, f(a_n), \ldots$ составляетъ нѣкоторую послѣдовательность чиселъ, которая, какъ мы видѣли (стр. 225), можетъ имѣть предѣлъ или не имѣть его.

Пусть такой предѣлъ есть; обозначимъ его черезъ A. Если выдѣлимъ какой-либо другой рядъ значеній аргумента: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ съ тѣмъ же предѣломъ a $(\lim x_n = a)$, предполагая, конечно, что для каждаго выдѣленнаго значенія аргумента функція опредѣлена, то соотвѣтствующій рядъ значеній функціи $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ можетъ стремиться къ тому же предѣлу A, или иному, напр., B, или совсѣмъ не стремится ни къ какому предѣлу. Если такого предѣла нѣтъ или этотъ предѣлъ иной, то функція испытываетъ въ разсматриваемомъ мѣстѣ $(x = a)$ перерывъ. Но если предѣлъ тотъ же и равный *) значенію функціи $f(a)$,

$$\lim f(x_n) = \lim f(a_n) = A = \lim f(a),$$

*) Если бы A не равнялось значенію функціи $f(a)$ по прежнему опредѣленію, то мы могли бы исправить прежнее опредѣленіе и разумѣть подъ $f(a)$ именно общій предѣлъ A; функція $f(x)$ по первому опредѣленію испытывала бы въ точкѣ a перерывъ, а по исправленному была бы непрерывной.

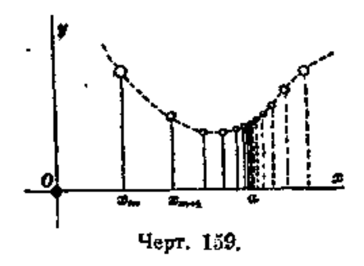
каковъ бы ни былъ выдѣленный рядъ значеній аргумента $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ съ тѣмъ же предѣломъ a ($\lim x_n = a$), то функція непрерывна при значеніи аргумента, равномъ a, или непрерывна въ точкѣ a: около значенія функціи $f(a)$ группируется безчисленное множество другихъ безконечно близкихъ значеній той же функціи. Такимъ образомъ непрерывность функціи въ точкѣ a опредѣляется равенствомъ:

$$\lim f(x_n) = f(a), \quad \text{если} \quad \lim x_n = a,$$

или

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n), \tag{1}$$

и это равенство должно имѣть мѣсто для всякаго перемѣннаго x_n, стремящагося къ числу a, какъ своему предѣлу, увеличиваясь или уменьшаясь или колеблясь около него. Знакъ предѣла lim и знакъ функціи f перемѣстимы, если функція въ разсматриваемомъ мѣстѣ непрерывна: предѣлъ функціи равенъ функціи предѣла.



Черт. 159.

Если рядъ значеній аргумента: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ приближается къ своему предѣлу, увеличиваясь по крайней мѣрѣ съ нѣкотораго своего нумера:

$$x_m < x_{m+1} < x_{m+2} < \ldots < x_n < \ldots < a,$$

и имѣетъ мѣсто равенство (1), то этимъ опредѣляется непрерывность функціи съ одной стороны—лѣвосторонняя непрерывность (соотвѣтственно геометрическому значенію аргумента какъ абсциссы; черт. 159), а если значеніе x_n стремится къ a уменьшаясь, т.-е.

$$x_m > x_{m+1} > x_{m+2} > \ldots > x_n > \ldots > a,$$

то равенствомъ (1) опредѣляется правосторонняя непрерывность. Подъ непрерывностью функціи въ точкѣ разумѣется двусторонняя непрерывность.

Можно объединить всевозможные ряды значеній аргумента:

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots x_n, \ldots \qquad \lim x_n = a, \\ x_1', & x_2', & x_3', & \ldots x_n', \ldots \qquad \lim x_n' = a, \\ x_1'', & x_2'', & x_3'', & \ldots x_n'' \ldots \qquad \lim x_n'' = a, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

стремящіеся къ одному числу a какъ своему предѣлу и разсматривать непрерывное приближеніе аргумента x къ предѣлу a:

$$\lim x = a \quad \text{или} \quad x = a + h,$$

гдѣ h—безконечно малое число, т.-е. число не равное нулю, но стремящееся къ нулю, какъ своему предѣлу. Въ такомъ случаѣ равенство (1), опредѣляющее непрерывность функціи, можно написать въ видѣ

$$\lim_{h=0} f(a+h) = f(a).$$

Символъ $\lim\limits_{h=0}$ читается такъ: предѣлъ „при h, стремящемся къ нулю".
(Для сокращеннаго обозначенія выраженія, поставленнаго въ кавычки, мы пишемъ $h=0$, хотя h лишь стремится къ нулю). Считая h положительнымъ, будемъ имѣть для лѣвосторонней непрерывности

$$\lim_{h=0} f(a-h) = f(a), \tag{2}$$

для правосторонней

$$\lim_{h=0} f(a+h) = f(a), \tag{3}$$

для непрерывности въ точкѣ a съ той и другой стороны должно имѣть мѣсто равенство:

$$\lim_{h=0} f(a+h) = \lim_{h=0} f(a-h), \tag{4}$$

или сокращенно

$$f(a+0) = f(a-0),$$

гдѣ символъ $a+0$ долженъ показывать, что аргументъ x приближается къ a уменьшаясь, а символъ $a-0$ увеличиваясь.

Условіе непрерывности функціи можно представить еще въ иномъ видѣ, примѣнивъ сюда опредѣленіе предѣла. Изъ равенства

$$\lim_{h=0} f(a+h) = f(a)$$

слѣдуетъ, что разность $f(a+h)-f(a)$ величина безконечно малая при h, безгранично уменьшающемся до нуля. Поэтому, взявъ любое положительное число ε, можно подобрать, сообразуясь съ этимъ

числомъ, достаточно малое положительное же число δ такъ, что

$$\text{при } |h| < \delta, \quad \text{будемъ имѣть} \quad |f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \qquad (5)$$

или, если обозначимъ $a + h$ черезъ x,

$$\text{при } |x - a| < \delta \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (5')$$

Эту же мысль, не обращая вниманія на порядокъ измѣненія функціи и аргумента, мы выражали раньше (стр. 36) такъ: функція непрерывна, если безконечно малому приращенію аргумента соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе и функціи.

Если функція непрерывна въ каждой точкѣ какого-либо интервала, то она непрерывна въ этомъ интервалѣ. При данномъ положительномъ числѣ ε достаточно малое число δ, удовлетворяющее условіямъ (5) или (5') для каждой точки интервала можетъ быть различно, можетъ зависѣть не только отъ ε, но и отъ x и a. Но если для всѣхъ точекъ интервала независимо отъ x или a для даннаго положительнаго числа ε можно подобрать одно и то же значеніе δ, но большее нуля, то непрерывность функціи будетъ равномѣрной. При равномѣрной непрарывности функціи въ данномъ интервалѣ, если дано положительное число ε, можно разбить интервалъ на конечное число достаточно малыхъ интерваловъ, равныхъ δ, такъ что, если взять въ какомъ либо изъ нихъ любыя два значенія независимаго перемѣннаго x' и x'', будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \text{гдѣ} \quad |x' - x''| < \delta.$$

Напр., функція $f(a) = x$ очевидно равномѣрно непрерывная въ любомъ конечномъ интервалѣ, напр. въ интервалѣ $0 < x \leq 1$: каково бы ни было данное положительное число ε, для δ нужно взять какое-нибудь число меньшее ε. Но функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не будетъ равномѣрно непрерывной въ томъ же интервалѣ $0 < x \leq 1$. Дѣйствительно, если $x' > x''$ и $\dfrac{1}{x''} - \dfrac{1}{x'} < \varepsilon$, то $x' - x''$ или δ должно быть меньше $\varepsilon \, . \, x'x''$:

$$\frac{x' - x''}{x'x''} < \varepsilon, \quad \text{откуда} \quad \delta < \varepsilon \, . \, x'x''.$$

Но x' и x'' могутъ быть взяты какъ угодно близко къ нулю и по-

тому нельзя взять δ такимъ конечнымъ числомъ, которое удовлетворяло бы предыдущему условію при **всякихъ** x' и x'', сколь угодно близкихъ къ нулю: δ зависитъ не только отъ ε, но и отъ x' и x''

§ 7. **Теоремы о предѣлѣ суммы, произведенія и частнаго въ случаѣ непрерывнаго измѣненія перемѣнныхъ.** Въ предложеніяхъ о предѣлахъ суммы, произведенія и частнаго (§ 2) мы разсматривали перемѣнныя числа a_n, $b_n, \ldots$, принимающія безчисленное множество значеній: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ За такія перемѣнныя можно принимать функціи нѣкотораго аргумента x: $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x)$, $\ldots, u_k = f_k(x)$, принимающія безчисленное множество значеній соотвѣтственно значеніямъ аргумента: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, стремящагося къ нѣкоторому предѣлу a. Аргументъ x можетъ приближаться къ своему предѣлу, измѣняясь непрерывно. Теоремы о предѣлахъ суммы, произведенія и частнаго можно выразить теперь слѣдующимъ образомъ:

$$\lim_{x=a} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)] = \lim_{x=a} f_1(x) + \lim_{x=a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x=a} f_k(x),$$

или сокращенно

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k \qquad (1)$$

$$\lim_{x=a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_k(x)] = \lim_{x=a} f_1(x) \cdot \lim_{x=a} f_2(x) \ldots \lim_{x=a} f_k(x),$$

или

$$\lim (u_1 \cdot u_2 \ldots u_k) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \ldots \lim u_k \qquad (2)$$

$$\lim_{x=a} [f(x)]^n = [\lim_{x=a} f(x)]^n, \quad \text{или} \quad \lim u^n = (\lim u)^n. \qquad (3)$$

$$\lim_{x=a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}, \quad \text{или} \quad \lim \frac{u_1}{u_2} = \frac{\lim u_1}{\lim u_2}. \qquad (4)$$

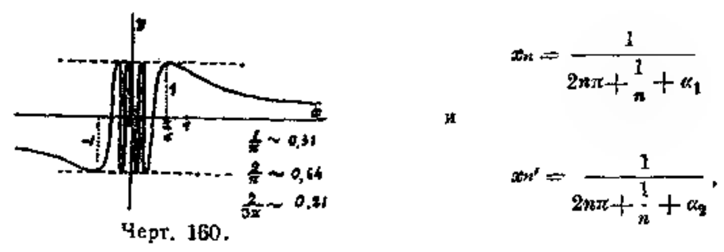
Символъ $\lim\limits_{x=a}$ означаетъ: „предѣлъ при x, стремящемся къ a"; здѣсь x не равно a, а лишь стремится къ a, какъ своему предѣлу.

Предполагается, что эти функціи при x, стремящемся къ a, имѣютъ предѣлы и, кромѣ того, въ послѣднемъ предложеніи (4) предполагается, что $\lim f_2(x) = \lim u_2 \neq 0$.

§ 8. **Примѣры прерывности функціи.** 1. Для непрерывности функціи въ точкѣ a необходимо, чтобы

$$\lim f(x_n) = f(a), \quad \text{если} \quad \lim x_n = a,$$

каковъ бы ни былъ выдѣленный рядъ значеній аргумента: x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n, \ldots$, стремящійся къ данному числу a какъ къ своему предѣлу. Но если при различныхъ рядахъ значеній аргумента $x_n, x'_n, \ldots$, имѣющихъ одинъ и тотъ же предѣлъ a ($\lim x_n = \lim x'_n = \ldots = a$), соотвѣтствующія значенія функціи $f(x_n)$, $f(x'_n), \ldots$ имѣютъ различные предѣлы или не имѣютъ предѣла, то въ этомъ мѣстѣ нарушается непрерывность функціи — функція прерывна. Такъ функція $\sin x$ при всякихъ конечныхъ значеніяхъ аргумента, какъ слѣдуетъ изъ ея геометрическаго опредѣленія, непрерывна; но функція $\sin \frac{1}{x}$ при $x = 0$ прерывна. Въ самомъ дѣлѣ, выдѣлимъ изъ непрерывной послѣдовательности значеній аргумента x значенія



Черт. 160.

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{n} + \alpha_1} \quad \text{и} \quad x_n' = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{n} + \alpha_2},$$

гдѣ n—цѣлое число, безгранично увеличивающееся, а α_1 и α_2—дуговыя мѣры данныхъ напередъ острыхъ угловъ. Эти перемѣнныя значенія аргумента стремятся къ одному и тому же предѣлу. $\lim x_n = \lim x'_n = 0$. Соотвѣтствующія значенія функціи стремятся къ различнымъ предѣламъ, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$\lim \sin \frac{1}{x_n} = \lim \sin \left(2n\pi + \frac{1}{n} + \alpha_1\right) = \lim \sin \left(\frac{1}{n} + \alpha_1\right) = \sin \alpha_1,$$

$$\lim \sin \frac{1}{x_n'} = \lim \sin \left(2n\pi + \frac{1}{n} + \alpha_2\right) = \lim \sin \left(\frac{1}{n} + \alpha_2\right) = \sin \alpha_2.$$

Такимъ образомъ функція $\sin \frac{1}{x}$ при $x = 0$ прарывна: непосредственная подстановка $x = 0$ не имѣетъ смысла, а при x, стремящемся къ нулю при различныхъ законахъ уменьшенія x, получаются различные предѣлы для $\sin \frac{1}{x}$, заключенные между -1 и $+1$ (черт. 160).

2. При односторонней непрерывности въ точкѣ a предѣлы, къ которымъ стремятся значенія функціи, для каждой стороны могутъ быть различны и такимъ образомъ при $x = a$ функція испытываетъ перерывъ, мѣняя свое значеніе скачкомъ:

$$\lim_{h=0} f(a-h) = p; \quad \lim_{h=0} f(a+h) = q; \quad p \neq q.$$

Примѣръ такого перерыва даетъ функція

$$f(x) = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x-a},$$

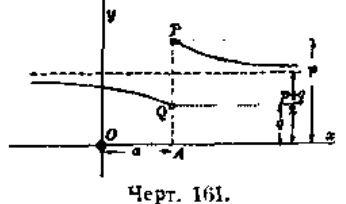
гдѣ символомъ *arc tg* мы обозначимъ дугу, мѣняющуюся отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Если x приближается къ a (будемъ считать a положительнымъ) увеличиваясь, то $x < a$, а стало быть и $\frac{a}{x-a}$ до перехода къ предѣлу все время отрицательно. Слѣдовательно, $\frac{a}{x-a}$ стремится къ $-\infty$, а $\operatorname{arctg} \frac{a}{x-a}$ къ $-\frac{\pi}{2}$ и такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\lim_{h=0} f(a-h) = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = q.$$

Подобнымъ же образомъ, если x приближается къ a уменьшаясь, находимъ

$$\lim_{x=a} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x-a} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{h=0} f(a+h) = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = p.$$



Черт. 161.

Если $p > q$, то графика этой функціи имѣетъ видъ, представленный на черт. 161. (Такъ какъ

$$\lim_{x=+\infty} \operatorname{arctg} \frac{a}{a-x} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x=+\infty} f(x) = \frac{p+q}{2},$$

то прямая, параллельная оси абсциссъ и отстоящая отъ нея на разстояніи, равномъ $\frac{p+q}{2}$, служитъ асимптотой этой кривой).

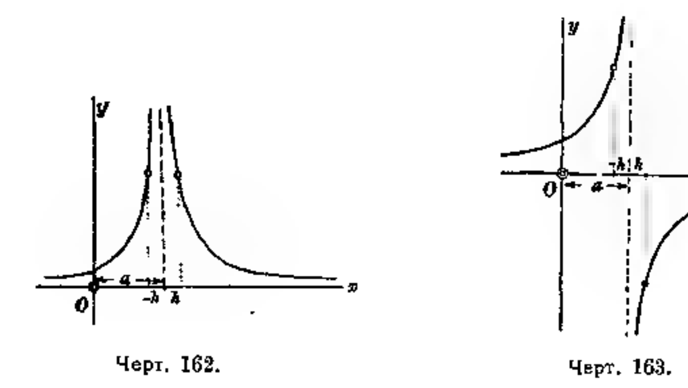
3. Когда функція при стремленіи аргумента къ какому-либо значенію увеличивается по абсолютной величинѣ безгранично и превосходитъ любое напередъ данное число, то мы должны считать функцію въ этомъ мѣстѣ прерывной. Напр., $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ при x, стремящемся къ a, безгранично увеличивается до безконечности:

$$\lim_{x=a} f(x) = \infty .$$

Значеніе функціи при $x = a$ въ этомъ случаѣ не опредѣлено, ибо дѣленіе на 0 не имѣетъ ариѳметическаго смысла, и потому условіе непрерывности

$$\lim_{h=0} f(a+h) = f(a)$$

не выполняется, ибо $f(a)$ не имѣетъ смысла. Но если подъ $f(a)$



Черт. 162. Черт. 163.

разумѣть $\lim f(a+h)$, т.-е. ∞, то нельзя подобрать такого h, чтобы имѣло мѣсто неравенство

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon ,$$

гдѣ ε — любое сколь угодно малое положительное число, ибо $f(a+h) = \frac{1}{(a+h-a)^2}$ при всякомъ маломъ h — конечная величина, а $f(a) = \infty$ (черт. 162).

4. Функція $f(x) = \frac{1}{a-x}$ при $x = a$ испытываетъ перерывъ такого типа, въ которомъ совмѣщаются свойства перерывовъ типа 2) и 3) (черт. 163).

5. Функція $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}$ при $x = 0$ испытываетъ перерывъ такого типа, въ которомъ совмѣщаются свойства перерывовъ типа 1) и 3), ибо множитель $\sin\frac{1}{x}$ колеблется между -1 и $+1$, и эти колебанія становятся чаще и чаще по мѣрѣ приближенія x къ нулю, а размахи ихъ, опредѣляемые первымъ множителемъ $\frac{1}{x}$, безгранично при этомъ увеличиваются.

§ 9. **Непрерывность элементарныхъ функцій.** Предѣлъ степени равенъ степени предѣла [(3) § 7]:

$$\lim x^n = (\lim x)^n,$$

къ какому бы предѣлу ни стремилось x, а это значитъ, что степень x^n — непрерывная функція аргумента: если $f(x) \equiv x^n$, то $\lim f(x) = \lim x^n$, а $f(\lim x^n) = (\lim x)^n$ и, слѣдовательно, условіе непрерывности выполняется:

$$\lim x^n = (\lim x)^n, \quad \text{или} \quad \lim f(x) = f(\lim x).$$

Примѣняя предложенія 1, 2, 3 (§ 7) къ цѣлой раціональной функціи

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

мы должны заключить, что эта функція непрерывна:

$$\lim (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = a_0 \lim x^n + a_1 \lim x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$= a_0 (\lim x)^n + a_1 (\lim x)^{n-1} + \ldots + a^n,$$

т.-е.

$$\lim f(x) = f(\lim x).$$

Дробная раціональная функція также непрерывна при x, стремящемся къ какому угодно постоянному числу a, только бы это число не было корнемъ знаменателя, т.-е. не обращало бы знаменателя въ нуль, ибо при этомъ условіи мы имѣемъ право при-

мѣнять предложеніе 4 (§ 7):

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m} \quad \text{и} \quad b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m\neq 0;$$

$$\lim_{x=a}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\frac{\lim(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)}{\lim(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)}=$$

$$=\frac{a_0(\lim x)^n+a_1(\lim x)^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0(\lim x)^m+b_1(\lim x)^{m-1}+\ldots+b_m},$$

т. е.

$$\lim_{x=a}f(x)=f(\lim x).$$

Такимъ образомъ, раціональная функція непрарывна въ тѣхъ интервалахъ, въ которыхъ нѣтъ ни одного корня знаменателя.

Непрерывность тригонометрическихъ функцій вытекаетъ изъ ихъ геометрическаго опрадѣленія, при чемъ для $tg\,x$ и $sec\,x$ исключаются изъ предѣловъ непрерывности значенія аргумента $\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$, гдѣ k — какое-нибудь цѣлое число, а для $cotg\,x$ и $cosec\,x$ исключаются значенія аргумента $k\pi$; при этихъ значеніяхъ аргумента отмѣченныя тригонометрическія функціи стремятся къ $\pm\infty$.

Функціи круговыя или циклометрическія, какъ обратныя тригонометрическимъ, будутъ также непрерывны въ тѣхъ интервалахъ, гдѣ онѣ опредѣлены.

Чтобы судить о непрерывности показательной функціи (a^x) и логариѳма, нужно прежде всего опредѣлить эти функціи не только для раціональныхъ значеній аргумента, но и для ирраціональныхъ, между тѣмъ показательная функція опредѣлена лишь для раціональныхъ значеній аргумента, а логариѳмъ—для тѣхъ значеній аргумента, для которыхъ онъ самъ раціоналенъ.

§ 10. **Дополнительное опредѣленіе показательной функціи и логариѳма; ихъ непрерывность.** Если какая-либо функція опредѣлена лишь для раціональныхъ значеній аргумента, то ея значенія для ирраціональныхъ значеній аргумента могутъ быть дополнительно опредѣлены совершенно независимо отъ предыдущаго опредѣленія

Но если мы желаемъ, чтобы опредѣляемая функція была непрерывной, то необходимо, хотя и не достаточно, опредѣлять значеніе функціи для ирраціональныхъ значеній аргумента, какъ

предѣлъ ряда значеній этой функціи при раціональныхъ значеніяхъ аргумента. Пусть, напр., рядъ раціональныхъ значеній аргумента $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ имѣетъ предѣломъ ирраціональное число p: $\lim r_n = p$. Если для раціональныхъ значеній аргумента функція $f(x)$ опредѣлена, то подъ знакомъ $f(p)$ нужно разумѣть $\lim f(r_n)$:

$$f(p) = \lim f(r_n) \, .$$

Чтобы убѣдиться, что такъ опредѣляемая функція непрерывна, нужно еще доказать, что при всякомъ рядѣ значеній аргумента, имѣющемъ предѣломъ число p, $\lim f(x_n)$ будетъ то же самое число, которое мы обозначили черезъ $f(p)$:

$$\lim f(x_n) = \lim f(x'_n) = \ldots = f(p)\, , \quad \text{если} \quad \lim x_n = \lim x'_n = \ldots = p\, .$$

Примѣнимъ такой путь дополнительнаго опредѣленія къ показательной функціи.

Для раціональныхъ значеній аргумента *) функція a^x (т.-е. символъ a^x) вполнѣ опредѣлена: если m и n—цѣлыя числа, то

$$a^m = a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \ldots a \, ,$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \ldots a} \, .$$

Символъ a^x для раціональныхъ значеній аргумента обладаетъ слѣдующими свойствами.

$$a^x \, . \, a^y = a^{x+y}\, ; \; a^x : a^y = a^{x-y}\, ; \; (a^x)^y = a^{xy}\, ; \quad (a \, . \, b)^x = a^x \, . \, b^x \, .$$

Для показателя, равнаго нулю, символъ a^0 опредѣленъ, какъ частное двухъ степеней съ равными раціональными показателями, и потому $a^0 = 1$:

$$a^x : a^x = a^{x-x} \quad a^0 = 1 \, .$$

Но для ирраціональныхъ значеній аргумента функція a^x еще неопредѣлена **): символъ a^{π}, напр., пока не имѣетъ смысла.

---

*) т.-е. если $x = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n — цѣлыя числа.

**) Въ §§ 2 и 3 гл. I лишь намѣченъ путь обобщенія.

Если $a > 1$, то съ увеличеніемъ показателя и функція a^x увеличивается (мы конечно имѣемъ право разсматривать пока лишь раціональныя значенія показателя). Именно, для цѣлыхъ показателей это предложеніе очевидно, ибо если $n = m + l$, гдѣ n, m и l цѣлыя числа, то

$$a^n = a^{m+l} = a^m \,.\, a^l, \quad \text{но} \quad a^l = a \,.\, a \,.\, a \ldots a > 1 \quad \text{и} \quad a^n > a^m \,.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости того же предложенія для дробныхъ показателей, нужно предварительно доказать, что при всякомъ (раціональномъ) положительномъ показателѣ $a^x > 1$.

Пусть $x = \frac{1}{q}$, гдѣ q — положительное цѣлое число, и пусть $a^{\frac{1}{q}} = +\sqrt[q]{a} = \alpha$. Если бы α было меньше единицы, то и α^q, т.-е. a, было бы меньше единицы, что противорѣчитъ условію ($a > 1$); если бы α было равно единицѣ, то и α^q, т. е. a, было бы также равно единицѣ, что опять противорѣчитъ условію. Слѣдовательно, α, т.-е. $a^{\frac{1}{q}} > 1$.

Если $x = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q — цѣлыя положительныя числа, то $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$; но $a^{\frac{1}{q}}$ по доказанному больше единицы, а потому и

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1 \quad \text{или} \quad a^{\frac{p}{q}} > 1 \,.$$

Теперь мы можемъ доказать, что $a^x > a^y$, если $x > y$.

Въ самомъ дѣлѣ, $a^x : a^y = a^{x-y}$. Но $x - y$ по условію положительное число; слѣдовательно,

$$a^{x-y} > 1 \,, \quad \text{или} \quad \frac{a^x}{a^y} > 1 \,,$$

откуда

$$a^x > a^y \,.$$

Такимъ образомъ, если показатель x уменьшается (пока принимая раціональныя значенія), то и функція a^x уменьшается. Пусть

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots\ldots\ldots > x_n > \ldots\ldots\ldots$$

рядъ убывающихъ положительныхъ раціональныхъ значеній аргу-

мента. Этому ряду соотвѣтствуетъ рядъ убывающихъ значеній функціи

$$a^{x_1} > a^{x_2} > a^{x_3} > \ldots > a^{x_n} > \ldots$$

При этомъ $a^{x_n} > 1$. Если $lim\, x_n = 0$, то изъ неравенства

$$a^{x_n} > 1$$

слѣдуетъ, что $lim\, a^{x_n} \geq 1$ (стр. 205). Но какой изъ знаковъ выбрать знакъ равенства или неравенства — вопросъ остается пока нерѣшеннымъ. Опираться при этомъ выборѣ на положеніе, что $a^0 = 1$, нельзя, ибо a^0 равно единицѣ потому, что символъ a^0 опредѣленъ, какъ частное двухъ степеней съ равными раціональными показателями, между тѣмъ какъ въ предыдущемъ показателѣ x_n стремится къ нулю и мы должны судить о предѣлѣ a^{x_n}. Если мы убѣдимся, что разность $a^{x_n} - 1$ — обозначимъ ее черезъ h — величина безконечно малая, то $lim\, a^{x_n} = 1$.

По условію $lim\, x_n = 0$; слѣдовательно, x_n число безконечно малое и можетъ быть сдѣлано по абсолютной величинѣ меньше любого сколь угодно малаго положительнаго числа, напр., $\frac{1}{p}$, гдѣ p—цѣлое число:

$$x_n < \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad a^{x_n} < a^{\frac{1}{p}}, \quad \text{или} \quad a^{x_n} - 1 < a^{\frac{1}{p}} - 1.$$

Слѣдовательно,

$$h < a^{\frac{1}{p}} - 1, \quad \text{или} \quad a^{\frac{1}{p}} > 1 + h.$$

Возводя обѣ части этого равенства въ степень p, получимъ

$$a > (1+h)^p = 1 + ph + \frac{p(p-1)}{1.2} h^2 + \ldots + h^p,$$

и тѣмъ болѣе

$$a > 1 + ph,$$

откуда

$$h < \frac{a-1}{p}.$$

Число h положительное; слѣдовательно,

$$0 < h < \frac{a-1}{p}.$$

Но p можно взять сколь угодно большимъ и, слѣдовательно, $\frac{a-1}{p}$ можетъ быть сколь угодно малымъ, а это значитъ, что h можетъ быть сдѣлано меньше любого напередъ заданнаго положительнаго числа, т.-е. h — число безконечно малое и $\lim h = 0$. Такимъ образомъ

$$\lim\ (a^{x_n} - 1) = 0\,,$$

$$\text{или} \qquad \lim a^{x_n} = 1\,, \qquad \text{если} \qquad \lim x_n = 0\,.$$

Такъ какъ предѣлъ обратной величины перемѣннаго равенъ обратной величинѣ предѣла (стр. 258), то мы должны имѣть

$$\lim\ a^{-x_n} = \lim \frac{1}{a^{x_n}} = \frac{1}{\lim\ a^{x_n}}\,,$$

и если $\lim x_n = 0$, то и $\lim a^{-x_n} = 1$. Такимъ образомъ, если x_n страмится къ нулю не только принимая положительныя значенія, но и отрицательныя или поперемѣнно тѣ и другія, то a^{x_n} стремится къ единицѣ, какъ своему предѣлу.

Теперь можно показать, что каковъ бы ни былъ рядъ раціональныхъ чиселъ $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$, стремящійся къ ирраціональному числу t, какъ своему предѣлу—

$$\lim\ r_n = t\,,$$

соотвѣтствующій рядъ значеній функціи: $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots, a^{r_n}, \ldots$ стремится къ опредѣленному предѣлу—обозначимъ его пока черезъ A. Въ самомъ дѣлѣ, можно раціональное число r_m взять съ достаточно большимъ указателемъ m такъ, чтобы оно отличалось отъ всякаго числа r_n того же ряда съ указателемъ еще большимъ сколь угодно мало, т.-е. чтобы разность $x_m = r_n - r_m$ при $n > m$ и безгранично увеличивающемся m была величиной безконечно малой: $\lim x_m = 0$. При этихъ условіяхъ и разность $a^{r_n} - a^{r_m}$ будетъ также величиной безконечно малой. Дѣйствительно,

$$a^{r_n} - a^{r_m} = a^{r_m}(a^{r_n - r_m} - 1) = a^{r_m}(a^{x_m} - 1) < a^R(a^{x_m} - 1),$$

гдѣ R произвольно выбранное опредѣленное раціональное число, большее чѣмъ t и, стало быть, большее, при достаточно большомъ

значеніи указателя m, чѣмъ любое r_n, если $n \geq m$, такъ какъ раціональныя числа r_n съ увеличеніемъ указателя группируются около своего предѣла t. Но, такъ какъ $lim\, x_m = 0$, то разность $a^{x_m} - 1$ величина безконечно малая и можетъ быть сдѣлана меньше любого напередъ заданнаго положительнаго числа, напр. $\frac{\varepsilon}{aR}$:

$$|a^{x_n} - 1| < \frac{\varepsilon}{aR}.$$

Слѣдовательно,

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon,$$

т.-е. величина $a^{r_n} - a^{r_m}$ — величина безконечно малая и потому (стр. 205) a^{r_n} стремится къ опредѣленному предѣлу A:

$$lim\, a^{r_n} = A.$$

Если другой рядъ раціональныхъ чиселъ $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots, r'_n, \ldots$ стремится къ тому же предѣлу t: $lim\, r'_n = t$, то при достаточно большихъ указателяхъ числа r_n и r'_n отличаются безконечно мало одно отъ другого, а потому и значенія функціи a^{r_n} и $a^{r'_n}$ отличаются безконечно мало одно отъ другого:

$$a^{r_n} - a^{r'_n} = a^{r'_n}(a^{r_n - r'_n} - 1) < a^R(a^{x_n} - 1),$$

гдѣ

$$R > r'_n \quad \text{и} \quad lim\, x_n = 0;$$

слѣдовательно,

$$lim\, a^{r_n} = lim\, a^{r'_n} = A.$$

Обозначимъ этотъ общій предѣлъ A черезъ a^t:

$$lim\, a^{r_n} = a^t, \quad \text{если} \quad lim\, r_n = t.$$

Въ этомъ равенствѣ $lim\, a^{r_n} = a^t$ мы имѣемъ опредѣленіе возведенія въ степень съ ирраціональнымъ показателемъ. Правила дѣйствій надъ степенями съ ирраціональными показателями тѣ же, что и правила дѣйствій надъ степенями съ раціональными показателями. Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напримѣръ, $lim\, r_n = t$ и $lim\, R_n = u$, а слѣдовательно,

$$lim\,(r_n + R_n) = t + u.$$

Подъ t и u мы разумѣемъ ирраціональныя числа. Изъ равенства

$$a^{r_n} \cdot a^{R_n} = a^{r_n + R_n}$$

слѣдуетъ

$$\lim a^{r_n} \cdot \lim a^{R_n} = \lim a^{r_n + R_n}, \quad \text{т.-е.} \quad a^t \cdot a^u = a^{t+u}.$$

Точно также можно убѣдиться, что и остальныя правила дѣйствій съ показателями имѣютъ мѣсто и для ирраціональныхъ показателей.

Кромѣ того, если ирраціональное число t меньше раціональнаго или ирраціональнаго же числа u, т.-е $t < u$, то и $a^t < a^u$. Это предложеніе выше было доказано лишь для раціональныхъ значеній показателя. Можно доказать, что оно имѣетъ мѣсто и въ случаѣ, если одинъ или оба показателя ирраціональны. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\lim r_n = \lim r'_n = t$, а $\lim R_n = \lim R'_n = u$, при чемъ

$$r_n < t < r'_n \quad \text{и} \quad R_n < u < R'_n .$$

Такимъ образомъ r_n приближается къ t увеличиваясь, а r'_n уменьшаясь, а потому

$$a^{r_n} < a^t < a^{r'_n}$$

и точно также

$$a^{R_n} < a^u < a^{R'_n} .$$

Числа r_n и r'_n группируются около t, а числа R_n и R'_n—около u, а потому указатели раціональныхъ чиселъ r_n, r'_n, R_n и R'_n можно взять настолько большими, чтобы r'_n было меньше R_n, въ такомъ случаѣ интервалъ $(r_n r'_n)$ будетъ внѣ интервала $(R_n R'_n)$. Такимъ образомъ имѣется слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$r_n < r'_n < R_n < R'_n ,$$

а слѣдовательно, имѣютъ мѣсто и слѣдующія неравенства:

$$a^{r_n} < a^{r'_n} < a^{R_n} < a^{R'_n} .$$

Но a^t заключается между a^{r_n} и $a^{r'_n}$, а a^u—между a^{R_n} и $a^{R'_n}$, а по тому

$$a^t < a^u .$$

Итакъ, показательная функція a^x теперь вполнѣ опредѣлена. Остается лишь показать, что функція эта **непрерывная**, т.-е, что для

нея имѣетъ мѣсто опредѣляющее непрерывность функціи условіе:

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n),$$

или

$$\lim a^{x_n} = a^{\lim x_n}$$

при всякихъ не только раціональныхъ послѣдовательностяхъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, стремящихся къ какому-либо предѣлу.

Если число x_n ирраціональное, то всегда можно взять два его раціональныхъ приближенія r_n и $r_n + \frac{1}{n}$, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ и отличающихся одно отъ другого на $\frac{1}{n}$:

$$r_n < x_n < r_n + \frac{1}{n},$$

гдѣ

$$\lim r_n \quad \lim \left(r_n + \frac{1}{n}\right) = \lim x_n .$$

Соотвѣтственныя значенія функціи находятся въ такомъ же отношеніи:

$$a^{r_n} < a^{x_n} < a^{r_n + \frac{1}{n}} .$$

Слѣдовательно,

$$\lim a^{r_n} \leqq \lim a^{x_n} < \lim a^{r_n + \frac{1}{n}} .$$

Но по опредѣленію

$$\lim a^{r_n} = a^{\lim r_n} = a^{\lim x_n} \quad \text{и} \quad \lim a^{r_n + \frac{1}{n}} = a^{\lim \left(r_n + \frac{1}{n}\right)} = a^{\lim x_n} .$$

Итакъ,

$$a^{\lim x_n} \leqq \lim a^{x_n} \leqq a^{\lim x_n} .$$

Слѣдовательно,

$$\lim a^{x_n} = a^{\lim x_n} .$$

Такимъ образомъ показательная функція a^x—непрерывная функція. Если $a > 1$, то при возрастающемъ аргументѣ функція a^x принимаетъ всегда возрастающія значенія, мѣняющіяся отъ 0 до $+\infty$:

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{и} \quad 0 < a^x < +\infty .$$

Если $0 < a < 1$, то показательная функція у б ы в а е т ъ съ в о з р а-

станіемъ аргумента:

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{и} \quad +\infty > a^x > 0 .$$

Логариѳмическая функція $y = log_a x$ обратна показательной и опредѣляется равенствомъ

$$x = a^y \qquad (a > 0) .$$

Показательная функція теперь вполнѣ опредѣлена и мѣняется отъ 0 до $+\infty$ въ то время, какъ показатель мѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$ (при $a > 1$). Поэтому логариѳмъ вполнѣ опредѣленъ для всѣхъ значеній аргумента, заключенныхъ между 0 и $+\infty$.

$$0 < x < +\infty ,$$

и принимаетъ соотвѣтственно значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$.

$$-\infty < y < +\infty ,$$

иначе—всякое положительное число имѣетъ логариѳмъ. Такъ какъ показательная функція непрерывна, то и обратная ей—логариѳмическая непрерывна тамъ, гдѣ она опредѣлена, т.-е. въ интервалѣ отъ 0 до $+\infty$. При этомъ при x, стремящемся къ нулю, логариѳмъ стремится къ $-\infty$ и, слѣдовательно, при $x = 0$ логариѳмъ испытываетъ нарушеніе непрерывности, между тѣмъ какъ непрерывность сохраняется при сколь угодно малыхъ положительныхъ значеніяхъ аргумента: при значеніяхъ x сколь угодно близкихъ къ нулю, но не при $x = 0$.

Таковъ путь опредѣленія и обобщенія понятій функцій показательной и логариѳмической. Мы увидимъ далѣе, что тѣ же функціи могутъ быть опредѣлены иначе и сразу какъ для раціональныхъ такъ и ирраціональныхъ значеній аргумента.

§ 11. **Основныя свойства непрерывныхъ функцій.** Интересъ математическаго анализа заключается прежде всего въ примѣненіи его къ изученію свойствъ непрерывныхъ функцій. Разнообразіе функцій очень велико и непрерывныя функціи составляютъ въ этомъ разнообразіи лишь очень небольшой классъ. Мы видѣли выше примѣры функцій прерывныхъ въ нѣкоторыхъ точкахъ. Существуютъ функціи прерывныя въ безчисленномъ множествѣ точекъ и даже прерывныя

въ каждой точкѣ. Свойства такихъ функцій конечно представляютъ громадный интересъ съ точки зрѣнія теоріи функцій, преслѣдующей цѣли чистаго знанія. Но эти вопросы общей теоріи функцій лежатъ внѣ непосредственныхъ интересовъ приложеній и, если и имѣютъ значеніе для нихъ, то лишь постольку, поскольку они касаются въ то же время въ частности функцій непрерывныхъ.

Въ этомъ параграфѣ мы и разсмотримъ нѣкоторыя основныя свойства непрерывныхъ функцій При этомъ будемъ считать функцію опредѣленной въ нѣкоторомъ интервалѣ (ab), который будетъ или замкнутымъ, т.-е. въ которомъ независимое перемѣнное x принимаетъ не только промежуточныя значенія, но и граничныя a и b:

$$a \leqq x \leqq b$$

или незамкнутымъ, открытымъ, въ которомъ независимое перемѣнное не принимаетъ граничныхъ значеній:

$$a < x < b .$$

Интервалъ можетъ быть также замкнутымъ съ одного конца и открытымъ съ другого:

$$a \leqq x < b \quad \text{и} \quad a < x \leqq b .$$

Мы уже знаемъ, когда функція будетъ непрерывной въ данномъ интервалѣ. Теперь нужно выяснить еще терминъ „конечная функція“. Если функція непрерывна въ интералѣ (ab), то, какъ слѣдуетъ изъ опредѣленія непрерывности, значеніе функціи въ каждой точкѣ этого интервала конечно. Но изъ того, что каждое значеніе функціи конечно, еще не слѣдуетъ, что и функція конечна. Конечной въ интервалѣ (ab) функція называется тогда, когда всѣ ея значенія въ этомъ интервалѣ не просто конечны, а заключены между двумя конечными числами, напр., M и N: конечная функція ограничена и сверху и снизу. Если всѣ значенія функціи заключены между двумя конечными числами, то существуетъ и верхняя граница этихъ значеній M' и нижняя N', т.-е. такія числа M' и N', которыя обладаютъ слѣдующими свойствами: 1) они опредѣляютъ интервалъ $(N'M')$, заключающій всѣ значенія функціи, но ни одинъ изъ интерваловъ $(N', M'-\varepsilon)$ или $(N'+\varepsilon, M')$ или $(N'+\varepsilon, M'-\varepsilon)$, гдѣ ε сколь угодно малое положительное число, уже не вмѣщаетъ всѣхъ значеній этой функціи. Въ самомъ дѣлѣ, значенія функціи $f(x)$ слѣдующимъ образомъ распредѣ-

ляютъ рацiональныя числа на два класса: съ одной стороны—рацiональныя числа, которыя не могутъ быть превзойдены ни однимъ значенiемъ функцiи $f(x)$, образуютъ верхнiй классъ [такiя рацiональныя числа есть: напр., всѣ числа большiя числа M]; съ другой—остальныя рацiональныя числа, къ которымъ, между прочимъ, относятся рацiональныя числа меньшiя N, образуютъ нижнiй классъ. Такимъ образомъ произведено сѣченiе (Dedekind) въ области рацiональныхъ чиселъ и тѣмъ самымъ опредѣляется число M', являющееся верхней границей значенiя функцiи $f(x)$. Точно также можно убѣдиться и въ существованiи нижней границы N'.

1. Теорема. Если функцiя $f(x)$ непрерывна въ **замкнутомъ** интервалѣ $(a\,b)$

$$a \leq x \leq b,$$

то она и **конечна** въ этомъ интервалѣ.

Можно привести примѣръ **непрерывной** функцiи въ **незамкнутомъ** интервалѣ, которая будетъ имѣть конечныя значенiя, но не будетъ конечна, не имѣя какой-либо границы. Именно—функцiя $f(x)=\frac{1}{x}$ въ интервалѣ

$$0 < x \leq 1$$

не замкнутомъ при $x=0$, не имѣетъ верхней границы, ибо $\frac{1}{x}$ можетъ превзойти любое сколь угодно большое, данное напередъ число: для этого стоитъ только взять x достаточно малымъ.

Можно привести также примѣръ **прерывной** функцiи въ **замкнутомъ** интервалѣ, которая принимаетъ только конечныя значенiя, но не будетъ конечной, не имѣя какой-либо границы. Такую функцiю для замкнутаго интервала

$$0 \leq x \leq 1$$

можно **опредѣлить** слѣдующимъ образомъ: если $x \neq 0$, то $f(x)=\frac{1}{x}$, а при $x=0$, $f(x)=0$ или $f(0)=0$. При $x=0$ такъ опредѣленная функцiя испытываетъ перерывъ, ибо

$$\lim_{x=0} f(x) \neq f(0),$$

и также, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, не имѣетъ верхней границы.

Но если функція **непрерывна въ замкнутомъ** интервалѣ, то она и ограничена въ этомъ интервалѣ и сверху и снизу, т.-е. конечна.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ это утвержденіе невѣрно.

Пусть, напр., не существуетъ верхней границы для функціи $f(x)$ въ замкнутомъ интервалѣ

$$a \leq x \leq b .$$

Раздѣлимъ интервалъ $(a\,b)$ пополамъ. По крайней мѣрѣ въ одной изъ этихъ половинъ функція $f(x)$ не будетъ ограничена сверху, ибо если бы въ каждой изъ этихъ частей она была ограничена, то она была бы ограничена и въ интервалѣ $(a\,b)$, что противорѣчитъ сдѣланному предположенію. Обозначимъ концы этого интервала черезъ a_1 и b_1, при чемъ одно изъ этихъ чиселъ совпадаетъ съ однимъ изъ данныхъ чиселъ a или b, а другое равно $\frac{a+b}{2}$. Съ интерваломъ $(a_1\,b_1)$ поступаемъ такъ же какъ и съ первымъ. Получимъ новый интервалъ $(a_2\,b_2)$, совпадающій съ одной изъ половинъ предыдущаго, и внутри этого новаго интервала функція $f(x)$ должна быть неограничена, если сдѣланное предположеніе о неограниченности въ интервалѣ $(a\,b)$ вѣрно.

Продолжая эту операцію безгранично, получимъ безчисленное множество интерваловъ $(a\;b), (a_1\;b_1), (a_2\;b_2), \ldots, (a_n\;b_n)\ldots$, изъ которыхъ каждый слѣдующій лежитъ внутри предыдущаго:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$$

$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$$

При этомъ

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \ldots \; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Въ интервалѣ $(a_n\,b_n)$ функція $f(x)$ должна быть неограниченной. Этотъ интервалъ лежитъ внутри интервала $(a\,b)$, быть можетъ примыкая къ одному изъ его концовъ. Увеличивая указатель n, можно достигнуть того, что интервалъ $b_n - a_n$ будетъ сколь угодно малымъ.

Такимъ образомъ внутри интервала $(a\,b)$ **существуетъ** интервалъ $(a_n\,b_n)$, **сколь угодно малый**, внутри котораго данная функція должна быть **неограниченной**.

Но такое слѣдствіе изъ сдѣланнаго предположенія противорѣчитъ

слѣдствію изъ условій теоремы. Дѣйствительно, функція $f(x)$ непрерывна въ замкнутомъ интервалѣ $(a\,b)$. Слѣдовательно, при всякомъ x, удовлетворяющемъ условію

$$a \leqq x \geqq b,$$

значеніе функціи $f(x)$ конечное число; напр., при $x = c$, если $a \leqq c \leqq b$, $f(c)$ конечное число, и по условію непрерывности должно имѣть мѣсто равенство

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - c| < \delta,$$

гдѣ ε сколь угодно малое положительное число, а δ достаточно малое. Отсюда слѣдуетъ неравенство

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \quad \text{при} \quad c - \delta < x < c + \delta.$$

Такимъ образомъ въ интервалѣ $c - \delta, c + \delta$, величина котораго равна 2δ, функція $f(x)$ заключена между двумя постоянными конечными числами $f(c) + \varepsilon$, $f(c) - \varepsilon$. Но c любое число замкнутаго интервала $(a\,b)$, которое можетъ также совпадать или съ a или съ b. Слѣдовательно, въ окрестности любой точки замкнутаго интервала $(a\,b)$ непрерывная функція $f(x)$ ограничена и потому **не существуетъ** ни одного интервала подобнаго интервалу $b_n - a_n$, въ которомъ бы функція $f(x)$ была неограниченной.

Итакъ, допущеніе неограниченности функціи сверху приводитъ къ противорѣчію со слѣдствіемъ изъ условной непрерывности функціи и замкнутости интервала. Такое же противорѣчіе получили бы при допущеніи неограниченности функціи снизу. Слѣдовательно, функція $f(x)$, непрерывная въ замкнутомъ интервалѣ $(a\,b)$, ограничена и сверху и снизу, т. е. заключена между двумя конечными числами и потому конечна.

2. **Теорема.** Въ замкнутомъ интервалѣ непрерывная функція имѣетъ наибольшее и наименьшее значеніе.

Мы уже видѣли, что конечная функція въ данномъ интервалѣ имѣетъ верхнюю и нижнюю границы. Для непрерывной функціи въ замкнутомъ интервалѣ эти границы принадлежатъ къ **значеніямъ** функціи: вотъ что утверждаетъ эта теорема. Конечной функція можетъ быть и въ открытомъ интервалѣ, верхняя и нижняя границы будутъ для нея существовать, но онѣ могутъ и не принадле-

жать къ значеніямъ функціи. Напр., пусть для незамкнутаго интервала

$$0 < x < 1 \tag{1}$$

функція опредѣлена слѣдующимъ образомъ

$$f(x) = 2x + 5 . \tag{2}$$

Внѣ разсматриваемаго интервала функція нами не опредѣлена. Если бы мы взяли то же выраженіе $2x + 5$ и для остальныхъ значеній x, то это уже была бы новая функція. Значенія функціи $f(x) = 2x + 5$, когда x мѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до 1, заключены между числами 5 и 7. Эти числа и будутъ нижней и верхней границами, но этихъ границъ функція $f(x)$ никогда не достигаетъ, такъ какъ она опредѣлена для значеній x, удовлетворяющихъ неравенству (1), но не для $x = 0$ и $x = 1$.

Итакъ, пусть $f(x)$ непрерывная функція въ замкнутомъ интервалѣ $(a\, b)$. Эта функція по 1 теоремѣ конечна, а стало-быть имѣетъ верхнюю и нижнюю границы, пусть эти границы будутъ m — нижняя и M — верхняя. Требуется доказать, что есть такія значенія аргумента — назовемъ ихъ c и d, при которыхъ значенія функціи равны соотвѣтственно M и m:

$$f(c) = M \quad \text{и} \quad f(d) = m .$$

Докажемъ сначала, что есть такое число c въ интервалѣ $(a\, b)$, которое удовлетворяетъ требованію $f(c) = M$.

Дѣлимъ интервалъ $(a\, b)$ пополамъ. По крайней мѣрѣ въ одной изъ этихъ половинъ верхняя граница функціи равна M. Назовемъ концы этой половины черезъ a_1, b_1. Съ интерваломъ $(a_1\, b_1)$ поступаемъ такъ же, какъ съ интерваломъ $(a\, b)$, и получимъ подобно тому, какъ при доказательствѣ теоремы 1, безграничный рядъ интерваловъ $(a\, b), (a_1\, b_1), (a_2\, b_2), \ldots, (a_n\, b_n), \ldots$, при чемъ

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots, \qquad b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq \ldots \tag{3}$$

и

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} .$$

Слѣдовательно, обѣ послѣдовательности чиселъ $a, a_1, a_2, \ldots$ и $b, b_1, b_2, \ldots$ стремятся къ одному и тому же предѣлу, назовемъ его c:

$$\lim a_n = \lim b_n = c .$$

Въ каждомъ изъ полученныхъ интерваловъ верхней границей функціи $f(x)$ будетъ число M. По самому опредѣленію верхней границы функція $f(x)$ можетъ принимать въ соотвѣтствующемъ интервалѣ значенія сколь угодно близкія къ границѣ M. Поэтому въ первомъ интервалѣ можно взять такое значеніе x_0 аргумента, при которомъ значеніе функціи $f(x_0)$ превзойдетъ число $M-\varepsilon_0$, во второмъ интервалѣ можно взять значеніе аргумента x_1, при которомъ значеніе функціи $f(x_1)$ правзойдетъ число $M-\varepsilon_1$ и т. д.:

$$f(x_0) > M-\varepsilon_0,\quad f(x_1) > M-\varepsilon_1,\quad f(x_2) > M-\varepsilon_2, \ldots,\quad f(x_n) > M-\varepsilon_n, \ldots$$

или

$$M-f(x_0) < \varepsilon_0\quad M-f(x_1) < \varepsilon_1\quad M-f(x_2) < \varepsilon_2, \ldots,\quad M-f(x_n) < \varepsilon_n, \ldots \quad (4)$$

гдѣ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ любыя сколь угодно малыя положительныя числа. Можно выбрать ихъ такъ, чтобы изъ нихъ образовалась убывающая, стремящаяся къ нулю, какъ своему предѣлу, послѣдовательность, напр., можно положить

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2},\quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0}{2^2}, \ldots,\quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_0}{2^n}, \ldots \quad (5)$$

Числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$a \leq x_0 \leq b,\quad a_1 \leq x_1 \leq b_1,\quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \ldots,\quad a_n \leq x_n \leq b_n, \ldots \quad (6)$$

Изъ неравенствъ (4) при условіяхъ (5) слѣдуетъ, что M является предѣломъ перемѣннаго числа $f(x_n)$, а изъ неравенствъ (6) вытекаетъ, что x_n стремится къ тому же предѣлу, какъ и числа a_n и b_n:

$$\lim f(x_n) = M \quad \text{и} \quad \lim x_n = \lim a_n = \lim b_n = c\,. \quad (7)$$

Но $f(x)$ непрерывная функція и потому

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n);$$

замѣняя обѣ части этого равенства на основаніи равенствъ (7) равными имъ величинами, получимъ

$$M = f(c).$$

т.-е верхняя граница непрерывной функціи $f(x)$ въ замкнутомъ

интервалѣ является значеніемъ функціи $f(x)$ при $x=c$, гдѣ c число заключенное въ интервалѣ $(a\,b)$.

Точно также можно доказать разсматриваемую теорему и относительно нижней границы.

Примѣчаніе. Разность $M-m$ называется колебаніемъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ $(a\,b)$.

3 Теорема. Если непрерывная функція $f(x)$ при $x=a$ и при $x=b$ имѣетъ противоположные знаки, напр.,

$$f(a)<0, \qquad f(b)>0,$$

то при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи аргумента $x=c$, заключенномъ между a и b (предполагаемъ $a<b$)

$$a<c<b,$$

разсматриваемая функція обращается въ нуль.

Примѣчаніе. Предложеніе это очевидно геометрически: графика непрерывной функціи $f(x)$, соединяя точку $A[a, f(a)]$, лежащую подъ осью абсциссъ (черт. 164), съ точкой $B[b, f(b)]$, лежащей надъ этой осью, чтобы перейти изъ нижней части плоскости въ верхнюю, должна пересѣчь линію раздѣла, т.-е. ось абсциссъ; ордината точки пересѣченія равна нулю, т.-е. нѣкоторое значеніе функціи въ интервалѣ (ab) обращается въ нуль.

Черт. 164.

При аналитическомъ доказательствѣ этого предложенія не геометрическія представленія, а аналитическое опредѣленіе непрерывной функціи и теорія предѣловъ должны служить основаніемъ для заключеній. Геометрическій чертежъ можетъ служить лишь иллюстраціей аналитической мысли.

Доказ. Раздѣлимъ интервалъ (ab) пополамъ; абсцисса середины будетъ равна $\frac{a+b}{2}$. Этою точкою интервалъ (ab) раздѣлится на два меньшихъ интервала. Значеніе функціи $f(x)$ при $x=\frac{a+b}{2}$ или равно нулю, или положительно, или отрицательно. Если бы $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ было равно нулю, то теорема была бы доказана. Пусть

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ не равно нулю. Беремъ тотъ изъ двухъ интерваловъ $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, въ концахъ котораго значенія функціи $f(x)$ имѣютъ противоположные знаки. Обозначимъ ради симметріи абсциссы концовъ этого меньшаго интервала черезъ a_1, b_1, при чемъ

$$f(a_1) < 0, \quad а \quad f(a_2) > 0$$

и

$$a < a_1 < b_1 < b; \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Съ интерваломъ (a_1, b_1) поступаемъ такъ же, какъ и съ первымъ. Такимъ образомъ найдемъ третій интервалъ (a_2, b_2):

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq b_1 \leqq b, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

и

$$f(a) < 0, \quad f(a_1) < 0, \quad f(a_2) < 0, \quad а \quad f(b_2) > 0, \quad f(b_1) > 0, \quad f(b) > 0$$

Продолжая такую операцію безгранично, получимъ безграничный рядъ интерваловъ:

$$(a, b), \quad (a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

при чемъ

$$f(a) < 0, \quad f(a_1) < 0, \ldots, \quad f(a_n) < 0; \quad f(b) > 0, \quad f(b_1) > 0, \ldots, \quad f(b_n) > 0$$

и

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Такъ какъ рядъ чиселъ a_n возрастаетъ (не убываетъ), а рядъ чиселъ b_n убываетъ (во всякомъ случаѣ не возрастаетъ) и, кромѣ того, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ при безграничномъ увеличеніи n стремится къ нулю, то оба эти ряда стремятся къ одному предѣлу c, заключенному между a и b:

$$\lim a_n = \lim b_n = c \quad \text{и} \quad a < c < b,$$

Но разсматриваемая функція непрерывна; слѣдовательно, мы должны имѣть

$$\lim f(a_n) = f(c) \quad \text{и} \quad \lim f(b_n) = f(c),$$

или

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c).$$

Такъ какъ по условію

$$f(a_n) < 0, \quad \text{а} \quad f(b_n) > 0,$$

то (стр. 255)

$$\lim f(a_n) \leq 0 \quad \text{и} \quad \lim f(b_n) \geq 0,$$

т.-е.

$$f(c) \leq 0 \quad \text{и} \quad f(c) \geq 0.$$

Слѣдовательно,

$$f(c) = 0.$$

Такимъ образомъ указанная операція приводитъ во всякомъ случаѣ къ одному значенію аргумента c, заключенному между a и b, при которомъ разсматриваемая функція обращается въ нуль.

Эта операція даетъ между прочимъ способъ, хотя и не особенно удобный, способъ приближеннаго вычисленія корня уравненія.

Примѣръ. Вычислить корень уравненія

$$x^3 - 2x - 1 = 0,$$

заключенный между 1 и 2.

Рѣшеніе. Обозначая лѣвую часть даннаго уравненія черезъ $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 2x - 1 = 0,$$

будемъ имѣть

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 1 = -2, \quad \text{а} \quad f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 1 = +3.$$

Слѣдовательно, между 1 и 2 дѣйствительно находится по крайней мѣрѣ одинъ корѣнь даннаго уравненія

$$1 < c < 2 \quad \text{и} \quad f(c) = 0.$$

1 и 2 будутъ первыми приближенными значеніями этого корня.

Опредѣленіе интерваловъ (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). . .

1) $$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; \quad f(3/2) = (3/2)^3 - 2 \cdot 3/2 - 1 = \frac{27-32}{2^3} < 0.$$

Слѣдовательно, $a_1 = 3/2$, $b_1 = 2$ (вторыя приближенныя значенія искомаго корня).

2) $$\frac{2 + 3/2}{2} = \frac{7}{4}; \quad f(7/4) = (7/4)^3 - 2 \cdot 7/4 - 1 = \frac{343-288}{4^3} > 0$$

Слѣдовательно, $a_2 = a_1 = 3/2$, $b_2 = 7/4$ (третьи приближенныя значенія корня)

3) $$\frac{3/2 + 7/4}{2} = \frac{13}{8};\quad f(13/8) = (13/8)^3 - 2\,.\,13/8 - 1 = \frac{2197 - 2176}{8^3} > 0\,.$$

Слѣдовательно, $a_3 = a_2 = \frac{3}{2}$; $b_3 = \frac{13}{8}$.

4) $$\frac{3/2 + 13/8}{2} = \frac{25}{16};\quad f(25/16) = (25/16)^3 - 2\,.\,25/16 - 1 = \frac{15625 - 16896}{16^3} < 0\,.$$

Слѣдовательно, $a_4 = \frac{25}{16}$, $b_4 = b_3 = \frac{13}{8}$.

5) $$\frac{25/16 + 13/8}{2} = \frac{51}{32};\quad f(51/32) = (51/32)^3 - 2\,.\,51/32 - 1 = \frac{132651 - 137216}{32^3} < 0\,.$$

Слѣдовательно, $a_5 = 51/32$, $b_5 = b_4 = 13/8$; a_5 и b_5 будутъ приближенными значеніями искомаго корня, отличающимися отъ него меньше, чѣмъ на $\frac{1}{32}$.

$$b_5 - a_5 = \frac{13}{8} - \frac{51}{32} = \frac{52 - 51}{32} = \frac{1}{32}.$$

Продолжая ту же операцію дальше, мы будемъ получать все болѣе и болѣе приближенныя значенія искомаго корня.

Слѣдствіе. Непрерывная функція, принимающая при $x = a$ значеніе M и при $x = b$ значеніе N:

$$f(a) = M \quad \text{и} \quad f(b) = N,$$

принимаетъ въ интервалѣ $(a\,b)$ любое числовое значеніе P, заключаемое между M и N, ибо функція $f(x) - P$ удовлетворяетъ условіямъ теоремы 3.

Примѣчаніе. Свойствомъ, выражаемымъ въ предыдущемъ слѣдствіи, обладаетъ всякая непрерывная функція; но не всякая функція, обладающая такимъ свойствомъ, непрерывна. Можно, напр., слѣдующимъ образомъ опредѣлить въ интервалѣ (0, 1) прерывную функцію, которая будетъ принимать всякое значеніе, заключенное между нулемъ и единицей: если x не равно ни x_1, ни x_2, гдѣ x_1 и x_2 два какихъ-нибудь опредѣленныхъ числа изъ интервала (0, 1), то будемъ считать $f(x) = x$, а для x равнаго x_1 или x_2 функція опредѣляется иначе, именно будемъ считать по опредѣленію $f(x_1) = x_2$ и $f(x_2) = x_1$. Такъ опредѣленная функція прерывна при x_1 и x_2 и, очевидно, обладаетъ вышеуказаннымъ свойствомъ.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

Безконечно большія и безконечно малыя величины. 1. Что такое безконечно большое число? 2. Если перемѣнное число по абсолютной величинѣ можетъ быть сдѣлано и оставаться далѣе болѣе любого напередъ заданнаго положительнаго числа, можно ли сдѣлать заключеніе, что оно стремится или къ положительной или къ отрицательной безконечности?

3. Что такое безконечно малое число? 4. Будетъ ли $0{,}1^{1000}$ безконечно малымъ числомъ?

5. Что такое безконечно малая n-го порядка? 6. Что такое безконечно большая величина n-го порядка? 7. Какой смыслъ имѣетъ отрицательный порядокъ безконечно малой или безконечно большой величины?

8. Что такое главная часть безконечно малой величины? Какое значеніе имѣютъ главныя части безконечно малыхъ величинъ въ „исчисленіи безконечно малыхъ?“

Предѣлъ. 1. Что такое предѣлъ перемѣнной величины или предѣлъ данной послѣдовательности чиселъ?

2. Всякая ли послѣдовательность чиселъ имѣетъ предѣлъ?

3. Какое соотношеніе имѣетъ мѣсто между понятіемъ предѣла и понятіемъ безконечно малой величины?

4. Какіе существуютъ способы распознать, имѣетъ ли данное перемѣнное число или данная безграничная послѣдовательность чиселъ предѣлъ?

5. Послѣ введенія понятія предѣла, какое содержаніе имѣетъ слово „вычисленіе“?

Функція. 1. Что такое функція? 2. Когда функція называется явною, когда неявною?

3. Что такое непрерывная функція? 4. Въ чемъ заключаются условія непрерывности въ точкѣ и условія непрерывности въ интервалѣ? 5. Когда непрерывность функціи въ данномъ интервалѣ называется равномѣрною?

6. Какихъ типовъ могутъ быть перерывы функціи?

7. Какими основными свойствами обладаютъ непрерывныя функціи?

8. Какія функціи называются элементарными? 9. Какія функціи называются алгебраическими, какія изъ нихъ раціональными, ирраціональными, цѣлыми, дробными? 10. Какія функціи называются трансцендентными?

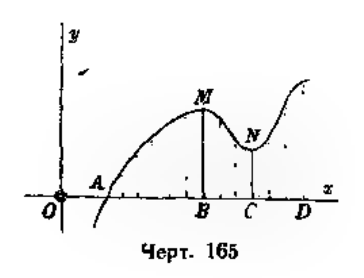
ГЛАВА III.

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ

§ 1. **Ходъ измѣненія функціи.** Первою ступенью изученія какой-нибудь функціи является изслѣдованіе хода ея измѣненія. Пусть мы уже имѣемъ готовую графику непрерывной функціи

$$y = f(x),$$

т.-е. линію, ординаты точекъ которой представляютъ различныя значенія разсматриваемой функціи, а абсциссы соотвѣтственныя значенія аргумента. Положеніе этой графики относительно оси абсциссъ, а также ея изгибы, если она кривая линія, и характеризуютъ ходъ измѣненія разсматриваемой функціи (черт. 165).

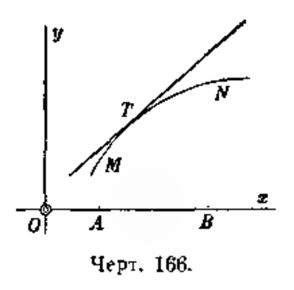


Черт. 165

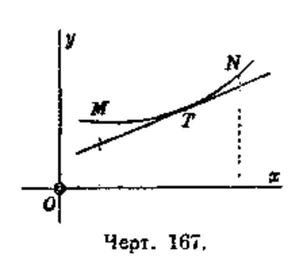
Положимъ, намъ удалось разбить ось абсциссъ на интервалы такъ, что функція въ однихъ интервалахъ все время увеличивается или возрастаетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ аргумента (AB, CD), въ другихъ все время уменьшается или убываетъ (BC). Въ моментъ перехода отъ возрастанія къ убыванію (B) функція достигаетъ maximum'а (BM), въ моментъ перехода отъ убыванія къ возрастанію (C) достигаетъ minimum'а (CN). Maximum и minimum опредѣляются здѣсь не по сравненію этихъ значеній функціи со всѣми другими ея значеніями, а только по сравненію съ сосѣдними соотвѣтствующими значеніямъ аргумента, достаточно близкимъ съ той и другой стороны къ разсматриваемому значенію его.

Характеръ возрастанія или убыванія функціи можетъ быть различный, смотря по тому, въ какую сторону кривая обращена своею выпуклостью, въ сторону ли положительнаго направленія оси орди-

натъ или въ сторону отрицательнаго (черт. 166 и 167), другими словами, лежитъ ли кривая въ разсматриваемомъ интервалѣ все время подъ касательной какой-либо точки кривой въ этомъ интервалѣ, или надъ касательной



Черт. 166.

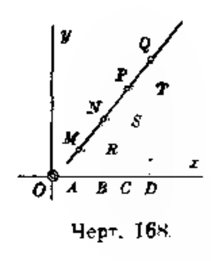


Черт. 167.

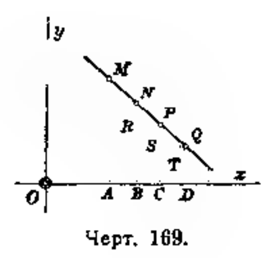
Если функція линейна, т.-е. первой степени относительно аргумента

$$y = ax + b,$$

то она изобразится прямой линіей и потому возрастаніе ея или убываніе будетъ равномѣрнымъ, т.-е. при всякихъ значеніяхъ



Черт. 168.



Черт. 169.

аргумента равнымъ приращеніямъ аргумента будутъ соотвѣтствовать и одинаковыя измѣненія функціи (черт. 168, 169): если

$$AB = BC = CD = \ldots$$

то и

$$RN = SP = TQ = \ldots$$

Но если линія, изображающая функцію, кривая, то равномѣрнаго возрастанія или убыванія не будетъ: равнымъ приращеніемъ аргумента соотвѣтствуютъ, вообще говоря, неравныя приращенія функціи. Такъ, если

$$AB = BC = CD = \ldots$$

и точки M, N, P, Q (черт. 170) лежатъ не на прямой, а на кривой линіи, то треугольники MRN, NSP, PTQ и т. д., хотя и имѣютъ по равному катету

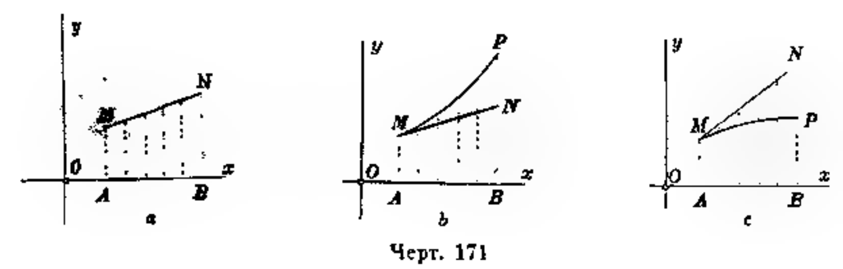
$$MR = NS = PT = \ldots$$

но не будутъ равны, такъ какъ гипотенузы не одинаково наклонены къ равнымъ катетамъ:

$$RN \neq SP \neq TQ \neq \ldots$$

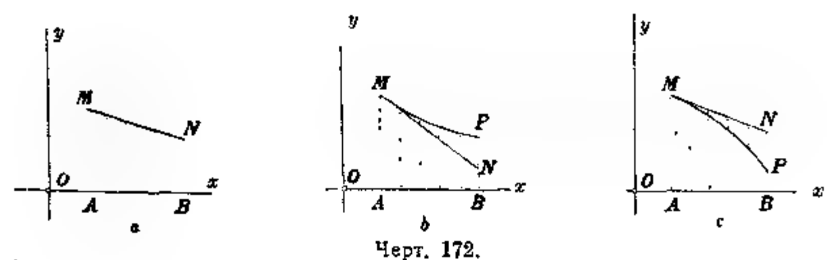
Черт. 170.

Проведя касательную линію къ кривой въ какой-нибудь точкѣ, можно сравнить въ нѣкоторомъ интервалѣ возрастаніе или убываніе ординатъ кривой линіи съ возрастаніемъ или убываніемъ ординатъ касательной. Можно указать геометрическіе признаки, когда



Черт. 171

возрастаніе или убываніе ординатъ кривой линіи будетъ быстрѣе или медленнѣе возрастанія или убыванія ординатъ касательной. Мы назвали ходъ измѣненія ординатъ прямой линіи равномѣрнымъ. Ходъ измѣненія ординатъ кривой линіи неравномѣренъ и можетъ



Черт. 172.

быть возрастаніемъ или убываніемъ ускореннымъ или замедленнымъ.

На черт. 171 мы имѣемъ графики функцій возрастающихъ (въ интервалѣ AB): a)—равномѣрно, b)—ускоренно, c)—замедленно. На черт. 172—графики убывающихъ функцій: a)—равномѣрно, b)—замедленно, c)—ускоренно.

Изысканіе количественныхъ признаковъ для этихъ качественныхъ характеристикъ хода измѣненія функціи, выражаемыхъ словами: возрастаніе, убываніе, равномѣрное, ускоренное или замедленное и приводитъ къ такимъ основнымъ понятіямъ, какъ производныя функціи и дифференціалы. Эти понятія и служатъ ключемъ ученія о функціяхъ.

§ 2. **Производная функція. Ея геометрическое значеніе.** Пусть мы имѣемъ непрерывную функцію

$$y = f(x) . \tag{1}$$

Будемъ разумѣть подъ x какое либо опредѣленное значеніе аргумента и дадимъ ему нѣкоторое приращеніе, которое будемъ обозначать черезъ Δx *). Значеніе функціи при этомъ измѣнится, и это измѣненіе мы будемъ называть также приращеніемъ, которое можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ. Обозначимъ приращеніе функціи черезъ Δy. Измѣненному значенію аргумента $x + \Delta x$ соотвѣтствуетъ и измѣненное значеніе функціи $y + \Delta y$, т.-е.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) . \tag{1'}$$

Приращеніе независимаго перемѣннаго можетъ быть взято нами произвольно; приращеніе функціи опредѣляется равенствомъ (1'): Изъ равенствъ (1) и (1') слѣдуетъ

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) . \tag{2}$$

Разсмотримъ теперь, какое значеніе можетъ имѣть отношеніе приращенія функціи къ соотвѣтствующему приращенію аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если это отношеніе положительно, то Δx и Δy имѣютъ одинаковые знаки и значитъ съ увеличеніемъ аргумента на Δx функція увеличивается. При отрицательномъ отношеніи $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращенія Δx и Δy имѣютъ разные знаки и значитъ съ увеличеніемъ аргумента на Δx функція уменьшится, ибо Δy отрицательно. Такимъ образомъ это отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ должно имѣть значеніе при изслѣдованіи вопроса о возрастаніи и убываніи функціи.

---

*) Δx читается: дельта x; Δ (греческая буква) не обозначаетъ числа, а является лишь символомъ приращенія, между тѣмъ какъ Δx есть число.

Въ случаѣ линейной функціи, т.-е. двучлена первой степени относительно аргумента x

$$y = ax + b, \tag{3}$$

какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, равнымъ приращеніямъ аргумента соотвѣтствуютъ и равныя приращенія функціи. Поэтому отношеніе этихъ приращеній $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не зависитъ ни отъ x, ни отъ величины приращенія Δx, а будетъ для всѣхъ точекъ прямой и при всякомъ Δx постояннымъ и равнымъ угловому коэффиціенту этой прямой.

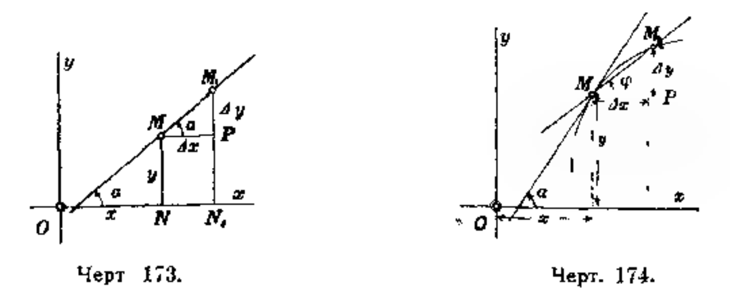
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b,$$

$$\Delta y = a\Delta x \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

При прямоугольной системѣ координатъ угловой коэффиціентъ прямой равенъ тангенсу угла наклона этой прямой къ оси абсциссъ (черт. 173):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\, \alpha .$$

Угловой коэффиціентъ прямой опредѣляетъ быстроту возрастанія или убыванія соотвѣтствующей линейной функціи.



Черт 173. Черт. 174.

Если же разсматриваемая функція не линейна и, слѣдовательно, графикой ея служитъ кривая линія, то отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ зависѣть и отъ мѣста на кривой, т.-е. отъ независимаго перемѣннаго x, и отъ величины приращенія Δx. Геометрическое значеніе этого отношенія вытекаетъ изъ разсмотрѣнія прямоугольнаго треугольника MPM_1 (черт. 174), въ которомъ катеты равны приращеніямъ абсциссы (аргумента) и ординаты (функціи), а гипотенуза, продолженная въ ту и другую сторону, является сѣкущей, соединяющей

точки кривой $M(x, y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Тангенсъ угла φ наклона этой сѣкущей къ положительному направленію оси абсциссъ и будетъ опредѣляться разсматриваемымъ отношеніемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = tg\,\varphi\,. \tag{4}$$

Разсматривая на кривой какую-либо опредѣленную точку $M(x, y)$ и измѣняя приращеніе Δx, т.-е. перемѣщая по кривой точку $M_1(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$, мы тѣмъ самымъ измѣнимъ и отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если приращеніе аргумента Δx стремится къ нулю, то и приращеніе функціи Δy стремится къ нулю, такъ какъ мы разсматриваемъ функцію непрерывную. Пока Δx не равно нулю, отношеніе этихъ приращеній имѣетъ вполнѣ опредѣленный ариѳметическій смыслъ, какъ частное отъ дѣленія одного числа на другое, не равное нулю Положить же непосредственно въ этомъ отношеніи Δx равнымъ нулю не имѣетъ ариѳметическаго смысла. Но если Δx стремится къ нулю, то отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ принимаетъ соотвѣтственно безчисленный рядъ значеній и мы можемъ поставить вопросъ о предѣлѣ его; стремится ли при этомъ это перемѣнное отношеніе къ какому-либо опредѣленному предѣлу или нѣтъ, это зависитъ отъ свойствъ разсматриваемой функціи. Возможно и то и другое.

Примѣръ 1. Функція $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ опредѣлена для всякаго значенія x кромѣ $x = 0$, ибо $\frac{1}{x}$ не имѣетъ смысла. Положимъ по дополнительному опредѣленію $f(0) = 0$. Такъ опредѣленная функція непрерывна въ точкѣ $x = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, хотя функція $\sin\frac{1}{x}$ и испытываетъ при $x = 0$ нарушеніе непрерывности (стр. 272), но эта функція остается конечной, колеблясь между -1 и $+1$ и, слѣдовательно, произведеніе $x \cdot \sin\frac{1}{x}$ стремится къ нулю, такъ какъ одинъ изъ множителей конеченъ, другой стремится къ нулю. Такимъ образомъ условіе непрерывности (стр. 268)

$$\lim_{x=0} f(x) = f(0)\,,$$

выполняется.

Разсматривая два значенія аргумента $x = 0$ и $x = 0 + \Delta x = \Delta x$, получимъ для функціи соотвѣтственныя значенія:

$$f(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad f(\Delta x) = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}\,.$$

Поэтому

$$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = \Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}\,,\ \text{а}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}\,.$$

Но $\sin\frac{1}{\Delta x}$ при Δx стремящемся къ нулю, какъ мы уже знаемъ (стр. 272), не стремится къ опредѣленному предѣлу; слѣдовательно и $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имѣетъ опредѣленной величины.

Примѣръ 2. Функція $f(x)=x^2$ непрерывна (стр. 275). Составимъ для этой функціи отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$y = x^2, \qquad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

откуда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 \qquad \text{или} \qquad \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

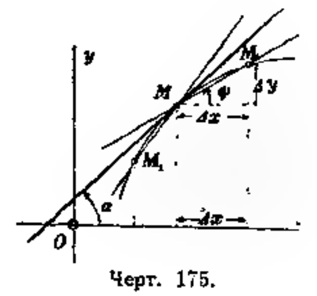
а потому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

При стремленіи Δx къ нулю x остается постояннымъ и потому (стр. 248)

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$$

Разсмотримъ теперь, какое геометрическое значеніе имѣетъ предѣлъ отношенія приращенія функціи къ приращенію аргумента, если этотъ предѣлъ существуетъ.



Черт. 175.

Само отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, какъ мы уже видѣли, опредѣляетъ величину тангенса угла наклона сѣкущей MM_1 къ оси абсциссъ (черт. 175):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi.$$

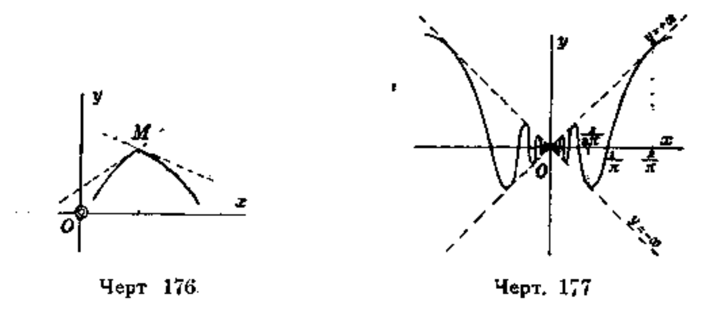
Если Δx стремится къ нулю, то точка $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ приближается къ точкѣ $M(x, y)$, а сѣкущая MM_1, вращаясь около точки M, приближается, если $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$ существуетъ, къ нѣкоторому предѣльному положенію, при которомъ точка M_1 сливается съ точкою M и, слѣдовательно, сѣкущая обращается въ касательную кривой въ точкѣ M. Касательная является линіей, раздѣляющей группу сѣкущихъ MM_1 отъ группы сѣкущихъ MM_2, гдѣ M_1 и M_2—двѣ точки кривой, достаточно близкія къ точкѣ M, изъ которыхъ одна лежитъ по одну сторону (на черт. 175 превую) отъ точки M, дру-

гая по другую (лѣвую) *). Уголъ наклона сѣкущей, т.-е. φ приближается, какъ къ своему предѣлу, къ углу наклона касательной къ той же оси—обозначимъ этотъ уголъ черезъ α—

$$\lim tg\,\varphi = tg\,\alpha\,.$$

---

*) Если бы лѣвосторонній предѣлъ $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не совпадалъ съ правостороннимъ (стр. 268), то въ разсматриваемомъ мѣстѣ кривой былъ бы изломъ (черт. 176). Если бы отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при различныхъ способахъ уменьшенія Δx до нуля стремилось къ различнымъ предѣламъ, какъ въ примѣрѣ 1, то въ



Черт 176. Черт. 177

этомъ мѣстѣ кривая, несмотря на непрерывность, не имѣла бы опредѣленной касательной. Графика функціи $y = x\,.\,\sin\frac{1}{x}$ состоитъ изъ безчисленнаго множества волнъ, уменьшающихся и сгущающихся по направленію къ началу координатъ (черт. 177). Эти волны заключены между прямыми $y = +x$ и $y = -x$ ибо множитель $\sin\frac{1}{x}$ по мѣрѣ уменьшенія x принимаетъ значенія, заключенныя между $+1$ и -1, достигая этихъ значеній при

$$x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad и \quad x = \frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

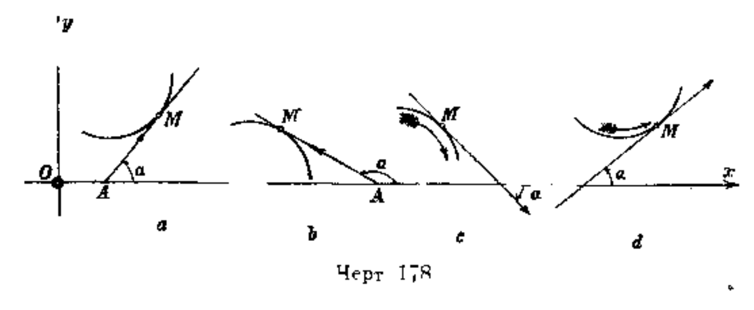
(k цѣлое число) и, слѣдовательно, y колеблется между $y = +x$ и $y = -x$.

Всякая прямая, выходящая изъ начала координатъ и заключенная въ томъ же углу между прямыми $y = +x$ и $y = -x$, въ которомъ лежитъ и ось абсциссъ, имѣетъ угловой коэффиціентъ, могущій быть предѣломъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, гдѣ $y = x\,.\,\sin\frac{1}{x}$. Угловой коэффиціентъ прямой $y = +x$, т.-е. 1 является верхнею границей предѣла $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а угловой коэффиціентъ прямой $y = -x$ нижнею границей. Ни при какомъ способѣ уменьшенія Δx до нуля $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не можетъ принимать значеній внѣ этихъ границъ.

Этимъ и опредѣляется геометрическое значеніе предѣла $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=tg\,\alpha$$

Уголъ α опредѣляется какъ уголъ наклона касательной къ положительному направленію оси абсциссъ, при чемъ для опредѣленія $tg\alpha$ направленіе второй стороны угла α, т. е. касательной не играетъ существенной роли можно направленіе касательной считать положительнымъ отъ точки пересѣченія ея съ осью абсциссъ къ точкѣ прикосновенія (черт 178, a, b), или можно условиться считать положительнымъ то направленіе касательной, которое соотвѣтствуетъ направленію движенія точки по кривой при увеличе-



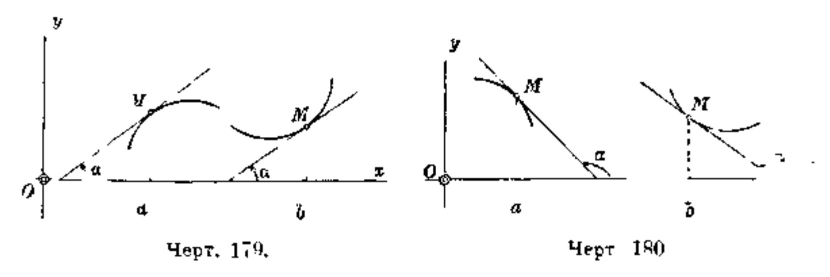
Черт 178

ніи абсциссы (черт. 178 c, d). При томъ или другомъ опредѣленіи направленія касательной углы наклона ея къ оси абсциссъ или согласуются между собою (a, d) или отличаются одинъ отъ другого на половину полнаго оборота (b, c), что ни на абсолютную величину тангенса, ни на его знакъ не вліяетъ Наклонъ касательной при переходѣ отъ одной точки кривой къ другой мѣняется, т.-е. зависитъ отъ x. Слѣдовательно, и $tg\alpha$ зависитъ отъ x, т.-е является функціей x. Эта новая функція выведена, произведена указанной въ равенствѣ (5) операціей изъ данной функціи и потому называется производной функціей и обозначается тѣмъ же знакомъ, какъ и данная, съ прибавленіемъ штриха наверху.

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'.$$

Если бы мы переходъ къ предѣлу выполнили и нашли производную функцію, то съ помощью ея мы могли бы прослѣдить ходъ измѣненія данной функціи, могли бы указать, при какихъ значеніяхъ

аргумента она возрастаетъ, при какихъ убываетъ и гдѣ переходитъ отъ возрастанія къ убыванію или наоборотъ, отъ убыванія къ возрастанію, т.-е. могли бы опредѣлить мѣста maximum'а или minimum'а данной функціи. Именно, если производная функція $f'(x)$ или $tg\alpha$ имѣетъ для нѣкотораго значенія аргумента положительный знакъ, то начальная функція въ разсматриваемомъ мѣстѣ возрастаетъ, ибо при положительномъ значеніи $tg\alpha$ уголъ наклона касательной къ положительному направленію оси абсциссъ будетъ острый (черт. 179) и, слѣдовательно, въ разсматриваемой точкѣ имѣетъ мѣсто подъемъ кривой. Иначе можно убѣдиться въ томъ же самомъ слѣдующимъ образомъ. Если $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ имѣетъ положительный знакъ, то въ достаточной близости къ предѣлу приращенія Δy и Δx имѣютъ одинаковые знаки; если приращеніе



Черт. 179. Черт. 180.

аргумента Δx положительно, то и приращеніе функціи будетъ положительнымъ, т.-е. съ возрастаніемъ аргумента возрастаетъ и функція.

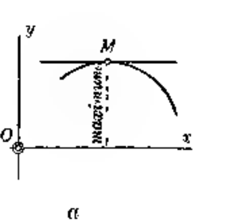
Если для нѣкотораго значенія аргумента производная функція $f'(x)$ $tg\alpha$ имѣетъ отрицательный знакъ, то уголъ наклона касательной къ положительному направленію оси абсциссъ будетъ тупой (черт. 180) и, слѣдовательно, въ разсматриваемомъ мѣстѣ ординаты точекъ кривой съ увеличеніемъ абсциссъ убываютъ. Иначе можно разсуждать такъ. Если $\lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ имѣетъ отрицательный знакъ то въ достаточной близости къ предѣлу приращенія функціи и аргумента Δy и Δx имѣютъ противоположные знаки при положительномъ Δx приращеніе функціи Δy отрицательно, т.-е. съ увеличеніемъ аргумента функція убываетъ.

Если производная функція $f'(x)$, мѣняясь непрерывно, переходитъ отъ положительныхъ значеній черезъ нуль къ отрицательнымъ или наоборотъ, отъ отрицательныхъ черезъ нуль къ положительнымъ, то начальная функція въ моментъ, когда $f'(x) = 0$, перехо-

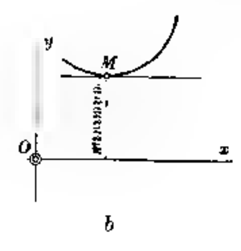
дитъ отъ возрастанія къ убыванію или наоборотъ, отъ убыванія къ возрастанію, т.-е. при тѣхъ значеніяхъ аргумента, которыя обращаютъ производную функцію въ нуль, иначе служатъ **корнями** уравненія

$$f'(x) = 0,$$

начальная функція имѣетъ или maximum или minimum. Такъ какъ $f'(x) = tg\alpha$ и въ мѣстахъ maximum'а или minimum'а $tg\alpha = 0$, то



a



b

Черт. 181

касательная къ кривой, изображающей данную функцію, параллельна ($\alpha = 0$) оси абсциссъ (черт. 181 *a*, *b*).

Примѣръ 3. Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ аргумента функція

$$y = x^2 - 6x + 5$$

возрастаетъ, при какихъ убываетъ, имѣетъ ли maximum или minimum и, если имѣетъ, какова его величина?

Рѣшеніе. Найдемъ производную функцію:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 5$$

или

$$y + \Delta y = x^2 - 6x + 5 + (2x - 6)\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

Но

$$y = x^2 - 6x + 5 .$$

Слѣдовательно,

$$\Delta y = (2x - 6x)\Delta x + (\Delta x)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 6 + \Delta x .$$

Переходя къ предѣлу, находимъ

$$lim\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 6, \quad \text{или} \quad y' = 2x - 6$$

Производная данной функціи равна $2x - 6$ или $2(x - 3)$. При $x < 3$ она отрицательна, при $x = 3$ равна *нулю*, а при $x > 3$ *положительна*. Слѣдовательно, при увеличеніи x отъ $-\infty$ до $+3$ данная функція **убываетъ**, а при дальнѣйшемъ увеличеніи аргумента ($x > 3$) функція **возрастаетъ**. При $x = 3$ функція переходитъ отъ убыванія къ возрастанію, т.-е. достигаетъ своего minimum'а.

Чтобы опредѣлить величину этого minimum'a, нужно вычислить значеніе функціи $y = x^2 - 6x + 5$ при значеніи аргумента, равномъ 3

$$(y)_{x=3} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4 \,.$$

Примѣръ 4. Построить касательныя къ кривой, служащей графикой данной (примѣръ 3) функціи, въ точкахъ пересѣченія этой кривой съ осью абсциссъ.

Рѣшеніе. Найдемъ сначала абсциссы искомыхъ точекъ пересѣченія, т.-е. тѣхъ точекъ кривой, ординаты которыхъ равны нулю:

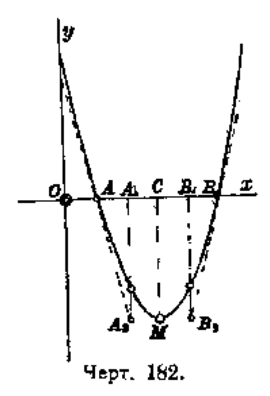
$$y = x^2 - 6 \cdot x + 5 \,, \quad \text{для искомыхъ точекъ} \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \,,$$

откуда

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm 2 \begin{cases} x_1 = 1 \,, \\ x_2 = 5 \,. \end{cases}$$

Итакъ, кривая пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкахъ $A\,(1,0)$ и $B\,(5,0)$ (черт. 182). Чтобы построить касательныя къ кривой въ этихъ точкахъ, нужно опредѣлить ихъ наклонъ къ положительному направленію оси абсциссъ, т.-е. вычислить значеніе производной данной функціи при $x = 1$ и $x = 5$. Производная уже найдена (примѣръ 3):

$$y' = 2x - 6 \,.$$



Черт. 182.

Слѣдовательно, обозначая черезъ α_1 и α_2 искомые углы наклона, будемъ имѣть

$$tg\,\alpha_1 = (y')_{x=1} = 2 \cdot 1 - 6 = -4 \,;$$

$$tg\,\alpha_2 = (y')_{x=5} = 2 \cdot 5 - 6 = 4 \,.$$

Уголъ α_1 тупой, ($tg\,\alpha_1 < 0$), а уголъ α_2 острый ($tg\,\alpha_2 > 0$). Чтобы построить касательныя въ точкахъ A и B, нужно только построить надлежащимъ образомъ расположенные прямоугольные треугольники, у каждаго изъ которыхъ одинъ (вертикальный) катетъ въ 4 раза больше другого (горизонтальнаго). Треугольники AA_1A_2 и BB_1B_2 и будутъ такими, а гипотенузы ихъ AA_2 и BB_2 искомыми касательными. $CM = -4$ будутъ minimum омъ данной функціи.

Примѣчаніе. Чтобы болѣе или менѣе правильно вычертить графику данной функціи, кромѣ точекъ $A\,(1,0)$, $M\,(3, -4)$, $B\,(5,0)$, построенныхъ по вычисленнымъ координатамъ, слѣдуетъ построить еще нѣсколько точекъ, вычисливъ предварительно ихъ ординаты, напр. при $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$:

$$(y)_{x=0} = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5 \,, \quad (y)_{x=2} = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3 \,,$$

$$(y)_{x=4} = 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = -3 \,.$$

Примѣръ 5. Прямоугольникъ, имѣющій постоянный периметръ, равный $2a$, но мѣняющіяся стороны, имѣетъ перемѣнную площадь. Каковы должны быть стороны его, чтобы площадь была наибольшей.

Рѣшеніе. Если одна сторона равна x, то другая равна $a - x$, а потому площадь y равна $x\,(a - x)$.

$$y = x\,(a - x)\,, \qquad \text{или} \qquad y = ax - x^2\,. \tag{1}$$

Съ измѣненіемъ x мѣняется и площадь y. Найдемъ производную этой функціи:

$$y + \Delta y = a\,(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2\,,$$

или

$$y + \Delta y = ax - x^2 + (a - 2x)\Delta x - (\Delta x)^2\,. \tag{2}$$

Изъ равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ:

$$\Delta y = (a - 2x)\Delta x - (\Delta x)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a - 2x - \Delta x\,.$$

Слѣдовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a - 2x\,.$$

При томъ значеніи аргумента x, при которомъ площадь y будетъ наибольшей (maximum'омъ), производная должна обратиться въ нуль, что и даетъ намъ возможность найти это значеніе аргумента, т.-е. величину одной, а стало быть и другой стороны прямоугольника, имѣющаго наибольшую площадь:

$$a - 2x = 0\,, \qquad \text{откуда} \qquad x = \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad a - x = \frac{a}{2}.$$

Итакъ, прямоугольникъ долженъ имѣть форму квадрата. Но будетъ ли площадь въ этомъ случаѣ наибольшей? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, слѣдуетъ прослѣдить ходъ измѣненія функціи при возрастаніи аргумента.

При $x < \frac{a}{2}$ производная $y' = a - 2x$ положительна и, слѣдовательно, функція y (т.-е. площадь) возрастаетъ, а при дальнѣйшемъ увеличеніи аргумента, когда x станетъ больше $\frac{a}{2}$, производная становится отрицательной и стало быть функція y убываетъ. Слѣдовательно, при $x = \frac{a}{2}$ функція переходитъ отъ возрастанія къ убыванію, т.-е. достигаетъ дѣйствительно своего maximum'a.

Примѣръ 6. Дана функція $y = \frac{1}{x}$; найти ея производную.

Рѣшеніе. Давая аргументу x нѣкоторое приращеніе Δx, мы тѣмъ самымъ измѣнимъ и функцію, которая получитъ при этомъ нѣкоторое приращеніе Δy.

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}.$$

Слѣдовательно,

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad \Delta y = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

и

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0}\left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right] = -\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x = 0} x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Такимъ образомъ производная данной функціи опредѣлилась:

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

§ 3. **Вторая производная. Различный характеръ изгибовъ кривой линіи.** Производная функція не рѣшаетъ еще вполнѣ вопроса о ходѣ измѣненія начальной функціи, не опредѣляетъ еще характера изгибовъ кривой: возрастаніе и убываніе функціи можетъ быть двоякимъ; кривая, изображающая функцію, въ разсматриваемомъ мѣстѣ можетъ быть обращена или выпуклостью въ положительную сторону оси ординатъ (вверхъ) или выпуклостью въ отрицательную сторону оси ординатъ (внизъ), другими словами, кривая можетъ быть въ разсматриваемомъ мѣстѣ расположена или подъ касательной или надъ касательной.

Такой характеръ изгибовъ кривой, изображающей начальную функцію, зависитъ не отъ величины и не отъ знака производной функціи, а отъ хода ея измѣненія. Ходъ же измѣненія производной функціи въ той мѣрѣ, въ какой это необходимо, можно опредѣлить такъ же, какъ и ходъ измѣненія первоначальной функціи.

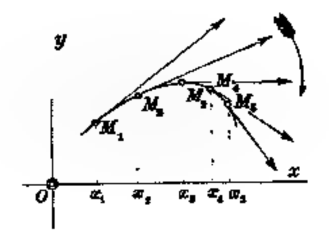
Для этой цѣли нужно найти производную производной функціи, т.-е. найти предѣлъ отношенія приращенія производной функціи $f'(x)$ къ приращенію аргумента Δx:

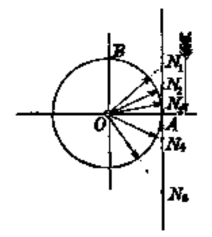
$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = [f'(x)]' = (y')'.$$

Производная производной называется второй производной начальной функц.и и обозначается короче тѣмъ же знакомъ, что и начальная функція съ прибавленіемъ двухъ штриховъ наверху:

$$[f'(x)]' = (y')' = f''(x) = y''.$$

Прослѣдимъ ходъ измѣненія производной функціи $f'(x)$ въ зависимости отъ изгибовъ кривой, геометрически изображающей началь-





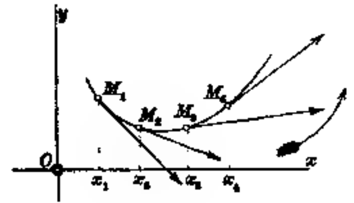
Черт 183

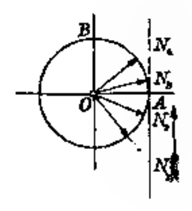
ную функцію. Возьмемъ на кривой рядъ точекъ M_1, M_2, M_3, M_4...., абсциссы которыхъ послѣдовательно больше одна другой:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \ldots$$

и въ каждой точкѣ проведемъ касательныя къ кривой, отмѣтивъ положительное направленіе ихъ въ сторону увеличенія абсциссы.

Если разсматриваемая дуга кривой обращена выпуклостью вверхъ (черт 183), то она лежитъ подъ каждой своей касательной и, когда точка прикосновенія при увеличеніи абсциссы послѣ-





Черт. 184.

довательно занимаетъ положенія M_1, M_2, M_3,.., то касательная проведенная въ положительномъ направленіи, перемѣщаясь вмѣстѣ съ точкою прикосновенія, въ то же время вращается по часовой стрѣлкѣ.

Если же разсматриваемая дуга кривой обращена выпуклостью внизъ (черт. 184), то касательная, перемѣщаясь при увеличеніи абсциссы, вращается противъ часовой стрѣлки.

Проведемъ теперь изъ центра какого-нибудь круга радіуса, равнаго единицѣ, прямыя, параллельныя осямъ координатъ $O'A$ и $O'B$, и радіусы, параллельные касательнымъ кривой въ положительномъ ихъ направленіи. Эти радіусы отмѣтятъ на касательной къ кругу въ точкѣ A отрѣзки $AN_1, AN_2, AN_3, \ldots$, равные тангенсамъ угловъ наклона касательныхъ къ оси абсциссъ (черт. 183 и 184); такимъ образомъ эти отрѣзки представляютъ значенія производной $f'(x)$ при $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$

Если дуга кривой обращена выпуклостью вверхъ, т.-е. въ положительную сторону оси ординатъ, то касательная перемѣщаясь вращается по часовой стрѣлкѣ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и радіусъ круга (O') вращается по часовой стрѣлкѣ и, слѣдовательно, тангенсъ угла наклона касательной къ оси абсциссъ убываетъ (черт. 183):

$$AN_1 > AN_2 > AN_3 > \ldots, \quad \text{или} \quad tg\,\alpha_1 > tg\,\alpha_2 > tg\,\alpha_3 > \ldots;$$

убываетъ, значитъ, и производная функція $f'(x)$:

$$f'(x_1) > f'(x_2) > f'(x_3) > \ldots$$

Если производная функція убываетъ, то ея производная должна имѣть отрицательный знакъ, т.-е. тамъ, гдѣ графика функціи $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверхъ, производная функція $f'(x)$ убываетъ, а потому производная производной или вторая производная $f''(x)$ при этихъ значеніяхъ аргумента отрицательна.

Если дуга кривой обращена выпуклостью внизъ, т.-е. въ отрицательную сторону оси ординатъ, то касательная перемѣщаясь вращается противъ часовой стрѣлки, а вмѣстѣ съ тѣмъ и радіусъ круга (O') вращается противъ часовой стрѣлки и, слѣдовательно, тангенсъ угла наклона касательной къ оси абсциссъ возрастаетъ (черт. 184):

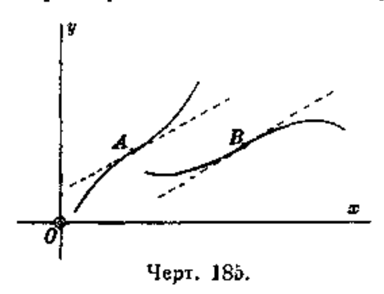
$$AN_1 < AN_2 < AN_3 < \ldots, \quad \text{или} \quad tg\,\alpha_1 < tg\,\alpha_2 < tg\,\alpha_3 < \ldots;$$

возрастаетъ поэтому и производная функція $f'(x)$:

$$f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3) < \ldots$$

А если производная функція $f'(x)$ возрастаетъ, то ея производная, т.-е. производная производной $[f'(x)]'$, иначе вторая производная начальной функціи $f''(x)$ при этихъ значеніяхъ аргумента должна быть положительной.

Если кривая въ какой нибудь точкѣ непрерывно мѣняетъ характеръ изгиба какъ на черт 185 въ точкѣ A или B, то вторая производная $f''(x)$ при x равномъ абсциссѣ такой точки перегиба, оставаясь непрерывной, должна мѣнять свой знакъ, т-е. должна обратиться въ нуль. Первая производная $f'(x)$ и вмѣстѣ съ тѣмъ уголъ наклона касательной къ кривой въ этой точкѣ достигаетъ своего maximum'a или minimum'a, т.-е уголъ наклона касательной переходитъ въ этой точкѣ отъ возрастанія къ убыванію или наоборотъ, отъ убыванія къ возрастанію.



Черт. 185.

Итакъ, для изученія хода измѣненія функціи $y = f(x)$ надо найти первую и вторую производную, т.-е. найти предѣлы

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

и

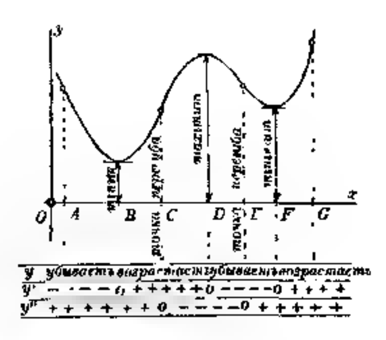
$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x) = y'',$$

если таковые существуютъ. Въ тѣхъ интервалахъ для аргумента, гдѣ $f'(x)$ положительная величина, функція $f(x)$ возрастаетъ, гдѣ $f'(x)$ отрицательная величина, тамъ функція $f(x)$ убываетъ. Степень или скорость убыванія или возрастанія дается величиной первой производной, которая геометрически означаетъ тангенсъ угла наклона касательной къ кривой, изображающей данную функцію, къ оси абсциссъ Характеръ изгиба этой кривой опредѣляется знакомъ второй производной: если $f''(x)$ положительная величина, то кривая обращена выпуклостью внизъ, т.-е въ отрицательную сторону оси ординатъ. Если $f''(x)$ отрицательная величина, то кривая обращена выпуклостью вверхъ, т.-е. въ положительную сторону оси ординатъ. Если вторая производная обращается въ нуль, переходя отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ или наоборотъ, то въ разсматриваемой точкѣ кривая имѣетъ точку перегиба. Если $f''(x)$ лишь достигаетъ нуля, сохраняя до и послѣ свой знакъ, то графика начальной функціи $f(x)$ въ этомъ мѣстѣ не имѣетъ точки перегиба.

Maximum и minimum функціи. Функція имѣетъ maximum или minimum при тѣхъ значеніяхъ аргумента, которыя обра-

щаютъ первую производную $f'(x)$ въ нуль, при чемъ, если при этомъ значеніи аргумента $f''(x)$ положительное число, то функція имѣетъ minimum, а если $f''(x)$ отрицательное число, то функція $f(x)$ имѣетъ maximum.

На черт. 186 представлена графика нѣкоторой функціи. Внизу подъ соотвѣтственными интервалами AB, BC, CD, DE и т. д.



Черт. 186.

отмѣчены знаки первой и второй производной, соотвѣтствующіе ходу измѣненія функціи $f(x)$ въ этихъ интервалахъ.

Примѣръ 1. Опредѣлить изгибъ графики функціи

$$y = x^2 - 6x + 5 .$$

Рѣшеніе. Для опредѣленія характера изгиба нужно найти вторую производную данной функціи. Первая производная уже найдена (стр. 306, прим. 3):

$$y' = 2x - 6 . \qquad (1)$$

Находимъ вторую производную:

$$y' + \Delta y' = 2(x + \Delta x) - 6, \quad \text{или} \quad y' + \Delta y' = 2x - 6 + 2\Delta x . \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ

$$\Delta y' = 2\Delta x \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y'}{\Delta x} = 2 .$$

Слѣдовательно,

$$y'' = \lim \frac{\Delta y'}{\Delta x} = 2 .$$

Такъ какъ вторая производная имѣетъ положительный знакъ и не зависитъ отъ x, то графика данной функціи $y = x^2 - 6x + 5$ вездѣ имѣетъ одинъ и тотъ же изгибъ выпуклостью обращенный внизъ.

Примѣчаніе. На черт. 182 (стр. 307) мы строили графику этой функціи по точкамъ и зная, что при $x = 3$ функція имѣетъ minimum. Но этихъ

данныхъ было все-таки недостаточно, чтобы судить объ изгибѣ кривой между построенными по вычисленнымъ координатамъ точками кривая могла идти волнообразно, даже все время убывая или (послѣ minimum'a) возрастая. Теперь же, когда мы знаемъ знакъ второй производной, эти возможности отпадаютъ и мы составляемъ вполнѣ опредѣленное сужденіе объ изгибѣ кривой

Примѣръ 2. Опредѣлить изгибъ графики функціи

$$y = x^3 + 2 .$$

Рѣшеніе. Находимъ сначала первую производную:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 + 2 ,$$

или

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2 .$$

Слѣдовательно,

$$\Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\, \Delta x + (\Delta x)^2 ;$$

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 .$$

Находимъ теперь вторую производную:

$$y' + \Delta y' = 3 (x + \Delta x)^2 ,$$

или

$$y' + \Delta y' = 3 [x^2 + 2x\, \Delta x + (\Delta x)^2] .$$

Слѣдовательно,

$$\Delta y' = 6x\, \Delta x + 3 (\Delta x)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y'}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x ;$$

$$y'' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = 6x .$$

Черт. 187.

Такимъ образомъ при x отрицательномъ ($x < 0$), вторая производная отрицательна и графика данной функціи $y = x^3 + 2$ имѣетъ изгибъ выпуклостью обращенный вверхъ (черт. 187), а при x положительномъ ($x > 0$) вторая производная положительна и графика обращена выпуклостью внизъ. При $x = 0$ вторая производная обращается въ нуль, непрерывно переходя отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ: въ точкѣ A, абсцисса которой равна нулю, а ордината равна 2 $[(y)_{x=0} = 2]$, кривая имѣетъ перегибъ. Касательная въ точкѣ перегиба параллельна оси абсциссъ, ибо $(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0$. Но первая производная $y' = 3x^2$ при $x \neq 0$ сохраняетъ всегда положительный знакъ и, слѣдовательно, функція все время возрастаетъ и не имѣетъ при $x = 0$ ни maximum'a, ни minimum'a, хотя

$$(y')_{x=0} = 0 .$$

§ 4. **Дифференціалъ и его геометрическое значеніе.** По опредѣленію производная есть предѣлъ отношенія приращенія функціи къ приращенію независимаго перемѣннаго при безграничномъ уменьшеніи этого послѣдняго:

$$y = f(x), \qquad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Изъ опредѣленія предѣла (гл. II, § 2) слѣдуетъ, что отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается отъ своего предѣла $f'(x)$ на величину безконечно малую. Обозначимъ эту безконечно малую черезъ α:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha. \tag{1}$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{2}$$

Если теперь Δx будетъ стремиться къ нулю, то оно будетъ безконечно малой величиной и приращеніе функціи Δy, какъ сумма безконечно малыхъ, также будетъ безконечно малой величиной. Первое слагаемое — величина безконечно малая перваго порядка относительно Δx, а второе, какъ произведеніе двухъ безконечно малыхъ будетъ величиной безконечно малой высшаго порядка (по крайней мѣрѣ, выше перваго порядка) (гл. II, § 5). Первое слагаемое, т.-е. $f'(x)\,\Delta x$ составляетъ главную часть безконечно малаго приращенія функціи Δy.

Главная часть безконечно малаго приращенія функціи называется дифференціаломъ *) этой функціи и обозначается черезъ dy:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{3}$$

Безконечно малое приращеніе независимаго перемѣннаго Δx, состоя

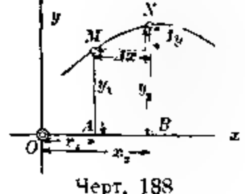
*) Приращеніе аргумента Δx можно представить въ видѣ разности двухъ значеній x (Черт. 188.):

$$AB = \Delta x = x_2 - x_1;$$

точно также

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

Разность по-латыни differentia. Отсюда и названіе для главной части приращенія „дифференціалъ".



Черт. 188

изъ одной части, есть въ то же время и его дифференціалъ Дѣйствительно, если $f(x)=x$, то $f'(x)=1$ и потому изъ равенства (3) слѣдуетъ, что дифференціалъ и приращеніе независимаго перемѣннаго равны между собой

$$dx = \Delta x\,. \tag{4}$$

Разница между этими понятіями только въ томъ, что подъ Δx можно разумѣть и конечное, опредѣленное приращеніе аргумента и безконечно малое, т е. стремящееся къ нулю, подъ dx разумѣется только безконечно малое приращеніе, т.-е. стремящееся къ нулю. Въ равенствѣ (4) на Δx можно смотрѣть только какъ на стремящееся къ нулю, какъ на существенно перемѣнное число.

Такимъ образомъ **дифференціалъ функціи равенъ произведенію производной функціи на дифференціалъ независимаго перемѣннаго:**

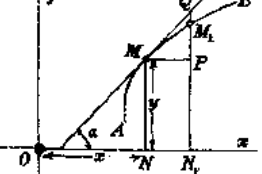
$$dy = f'(x)\,.\,dx\,.$$

Изъ этого равенства вытекаетъ и геометрическое значеніе дифференціала функціи.

Пусть AB (черт. 189) кривая, изображающая данную функцію

$$y = f(x)\,,$$

MQ, касательная къ этой кривой въ точкѣ $M(x, y)$, наклонена къ оси абсциссъ подъ угломъ α. Тангенсъ этого угла, какъ мы знаемъ, равенъ значенію производной $f'(x)$ для разсматриваемой точки M:



Черт. 189.

$$tg\,\alpha = f'(x)\,.$$

Возьмемъ теперь на кривой AB точку M_1 съ координатами

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y$$

и проведемъ изъ точки M до пересѣченія съ ординатой точки M_1 прямую, параллельную оси абсциссъ. Какъ видно изъ чертежа,

$$NN_1 = MP = \Delta x\,; \quad PM_1 = \Delta y\,. \quad \widehat{PMQ} = \alpha\,.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника MPQ имѣемъ

$$PQ = MP \, . \, tg\,\alpha\,, \quad \text{или} \quad PQ = f'(x)\,\Delta x\,.$$

Но $f'(x)\,\Delta x = dy$; слѣдовательно,

$$PQ = dy\,.$$

Подъ PQ нужно разумѣть отрѣзокъ, мѣняющійся при Δx стремящемся къ нулю.

Такимъ образомъ дифференціалъ функціи въ каждый моментъ своего измѣненія выражаетъ приращеніе ординаты касательной къ кривой въ разсматриваемой точкѣ (а *не приращеніе ординаты кривой!*).

Нахожденіе дифференціала функціи и нахожденіе производной операціи равносильныя: если найдена уже производная, то, умножая ее на дифференціалъ аргумента dx, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ и дифференціалъ функціи; обратно - если изъ приращенія функціи выдѣлилась главная его часть, т.-е. дифференціалъ функціи, то, дѣля эту главную часть на Δx, мы найдемъ и производную. Поэтому операція нахожденія производной и называется дифференцированіемъ, а вся теорія, обнимающая свойства производныхъ, способы ихъ нахожденія и ихъ приложенія—дифференціальнымъ исчисленіемъ.

§ 5 **Производная степени и постояннаго.** Найдемъ производную степени:

$$y = x^n \tag{1}$$

при цѣломъ и положительномъ показателѣ n.

Пусть Δx нѣкоторое приращеніе аргумента x и Δy соотвѣтствующее приращеніе функціи:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n\,.$$

Разлагая вторую часть по биному Ньютона, будемъ имѣть

$$y + \Delta y = x^n + n x^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\,. \tag{2}$$

Изъ равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ

$$\Delta y = n x^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\,.$$

Такимъ образомъ при безконечно маломъ Δx и Δy будетъ безконечно малымъ *), такъ и должно быть, ибо степень $y = x^n$ непрерывная функція (стр. 275). Для нахожденія производной дѣлимъ обѣ части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Пусть теперь Δx стремится къ нулю, отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ величиной перемѣнной во время этого перехода къ предѣлу, состоящей изъ постоянной (т.-е. не зависящей отъ Δx) части $n x^{n-1}$ и перемѣнной безконечно малой

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1},$$

которая въ предѣлѣ стремится къ нулю. Слѣдовательно,

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1}, \quad \text{или} \quad y' = n x^{n-1}. \qquad (3)$$

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующее предложеніе:

1. Производная степени (x^n) равняется показателю этой степени, умноженному на степень аргумента съ показателемъ на единицу меньшимъ.

Примѣры.

1. $y = x^3$, $y' = 3x^2$. 2. $y = x^5$; $y' = 5x^4$.

3. $y = x^2$; $y' = 2x$. 4. $y = x$, или $y = x^1$, $y' = 1 . x^0 = 1$.

Истолковать геометрически результатъ 4-го примѣра.

Разсмотримъ теперь функцію, которая сохраняетъ постоянное значеніе при измѣненіяхъ аргумента въ какомъ-нибудь интервалѣ, напримѣръ $a < x < b$, или при неограниченныхъ измѣненіяхъ. Если функція сохраняетъ постоянное значеніе при **всѣхъ** значеніяхъ аргумента, мы имѣемъ обыкновенное постоянное число, разсматриваемое какъ функція лишь въ обобщенномъ смыслѣ. Въ самомъ дѣлѣ, какое-нибудь выраженіе можетъ содержать независимое перемѣнное и, слѣдовательно, быть разсматриваемо какъ функція этого

---

*) Сумма конечнаго числа безконечно малыхъ слагаемыхъ — величина безконечно малая (стр. 247).

перемѣннаго, а между тѣмъ послѣ приведенія или сокращеній или какихъ-либо тождественныхъ преобразованій оно можетъ свестись къ постоянной величинѣ. Напр.,

$$1.\quad y = C\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}\quad \text{или}\quad y = C,\qquad 2.\quad y = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2},\quad \text{или}\quad y = \frac{1}{2}.$$

Итакъ, пусть $y = f(x)$ такая функція, которая сохраняетъ постоянную величину, напр., C при всѣхъ значеніяхъ аргумента.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0\,.$$

Слѣдовательно, всегда, а стало быть и въ предѣлѣ, отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно нулю

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Такимъ образомъ имѣемъ второе предложеніе

2. Производная функціи, сохраняющей постоянную величину, или просто—производная постояннаго равна нулю.

Если функція сохраняетъ постоянную величину лишь въ интервалѣ (a, b), то предложеніе имѣетъ силу только для измѣненія аргумента въ этомъ интервалѣ.

§ 6. **Общія правила дифференцированія функцій.** Въ этомъ параграфѣ мы разсмотримъ предложенія, устанавливающія способы дифференцированія функцій, составленныхъ прежде всего помощью раціональныхъ операцій изъ другихъ. Эти способы дадутъ, напримѣръ, возможность свести нахожденіе производной любой раціональной функціи къ нахожденію производной отъ степени (x^n) или отъ постояннаго.

I. Постоянный множитель функціи входитъ множителемъ и въ производную этой функціи.

Пусть $y = a f(x)$, гдѣ a — постоянный множитель. Требуется доказать, что $y' = a f'(x)$.

Доказ. Дадимъ аргументу x нѣкоторое приращеніе Δx. Функція y получитъ нѣкоторое соотвѣтственное приращеніе Δy

$$y + \Delta y = a f(x + \Delta x),\qquad \text{а}\quad y = a f(x),$$

слѣдовательно,

$$\Delta y = a f(x + \Delta x) - a f(x)$$

Выносся a за скобки, получимъ

$$\Delta y = a\,[f(x+\Delta x) - f(x)]\,.$$

Дѣлимъ обѣ части этого равенства на Δx и переходимъ къ предѣлу въ предположеніи, что Δx стремится къ нулю:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} a\,\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim a \,.\, \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Но a — постоянное число и $\lim a = a$, а на основаніи опредѣленія производной имѣемъ:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)\,.$$

Слѣдовательно,

$$y' = a\,.\,f'(x)\,.$$

Примѣры:

1. $y = 3x^2$; $\quad y' = 3\,.\,2x = 6x$.

2. $y = 5x$, $\quad y' = 5$.

3. $y = 6x^{10}$; $\quad y' = 6\,.\,10\,x^9 = 60x^9$.

4. $y = \frac{x^3}{4}$; $\quad y' = \frac{1}{4}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{4}$.

II. Производная алгебраической суммы нѣсколькихъ функцій равна такой же суммѣ производныхъ этихъ функцій.

Пусть

$$y = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\,, \quad \text{или} \quad y = u + v - w\,,$$

гдѣ

$$u = f_1(x)\,, \quad v = f_2(x)\,, \quad w = f_3(x)\,.$$

Требуется доказать, что

$$y' = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x)\,, \quad \text{или} \quad y' = u' + v' - w'\,.$$

Доказ. Давая аргументу x нѣкоторое приращеніе Δx, мы тѣмъ самымъ измѣнимъ и функціи u, v и w, а вмѣстѣ съ тѣмъ и данную функцію y. Пусть Δu, Δv, Δw и Δy соотвѣтствующія приращенія этихъ функцій:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)\,.$$

Но

$$y = u + v - w\,;$$

слѣдовательно,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w .$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на Δx, переходимъ къ предѣлу, предполагая, что Δx стремится къ нулю

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right).$$

На основаніи теоремы о предѣлахъ предѣлъ суммы равенъ суммѣ предѣловъ, находимъ

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

а по опредѣленію производной будемъ имѣть

$$y' = u' + v' - w' \quad \text{или} \quad y' = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x) .$$

Примѣры.

5. $y = x^3 - 2x + 5$; $\quad y' = 3x^2 - 2$.

6. $y = 2x^5 + 6x^3 - 7x + 3$; $\quad y' = 10x^4 + 18x^2 - 7$.

7. $y = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + 1$; $\quad y' = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$.

III. Производная произведенія двухъ функцій равна суммѣ произведеній каждой изъ этихъ функцій на производную другой.

Пусть $y = u \cdot v$, гдѣ u и v суть функціи x:

$$u = f_1(x), \qquad v = f_2(x) .$$

Требуется доказать, что $y' = uv' + vu'$.

Доказ. Дадимъ аргументу нѣкоторое приращеніе Δx. Функціи u, v и y измѣнятся при этомъ, получивъ каждая свое приращеніе и сохраняя данное соотношеніе:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

или

$$y + \Delta y = uv + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v ,$$

но

$$y = uv ,$$

слѣдовательно,

$$\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v .$$

Изъ послѣдняго равенства между прочимъ вытекаетъ, что, если u и v — функціи непрерывныя, то и произведеніе ихъ $y = u\ v$ образуетъ также непрерывную функцію, ибо если Δx безконечно малая величина, то въ силу непрерывности функцій u и v, Δu, Δv безконечно малыя величины, а слѣдовательно (стр. 247), и Δy безконечно малая величина.

Дѣля обѣ части послѣдняго равенства на Δx и переходя къ предѣлу, находимъ

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \left[u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} \right]$$

Функціи u и v не зависятъ отъ Δx и потому при переходѣ къ предѣлу, когда Δx стремится къ нулю, сохраняютъ постоянную величину. Отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}$ по опредѣленію въ предѣлѣ даютъ производныя функціи y', u', v'.

Послѣднее слагаемое $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$ содержитъ безконечно малый множитель Δu и потому стремится къ нулю, какъ своему предѣлу. Слѣдовательно, примѣняя къ послѣднему равенству теоремы о предѣлѣ суммы и произведенія, получимъ

$$y' = uv' + vu'.$$

Примѣръ 8

$$y = x^2 . (x^3 - 2x + 1),$$

$$y' = x^2 . (3x^2 - 2) + (x^3 - 2x + 1)\ 2x = 5x^4 - 6x^2 + 2x.$$

Тотъ же результатъ можно было бы получить, предварительно выполнивъ указанное въ выраженіи функціи умноженіе

Предложеніе III можно обобщить на сколько угодно множителей. Пусть, напр., $y = uvw$. Будемъ разсматривать uv какъ одну функцію. Тогда y можно дифференцировать какъ произведеніе двухъ функцій:

$$y = (uv)\ w \quad \text{и} \quad y' = (uv)\ w' + w\ (uv)'$$

Но по тому же предложенію

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Слѣдовательно,

$$y' = (uv)\ w' + w\ (uv' + vu') \quad \text{или} \quad y' = vw\ .\ u' + uw\ .\ v' + uv\ .\ w'.$$

IV. Производная частнаго двухъ функцій равна дроби, у которой знаменатель равенъ квадрату дѣлителя, а числитель равняется дѣлителю, умноженному на производную дѣлимаго, безъ произведенія дѣлимаго на производную дѣлителя.

Пусть $y=\frac{u}{v}$, гдѣ u и v нѣкоторыя функціи x: $u=f_1(x)$, $v=f_2(x)$. Требуется доказать, что

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Доказ. Послѣ прибавленія къ аргументу x нѣкотораго приращенія, измѣненныя значенія функцій y, u и v сохраняютъ данное между ними соотношеніе

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}.$$

Опредѣляемъ Δy:

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}, \quad \text{или} \quad \Delta y=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}.$$

Находимъ теперь отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}.$$

Переходя къ предѣлу въ предположеніи, что Δx стремится къ нулю, будемъ имѣть

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}=\frac{v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim(v+\Delta v)v}$$

и слѣдовательно,

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Примѣры. 1) $y=\frac{x-1}{x^2+3}$; $y'=\frac{(x^2+3)(x-1)'-(x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$,

$$y'=\frac{(x^2+3)\cdot 1-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

2) $y=\frac{x}{x^3+2x+1}$; $y'=\frac{(x^3+2x+1)\cdot 1-x(3x^2+2)}{(x^3+2x+1)^2}=\frac{-2x^3+1}{(x^3+2x+1)^2}$.

3) $y=\frac{1}{x}$; $y'=\frac{x\cdot 0-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$ (стр. 309 пр. 6).

12. $y = \frac{2}{x^3}$; $y' = \frac{x^3 . 0 - 2 . 3x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$.

13. $y = \frac{x^3}{2}$ или $y = \frac{1}{2}x^3$; $y' = \frac{1}{2} . 3x^2 = \frac{3}{2}x^2$.

На основанiи тѣхъ общихъ правилъ дифференцированiя, которыя выведены въ этомъ параграфѣ, дифференцированiе **раціональныхъ** функцій, какъ видно изъ приведенныхъ примѣровъ, сводится къ дифференцированiю степени (x^n) и постояннаго

Дифференцированiе другихъ элементарныхъ функцій и вообще техника дифференцированiя составитъ содержанiе одной изъ слѣдующихъ главъ. Тѣхъ правилъ дифференцированiя, какими мы располагаемъ сейчасъ, достаточно, чтобы имѣть возможность иллюстрировать то или другое положенiе развиваемой теорiи.

§ 7. Обозначенiе производныхъ, введенное Лейбницемъ Въ § 4 дифференцiалъ функцiи мы опредѣлили какъ произведенiе производной функцiи на дифференцiалъ независимаго перемѣннаго:

$$y = f(x); \quad y' = f'(x); \quad dy = f'(x)\,dx .$$

Дифференцiалъ аргумента dx не претерпѣваетъ измѣненiя отъ перехода отъ одной точки кривой къ другой, онъ все время находится въ нашемъ распоряженiи *) и **не зависитъ** отъ измѣненiя аргумента: dx *относительно* x *постоянная величина*. Дифференцiалъ же функцiи, какъ видно изъ его выраженiя:

$$dy = f'(x)\,dx \tag{1}$$

зависитъ отъ аргумента x, такъ какъ содержитъ множителемъ $f'(x)$—функцiю x: при переходѣ отъ одной точки кривой къ другой dy мѣняется не только вмѣстѣ съ дифференцiаломъ аргумента, но и вмѣстѣ съ самимъ аргументомъ: dy есть функцiя x и можно говорить о производной этой функцiи и дифференцiалѣ ея. При дифференцированiи этой функцiи $dy = f'(x) . dx$, на dx, согласно съ вышесказаннымъ, должно смотрѣть какъ на **постоянное**:

$$(dy)' = [f'(x) . dx]' = f''(x)\,dx;$$

$$d(dy) = (dy)' . dx = f''(x)\,dx . dx .$$

*) dx безконечно малое число и **можетъ быть** сдѣлано по абсолютной величинѣ менѣе **любого** напередъ заданнаго положительнаго числа и оставаться далѣе таковымъ.

Дифференціалъ дифференціала $d(dy)$, который можно обозначить и черезъ ddy или короче d^2y, называется вторымъ дифференціаломъ. Произведеніе дифференціаловъ $dx \, . \, dx$ короче пишется такъ: dx^2 *). Такимъ образомъ имѣемъ

$$d^2y - f''(x) \, . \, dx^2 \, . \tag{2}$$

Второй дифференціалъ функціи равенъ произведенію второй производной на квадратъ дифференціала аргумента Изъ равенствъ (1), (2) и вытекаетъ обозначеніе Лейбница для производныхъ:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x); \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \, .$$

$\frac{dy}{dx}$ читается: dy по dx, $\frac{d^2y}{dx^2}$ читается: d второе y по d иксъ квадратъ.

Производная второй производной называется третьей производной, производная третьей называется четвертой производной и т. д. Какое значеніе имѣютъ эти высшія производныя, объ этомъ рѣчь впереди. Обозначенія ихъ по такимъ же основаніямъ совершенно аналогичны обозначеніямъ первой и второй производной:

$$[f''(x)]' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}; \quad [f'''(x)]' = f^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}; \; \ldots \; f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \, .$$

Если дифференціалъ функціи dy найденъ до нахожденія производной, то на выраженіе $\frac{dy}{dx}$ можно смотрѣть какъ на частное (называется иногда — дифференціальное частное, дифференціальный коэффиціентъ), ибо dy содержитъ по самому опредѣленію множителемъ dx или Δx и выраженіе dy можно раздѣлить на Δx или dx еще до перехода къ предѣлу, до того момента, когда dx обращается въ нуль и когда, стало быть, дѣленіе не имѣетъ ариеметическаго смысла Вообще же на $\frac{dy}{dx}$ нужно смотрѣть какъ на символъ операціи, равносильной операціи $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

*) dx^2 означаетъ то же, что и $(dx)^2$, но не $d(x^2)$

§ 8. **Примѣръ изученія хода измѣненія функціи и построенія графики ея.** Дана функція

$$y = 0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 1{,}5x\,. \tag{1}$$

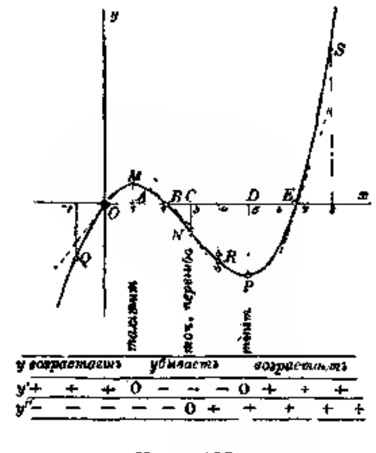
Требуется прослѣдить ходъ ея измѣненія и построить графику этой функціи.

Найдемъ сначала первую и вторую производныя этой функціи:

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}3x^2 - 1{,}8x + 1{,}5\,. \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0{,}6x - 1{,}8\,. \tag{3}$$

Точки пересѣченія съ осью абсциссъ. Данная функція (1) обращается въ нуль при $x = 0$. Вынося въ ея выраженіи $0{,}1x$ за скобки, получимъ:



Черт. 190.

$$y = 0{,}1x\,(x^2 - 9x + 15)\,.$$

Функція y обращается въ нуль еще при тѣхъ значеніяхъ аргумента, которыя обращаютъ въ нуль трехчленъ $x^2 - 9x + 15$. Но корни этого трехчлена будутъ

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{21}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{2}\,.$$

или, съ точностью до 0,1, $x_1 \sim 2{,}2$ и $x_2 \sim 6{,}8$. Слѣдовательно, кривая, изображающая эту функцію, проходитъ черезъ начало координатъ и пересѣкаетъ ось абсциссъ еще въ точкахъ $B(2{,}2;\ 0)$ и $E(6{,}8;\ 0)$ (черт. 180).

Данную функцію можно представить въ видѣ произведенія:

$$y = 0{,}1x\,.\left[x - \frac{9 - \sqrt{21}}{2}\right]\left[x - \frac{9 + \sqrt{21}}{2}\right],$$

или

$$y \sim 0{,}1x\,(x - 2{,}2)\,(x - 6{,}8)\,.$$

Изъ этого ея выраженія видно, что функція имѣетъ отрицательныя значенія въ интервалѣ $(-\infty, 0)$, т.-е. при $-\infty < x < 0$, положительныя въ интервалѣ $(0, B)$: $0 < x < 2{,}2$, снова отрицательныя въ интервалѣ $(B\,E)$: $2{,}2 < x < 6{,}8$ и наконецъ опять положительныя въ интервалѣ $(E, +\infty)$: $6{,}8 < x < +\infty$.

Точка перегиба. Вторая производная

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0{,}6x - 1{,}8 = 0{,}6\,(x-3)$$

одинъ разъ обращается въ нуль, именно при $x = 3$. При $x < 3$ вторая производная отрицательна; а при $x > 3$ положительна. Слѣдовательно, въ интервалѣ отъ $-\infty$ до $C\,(3, 0)$ кривая, изображающая начальную функцію, обращена выпуклостью въ положительную сторону оси ординатъ (вверхъ), а въ интервалѣ отъ C до $+\infty$ кривая обращена выпуклостью въ отрицательную сторону оси ординатъ (внизъ) При $x = 3$ кривая имѣетъ точку перегиба N Ордината этой точки $CN = (y)_{x=3}$:

$$(y)_{x=3} = 0{,}1\,.\,3\,.\,(3^2 - 9\,.\,3 + 15) = -0{,}9\,.$$

Maximum и minimum функціи. Первая производная

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}3x^2 - 1{,}8x + 1{,}5\,, \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = 0{,}3\,(x-1)\,(x-5)$$

два раза обращается въ нуль: при $x = 1$ и $x = 5$. При $x < 1$ производная, какъ произведеніе положительнаго и двухъ отрицательныхъ множителей, положительная величина и, слѣдовательно, начальная функція въ интервалѣ отъ $-\infty$ до $A\,(1, 0)$ возрастаетъ. При x большемъ 1, но меньшемъ 5, т.-е. при

$$1 < x < 5\,,$$

y', какъ произведеніе двухъ положительныхъ и одного отрицательнаго множителей, отрицательная величина и, слѣдовательно, въ интервалѣ отъ $A\,(1, 0)$ до $D\,(5, 0)$ начальная функція убываетъ. При $x > 5$, y', какъ произведеніе положительныхъ множителей, положительная величина и, слѣдовательно, начальная функція въ интервалѣ отъ D до $+\infty$ снова возрастаетъ. При $x = 1$ и при $x = 5$ первая производная обращается въ нуль и, слѣдовательно, начальная функція имѣетъ или maximum или minimum.

При $x=1$ начальная функція переходитъ отъ возрастанія къ убыванію (вторая производная отрицательна), т.-е. имѣетъ здѣсь свой maximum, а при x равномъ 5 переходитъ отъ убыванія къ возрастанію (вторая производная положительна), т.-е имѣетъ здѣсь свой minimum. Чтобы опредѣлить величину maximum'a и minimum'a, нужно вычислить значенія функціи при этихъ значеніяхъ аргумента. $AM=(y)_{x=1}$; $DP=(y)_{x=5}$.

$$(y)_{x=1}=0{,}1\,.\,1\,.\,(1-9+15)=0{,}7\,;\qquad (y)_{x=5}=0{,}1\,.\,5\,(5^2-9\,.\,5+15)=-2{,}5\,.$$

Построеніе касательныхъ въ точкахъ пересѣченія съ осью абсциссъ и въ точкѣ перегиба. Тангенсъ угла наклона касательной къ оси абсциссъ опредѣляется значеніемъ производной при соотвѣтствующемъ значеніи аргумента. Обозначимъ искомые углы наклона въ точкахъ O, B, C и E соотвѣтственно черезъ α_1, α_2, α_3 и α_4. Въ такомъ случаѣ

$$tg\,\alpha_1=(y')_{x=0},\qquad tg\,\alpha_2\sim(y')_{x=2,2},\qquad tg\,\alpha_3=(y')_{x=3},\qquad tg\,\alpha_4\sim(y')_{x=6,8}$$

$$(y')_{x=0}=0{,}3\,(x^2-6x+5)_{x=0}=1{,}5\,;\qquad (y')_{x=3}=0{,}3\,(3^2-6\,.\,3+5)=-1{,}2\,;$$

$$(y')_{x=2,2}\sim0{,}3\,(2{,}2^2-6\,.\,2{,}2+5)\sim-1\,;\qquad (y')_{x=6,8}\sim0{,}3\,(6{,}8^2-6\,.\,6{,}8+5)\sim3\,.$$

Примѣчаніе. Слѣдуетъ обратить вниманіе на вычисленіе приближенныхъ значеній $(y')_{x=2,2}$ и $(y')_{x=6,8}$. 2,2 и 6,8 суть приближенныя значенія корней квадратнаго трехчлена: $x^2-9x+15$ — первый съ недостаткомъ, а второй съ избыткомъ. Если истинное значеніе перваго корня $x_1=2{,}2+\alpha$, гдѣ $\alpha<0{,}1$, то истинное значеніе второго должно быть $x_2=6{,}8-\alpha$, ибо $(2{,}2+\alpha)+(6{,}8-\alpha)=9$, т.-е. коэффиціенту съ обратнымъ знакомъ при первой степени x въ трехчленѣ. Такимъ образомъ при точномъ вычисленіи должны имѣть.

$$(y')_{x=x_1}=0{,}3[(2{,}2+\alpha)^2-6\,(2{,}2+\alpha)+5]=$$

$$=0{,}3\,(4{,}84+4{,}4\,\alpha+\alpha^2-13{,}2-6\alpha+5]\,,$$

или

$$(y')_{x=x_1}=0{,}3\,[-3{,}36-1{,}6\,\alpha+\alpha^2]=-[1{,}008+0{,}48\,\alpha-0{,}3\,\alpha^2]$$

Но $0{,}48\alpha<0{,}048$, а $\alpha^2<0{,}01$, и потому $(y')_{x=2,2}\sim-1$ (съ недостаткомъ) отличается отъ истиннаго значенія лишь въ сотыхъ доляхъ. Точно также найдемъ, что

$$(y')_{x=x_2}=3{,}132-1{,}6\,\alpha+\alpha^2,\qquad\text{или}\qquad (y')_{x=x_2}=3-[1{,}6\alpha-(0{,}132+\alpha^2)]\,.$$

Но

$$1{,}6\,\alpha < 0{,}16$$

$$0{,}132 + \alpha^2 > 0{,}132\,,$$

откуда

$$0{,}16\,\alpha - (0{,}132 + \alpha^2) < 0{,}028\,.$$

Слѣдовательно, $\underset{x=6{,}8}{(y')} \sim 3$ больше истиннаго, но отличается отъ него лишь въ сотыхъ доляхъ.

Такимъ образомъ по найденнымъ тангенсамъ

$$tg\,\alpha_1 \quad 1{,}5\,, \qquad tg\,\alpha_2 \sim -1\,, \qquad tg\,\alpha_3 = \quad 1{,}2 \qquad \text{и} \qquad tg\,\alpha_4 \sim 3$$

можно построить и касательныя въ точкахъ O, B, N и E (черт. 190).

Вычислимъ еще ординаты нѣкоторыхъ точекъ кривой, чтобы точнѣе опредѣлить положеніе ея. Хотя характеръ изгибовъ кривой вездѣ опредѣленъ, но этимъ еще не опредѣлено положеніе каждой точки кривой: чѣмъ больше точекъ кривой опредѣлено вычисленіемъ ихъ координатъ, тѣмъ точнѣе будетъ опредѣлено и положеніе кривой Однако отсюда не слѣдуетъ, что можно ограничиться знаніемъ положенія большого числа точекъ кривой и пренебречь опредѣленіемъ характера изгибовъ кривой, ибо между двумя построенными точками кривой, хотя бы очень близкими, кривая можетъ имѣть *очень разнообразныя колебанія* и лишь опредѣливъ изгибы ея между этими точками, можно ограничить значительно это разнообразіе возможнаго хода этой кривой.

Вычислимъ ординаты при $x = -1;\ 4;\ 8$:

$$\underset{x=-1}{(y)} = 0{,}1\,.\,(\quad 1)^3 - 0{,}9\,.\,(-1)^2 + 1{,}5\,.\,(-1) = \quad 2{,}5\,,$$

$$\underset{x=4}{(y)} = 0{,}1\,.\,4^3 - 0{,}9\,.\,4^2 + 1{,}5\,.\,4 - \quad 2\,;$$

$$\underset{x=8}{(y)} = 0{,}1\,.\,8^3 - 0{,}9\,.\,8^2 + 1{,}5\,.\,8 \quad 5{,}6\,.$$

Такимъ образомъ можемъ еще построить точки

$$Q(-1\,,\quad 2{,}5)\,, \qquad R(4, -2)\,, \qquad S(8\,;\,5{,}6)$$

Вычертивъ кривую, которая проходила бы черезъ точки Q, O, M, B, N, R, P, E и S, касалась бы построенныхъ касательныхъ въ точкахъ O, B, N, E и имѣла бы опредѣленные изгибы, мы и получимъ графику данной функціи

§ 9. **Механическое и физическое значеніе производныхъ функцій.** Въ предыдущихъ параграфахъ было выяснено геометрическое значеніе первой и второй производной данной функціи первая производная своимъ знакомъ указываетъ на возрастаніе или убываніе функціи, а величиной оцѣниваетъ быстроту этого возрастанія или убыванія, опредѣляетъ направленіе касательной въ каждой точкѣ кривой, изображающей данную функцію, а вторая производная своимъ знакомъ опредѣляетъ характеръ изгиба этой кривой

Если двѣ величины, находящіяся въ функціональной зависимости, имѣютъ механическое или физическое значеніе, то производная будетъ представлять величину особаго рода, имѣющую также механическое или физическое значеніе

Скорость и ускореніе движенія. Пусть s—разстояніе движущейся по нѣкоторой линіи точки M къ моменту времени t отъ нѣкоторой начальной точки 0; s является нѣкоторой функціей времени t:

$$s = f(t) .$$

Если бы движеніе было равномѣрнымъ, то путь, пройденный за единицу времени, представлялъ бы скорость этого движенія. Пусть приращенію времени Δt соотвѣтствуетъ приращеніе пути Δs. Отношеніе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ и выражало бы скорость этого равномѣрнаго движенія. Δt и Δs при равномѣрномъ движеніи измѣняются пропорціонально, сохраняя постоянное отношеніе.

Если бы движеніе было неравномѣрнымъ, то отношеніе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ не было бы постояннымъ для различныхъ значеній Δt Для даннаго значенія Δt отношеніе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ представляетъ среднюю скорость. Если бы нѣкоторая новая точка двигалась съ этою среднею постоянной скоростью, то за промежутокъ времени Δt она прошла бы тотъ же путь Δs, какъ и данная движущаяся точка и эти двѣ точки,

Черт. 191

выходя одновременно изъ положенія M (черт. 191), пришли бы одновременно и въ положеніе M_1, разойдясь въ промежуточные моменты. Чѣмъ меньше Δt, тѣмъ незначительнѣе это расхожденіе истиннаго движенія со среднимъ, и когда Δt стремится къ нулю, отношеніе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ стремится къ нѣкоторому значенію v, которое и будетъ выражать истинную скорость движущейся точки въ моментъ

времени t:

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Но

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

а

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

есть производная функція $f(t)$ по времени t. Слѣдовательно,

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) = s' = \frac{ds}{dt}.$$

Такимъ образомъ для опредѣленія скорости движенія надо найти производную функціи, выражающей законъ этого движенія.

При неравномѣрномъ движеніи скорость не постоянна, а мѣняется въ зависимости отъ времени t. Если v есть скорость движущейся точки въ моментъ времени t, то ко времени $t + \Delta t$ скорость измѣнится, получивъ нѣкоторое положительное или отрицательное приращеніе Δv. Если приращеніе скорости пропорціонально приращенію времени Δt, то движеніе называется равномѣрно-ускореннымъ или равномѣрно-замедленнымъ (при Δv отрицательномъ) и отношеніе $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, оцѣнивающее приращеніе скорости за единицу времени, постоянно и называется ускореніемъ этого движенія. Если движеніе неравномѣрно-ускоренное или замедленное, то отношеніе $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ даетъ среднее ускореніе за промежутокъ времени Δt, а въ предѣлѣ, когда Δt будетъ безконечно малымъ, даетъ истинное ускореніе движущейся точки въ моментъ времени t. Но $\lim\limits_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ есть вторая производная данной функціи $f(t)$:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t) = s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Такимъ образомъ, если данъ законъ движенія $s = f(t)$, то первая производная s' этой функціи опредѣляетъ величину скорости а вторая производная s'' — величину ускоренія движущейся точки въ моментъ времени t.

Примѣръ. Законъ движенія свободно педающаго тѣла выражается функціей

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Для опредѣленія скорости въ моментъ времени t надо найти первую производную этой функціи:

$$s' = \frac{g}{2} \cdot 2t \qquad \text{или} \qquad s' = gt.$$

Для опредѣленія ускоренія надо найти вторую производную:

$$s'' = g.$$

Такъ какъ ускореніе оказалось постояннымъ, то разсматриваемое движеніе равномѣрно ускоренное

Скорость химической реакціи. Если x—количество вещества, подвергшееся за время t измѣненію въ какой-либо химической реакціи, то x является функціей времени t:

$$x = f(t);$$

а производная этой функціи $x' = f'(t)$ даетъ скорость химической реакціи.

Теплоемкость тѣлъ Если Q—количество тепла, притекающее къ тѣлу и идущее на повышеніе его температуры t, то Q является функціей температуры t:

$$Q = f(t):$$

а производная этой функціи по t даетъ теплоемкость c даннаго тѣла:

$$c = f'(t) = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

Температурные коэффиціенты. Если какая-либо физическая величина z зависитъ только отъ температуры, то она является функціей температуры t:

$$z = f(t).$$

При повышеніи температуры на Δt величина z измѣняется, положимъ, на Δz. Если это измѣненіе идетъ равномѣрно съ измѣненіемъ

температуры, то отношеніе $\frac{1}{z_0}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}$, гдѣ z_0 — значеніе z при температурѣ, равной 0^0, называется температурнымъ коэффиціентомъ величины z. Если $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ не постоянно, то температурнымъ коэффиціентомъ будетъ предѣлъ отношенія $\frac{1}{z_0}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}$ при $\Delta t = 0$, т. е.

$$\frac{1}{z_0}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{z'}{z_0} = \frac{1}{z_0}\cdot f'(t).$$

Такимъ образомъ нахожденіе какого-либо температурнаго коэффиціента сводится къ нахожденію производной.

Къ числу температурныхъ коэффиціентовъ относится, напримѣръ, линейный коэффиціентъ расширенія. Если l — длина стержня при температурѣ t, то $l = f(t)$ и коэффиціентъ его расширенія будетъ

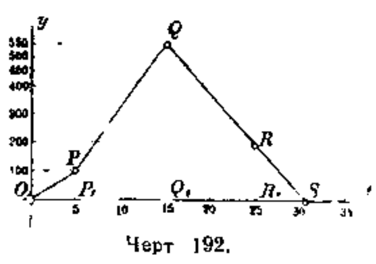
$$\frac{1}{l_0}\cdot\frac{dl}{dt} = \frac{1}{l_0}\cdot f'(t) = \frac{l'}{l_0}.$$

При $l_0 = 1$, т. е. если длина стержня при 0^0 равна единицѣ его коэффиціентъ расширенія равенъ $l' = f'(t)$.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Въ бассейнъ проведены 3 крана A, B и C. Черезъ кранъ A вливается 20 литровъ въ 1 минуту, черезъ кранъ B 25 литровъ, а черезъ кранъ C выливается 80 литровъ въ минуту. Кранъ B открывается черезъ 5 минутъ послѣ A, а C черезъ 10 минутъ послѣ B. Представить графически количество воды въ бассейнѣ, какъ функцію времени.

Рѣшеніе. Пусть по оси абсциссъ Ot откладывается время t, а по оси ординатъ Oy количество воды въ бассейнѣ въ соотвѣтствующій моментъ времени. Единицы мѣры на той и другой оси, какъ единицы разнородныя, можно выбрать совершенно произвольно и независимо одна отъ другой (черт. 192).



Черт 192.

Черезъ 5 минутъ отъ начальнаго момента, когда открывается и дѣйствуетъ кранъ A, воды въ бассейнѣ будетъ $20 \cdot 5 = 100$ л.: $P_1P = 100$. Процессъ прибыванія воды въ бассейнъ по условію равномѣренъ, и этотъ равномѣрный процессъ изобразится графически прямой линией OP: ордината каждой точки этой прямой представляетъ количество воды въ бассейнѣ въ соотвѣтствующее время, измѣряемое абсциссой этой точки.

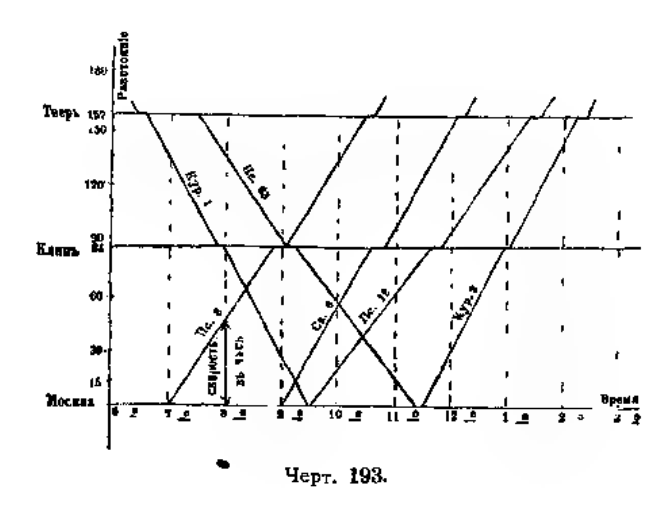
Въ продолженіе слѣдующихъ 10 минутъ дѣйствуютъ два крана, вливая каждую минуту $20+25=45$ л. За 10 минутъ прибудетъ воды $45 \cdot 10 = 450$ л., а всего съ прежнимъ количествомъ будетъ $450+100=550$ л.: $Q_1Q=550$. Процессъ прибыванія воды за этотъ промежутокъ времени изобразится прямой PQ. Далѣе дѣйствуютъ всѣ три крана, и убываетъ воды каждую минуту 35 л. ($20+25-80=\ \ 35$). Черезъ 10 минутъ воды останется $550-350=200$ л $RR_1=200$ Прямая QR изображаетъ процессъ убыванія воды въ бассейнѣ, когда всѣ три крана открыты. Точка пересѣченія S прямой QR съ осью абсциссъ отмѣчаетъ тотъ моментъ времени, когда вода вся вытекаетъ изъ бассейна.

2. Представить графически движеніе поѣздовъ Пс 63, Кр. 1, Пс. 8, Ск. 6, Пс. 12, Кр. 2 Никол. ж. д. между Москвой, Клиномъ и Тверью.

По оффиц. указателю 1910 г. (лѣтнее движеніе) имѣемъ:

Пс. 63	Кр 1			Пс 8	Ск. 6	Пс. 12	Кр. 2
11^{25}	9^{30}	0	Москва	7^{0}	9^{0}	9^{30}	11^{30}
9^{14}	7^{50}	84	Клинъ	8^{51}	10^{33}	11^{38}	12^{55}
9^{6}	7^{50}			9^{6}	10^{48}	11^{50}	1^{4}
7^{30}	6^{36}	157	Тверь	10^{29}	12^{5}	1^{22}	2^{15}
	6^{23}			10^{19}	12^{13}	1^{32}	2^{22}

Эти данныя и использованы для графики (черт. 193).

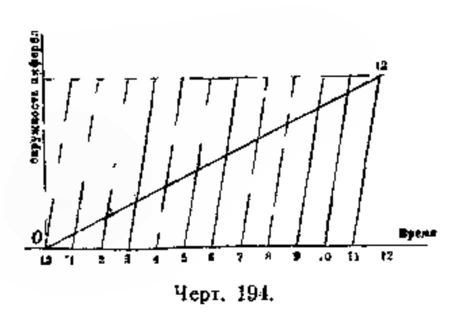


Черт. 193.

Примѣчаніе. Перемѣщеніе точки параллельно оси абсциссъ означаетъ пребываніе въ одномъ и томъ же мѣстѣ. Среднюю скорость движенія можно получить какъ приращеніе ординаты на единицу масштаба абсциссы.

3. Представить графически равномѣрное вращеніе стрѣлокъ часовъ, откладывая время по оси абсциссъ, а дугу круга циферблата по оси ординатъ (черт. 194). Единицы мѣры для осей координатъ независимы одна отъ другой.

Точки пересѣченія графики движенія минутной стрѣлки съ графикой движенія часовой означаютъ моменты совпаденія стрѣлокъ.



Черт. 194.

4. Дифференцированіе раціональныхъ функцій.

a) $y = \frac{a \cdot x^5}{5}$. Отв. $y' = a \cdot x^4$.

b) $y = (a + bx + cx^2)^n$. Отв. $y' = n(a + bx + cx^2)^{n-1} \cdot (b + 2cx)$.

c) $y = \frac{a}{x}$. Отв. $y' = -\frac{a}{x^2}$.

d) $y = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}$. Отв. $y' = \frac{4ax}{(a^2 - x^2)^2}$.

e) $y = \frac{1+x}{1-x}$. Отв. $y' = \frac{2}{(1-x)^2}$.

f) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x + 5$. Отв. $y' = x^3 - 5x^2 + 3$.

5. Изобразить графически функціи

a) $y = x^2 - 7x + 10$; e) $y = \frac{4x}{1+x^2}$;

b) $y = -x^2 - x + 6$; f) $y = x + \frac{1}{x^2}$;

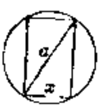
c) $y = 2 + \frac{6}{x}$; g) $y = x^n$ (при $n = 1, 2, 3, 4$);

d) $y = x + \frac{1}{x}$, h) $y = -\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}x^4 - 7x^3 + 15x^2\right)$.

6. При какомъ значеніи аргумента функція $y = 3x^2 - 12x + 28$ растетъ втрое медленнѣе, чѣмъ аргументъ?

Отв. При $x = \frac{37}{18} = 2\frac{1}{18}$.

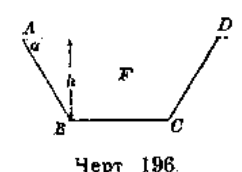
7. Прочность прямоугольной балки данной длины, при опредѣленной нагрузкѣ и опредѣленномъ расположеніи опоръ, пропорціональна ширинѣ поперечнаго сѣченія и квадрату его высоты. Изъ круглаго бревна требуется вытесать прямоугольную балку наибольшей прочности. Какова должна быть ширина этой балки, если діаметръ бревна равенъ a (черт. 195)?



Черт. 195.

Отв. $x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

8. Поперечное сѣченіе канала имѣетъ форму равнобедренной трапеціи (черт. 196). Глубина канала h, а площадь сѣченія F. Опредѣлить форму трапеціи, наивыгоднѣйшую въ смыслѣ стоимости матеріала для ложа канала, т.-е. опредѣлить, при какомъ откосѣ боковыхъ сторонъ сумма боковыхъ сторонъ и основанія будетъ наименьшей?



Черт. 196.

Отв. $\alpha = \widehat{DAB} = 60^0$.

9. Два источника тепла O и U, изъ которыхъ послѣдній въ 8 разъ сильнѣе перваго, отстоятъ одинъ отъ другого на разстояніи 10 единицъ. Малая тонкая пластинка помѣщается въ различныхъ мѣстахъ прямой, соединяющихъ точки O и U. Изучить законъ измѣненія количества тепла, получаемаго пластинкой отъ обоихъ источниковъ въ единицу времени, и опредѣлить мѣсто наименьшаго нагрѣва. На разстояніи 1 отъ источника O пластинка получаетъ 1 количества тепла, а съ измѣненіемъ разстоянія — обратно пропорціонально квадрату этого разстоянія. (За начало координатъ принять точку O, а за ось абсциссъ прямую OU).

Отв. Мѣсто наименьшаго нагрѣва на разстояніи $3\frac{1}{3}$ ед. отъ источника O.

10. Планъ одноэтажнаго дома долженъ имѣть форму прямоугольника данной площади F. Нужно проектировать три комнаты на этомъ планѣ помощью двухъ внутреннихъ стѣнъ, какъ на черт. 197. При этомъ AL должно составлять $\frac{2}{5}AB$. Стоимость стѣнъ внутреннихъ за погонную сажень составляетъ лишь $\frac{2}{3}$ стоимости погонной сажени наружной стѣны. Какой формы долженъ быть прямоугольный планъ зданія $ABCD$, чтобы стоимость постройки была наименьшая?

Черт. 197.

Указаніе. $\overline{AB} = x$; стоимость постройки y; k — стоимость погонной сажени наружной стѣны.

$$y = k\left(\frac{35}{15}x + \frac{8}{3}\cdot\frac{F}{x}\right). \quad \text{minimum } y \text{ при } x^2 = \frac{20F}{17}.$$

Отв. $AB : BC = 20 : 17$.

ГЛАВА IV.

НАЧАЛА ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ. ОПРЕДѢЛЕННЫЙ И НЕОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ.

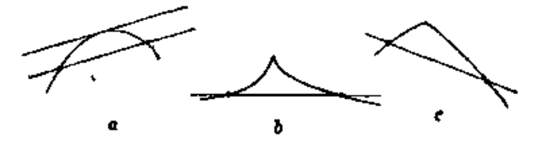
§ 1. **Функціи, имѣющія одну и ту же производную. Теорема Ролля и теорема Лагранжа о конечныхъ приращеніяхъ.** Такъ какъ производная постояннаго равна нулю (стр. 319), то двѣ функціи $F(x)$ и $f(x)$, отличающіяся одна отъ другой на постоянное слагаемое

$$F(x) = f(x) + C,$$

имѣютъ одинаковыя производныя:

$$F'(x) = f'(x).$$

Но можно ли сдѣлать обратное заключеніе, т.-е. если двѣ непрерывныя функціи имѣютъ равныя производныя, можно ли утверждать, что **всегда** такія двѣ функціи отличаются одна отъ другой на постоянное слагаемое? Возможность такого обратнаго заключенія не слѣдуетъ изъ предыдущаго утвержденія: изъ того, что всякое число, дѣлящееся на 4, четно, не слѣдуетъ, что всякое четное число дѣлится на 4. Доказательство разсматриваемаго обратнаго предложенія о функціяхъ съ равными производными основывается на такъ называемой теоремѣ Ролля и теоремѣ Лагранжа о конечныхъ приращеніяхъ.



Черт. 198.

Эти двѣ теоремы съ геометрической стороны соотвѣтствуютъ ясному и простому факту: къ дугѣ непрерывной кривой линіи можно провести по крайней мѣрѣ одну касательную, параллельную стягивающей эту дугу хордѣ (черт. 198, a), если только разсматриваемая

часть кривой не имѣетъ острія (b) или излома (c). Въ случаѣ острія или излома касательная, параллельная хордѣ, не всегда возможна. Аналитическое доказательство этихъ теоремъ основывается на томъ, что непрерывная функція въ замкнутомъ интервалѣ имѣетъ наибольшее и наименьшее значеніе (стр. 288).

1. Теорема Ролля. Если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ (a, b) и имѣетъ для каждаго значенія аргумента въ этомъ интервалѣ (опредѣленную) производную, а при $x = a$ и $x = b$ обращается въ нуль, т.-е.

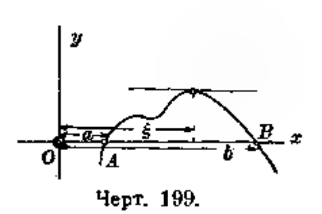
$$f(a) = 0 \quad \text{и} \quad f(b) = 0,$$

то производная функція $f'(x)$ по крайней мѣрѣ при нѣкоторомъ одномъ промежуточномъ значеніи аргумента ξ

$$a < \xi < b$$

обращается въ нуль.

Примѣчаніе. Непрарывности функціи соотвѣтствуетъ геометрически непрерывность графики ея, которая будетъ стягиваемой дугой (черт. 199). То, что при каждомъ промежуточномъ значеніи аргумента функція имѣетъ (опредѣленную) производную, геометрически означаетъ, что дуга имѣетъ въ каждой своей точкѣ одну касательную. Этимъ условіемъ исключается существованіе у дуги точки излома, ибо въ точкѣ излома лѣвосторонній и правосторонній предѣлы отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ неодинаковы. Исключается также существованіе и острія или точки возврата: касательная въ такой точкѣ въ силу однозначности функціи можетъ быть только перпендикулярной къ оси абсциссъ, но при подходѣ къ этой точкѣ съ одной стороны $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится напр. къ положительной безконечности, а при подходѣ съ другой къ отрицательной и, слѣдовательно, производная не будетъ единственной. Однако условіями теоремы не исключается возможность того, что въ нѣкоторыхъ точкахъ производная будетъ безконечно велика, но только опредѣленнаго и единственнаго знака, т.-е. не въ точкѣ возврата, а въ точкѣ перегиба.



Черт. 199.

Доказ. Пусть $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) не все время равна нулю — случай, когда теорема очевидно имѣетъ мѣсто. Мы уже знаемъ, что непрерывная функція въ замкнутомъ интервалѣ имѣетъ наибольшее и наименьшее значеніе. Пусть при $x = \xi$ разсматриваемая функція имѣетъ наибольшее значеніе. Если между a и b существуютъ и положительныя значенія функціи $f(x)$, то очевидно ξ не равно ни a, ни b, ибо по условію $f(a) = f(b) = 0$. А если бы функція не имѣла совсѣмъ положительныхъ значеній между a и b, то мы стали бы разсматривать не наибольшее значеніе, а наименьшее и пришли бы къ тому же заключенію, что $a < \xi < b$.

Итакъ пусть $f(\xi)$ наибольшее значеніе. Въ такомъ случаѣ

$$f(\xi + \Delta x) < f(\xi) \quad \text{и} \quad f(\xi - \Delta x) < f(\xi),$$

а потому правостороннее отношеніе приращенія функціи къ приращенію аргумента отрицательно, а лѣвостороннее положительно:

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{-\Delta x} > 0,$$

такъ какъ въ томъ и другомъ случаѣ числитель отрицателенъ, а знаменатель въ первомъ случаѣ имѣетъ положительный знакъ, а во второмъ отрицательный.

Слѣдовательно (стр. 255),

$$\lim \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{и} \quad \lim \frac{f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{-\Delta x} \geq 0. \qquad (1)$$

Но по условію теоремы при каждомъ значеніи аргумента функція $f(x)$ имѣетъ (одну) производную (лѣвосторонній и правосторонній предѣлы совпадаютъ), т.-е.

$$\lim \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = \frac{\lim f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{-\Delta x} = f'(\xi).$$

Такимъ образомъ неравенства или равенства (1) даютъ:

$$f'(\xi) \leq 0 \quad \text{и} \quad f'(\xi) \geq 0.$$

Слѣдовательно,

$$f'(\xi) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Въ общемъ случаѣ въ интервалѣ (a, b) возможно и не одно значеніе аргумента, при которомъ производная функція обращается въ нуль.

Такимъ образомъ, если функція $f(x)$ непрерывна, имѣетъ производную въ интервалѣ $(a,\ b)$ и $f(a) = f(b) = 0$, то $f'(\xi) = 0$, гдѣ $a < \xi < b$.

Величина ξ отличается отъ меньшаго предѣла a интервала на часть всего интервала $(b - a)$. Поэтому можно положить

$$\xi = a + \theta(b - a), \tag{1}$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1 .$$

Положительное число θ, меньше единицы, можетъ и не быть извѣстнымъ; доказано только то, что это число существуетъ.

2. Теорема Лагранжа о конечныхъ приращеніяхъ Если функція непрерывна и имѣетъ (опредѣленную) производную въ интервалѣ $(a,\ b)$, то существуетъ такое значеніе аргумента $x = \xi$, при которомъ производная равна отношенію приращенія функціи при переходѣ отъ одного конца (a) интервала до другого (b) къ величинѣ самого интервала, т.-е.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) .$$

Доказ. Отношеніе $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ величина постоянная. Обозначимъ ее ради краткости черезъ A. Требуется доказать, что

$$A = f'(\xi) .$$

Составимъ такую функцію $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a) A .$$

Эта функція удовлетворяетъ условіямъ теоремы Ролля, т.-е. она непрерывна и имѣетъ производную

$$\varphi'(x) = f'(x) - A$$

и кромѣ того

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - (a - a)A = 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - (b - a)A = f(b) - f(a) - (b - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Слѣдовательно, производная этой функціи

$$\varphi'(x) = f'(x) - A$$

по теоремѣ Ролля при нѣкоторомъ значеніи ξ аргумента въ интервалѣ (a, b) обращается въ нуль:

$$\varphi'(\xi) = 0, \quad \text{т. е.} \quad f'(\xi) - A = 0;$$

отсюда

$$A = f'(\xi), \qquad \text{или} \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{2}$$

Значеніе аргумента ξ отличается отъ нижняго предѣла a интервала (a, b) на часть всего интервала $b - a$:

$$\xi = a + \theta(b - a), \quad \text{гдѣ} \quad 0 < \theta < 1.$$

Поэтому можно написать и такъ:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'[a + \theta(b - a)]. \tag{3}$$

Съ геометрической стороны теорема выражаетъ, что къ дугѣ $\widetilde{MM_1}$ (черт. 200) можно провести касательную, параллельную хордѣ $\overline{MM_1}$, ибо тангенсъ угла наклона этой касательной къ оси абсциссъ равенъ $f'(\xi)$, а тангенсъ угла наклона хорды къ той же оси равенъ

$$\frac{PM_1}{MP} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

если прямыя параллельны, то углы ихъ наклона къ положительному направленію оси абсциссъ равны, равны поэтому и тангенсы угловъ.

Черт. 200.

Если $f(x)$ выражаетъ длину пути, пройденнаго движущейся точкой къ моменту времени x, то $f'(x)$, какъ извѣстно, выражаетъ скорость движенія въ разсматриваемый моментъ. Разность $f(b) - f(a)$ длина пути, пройденнаго за промежутокъ времени $b - a$, а $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ средняя скорость движенія за этотъ промежутокъ времени. Теорема о конечныхъ приращеніяхъ выражаетъ такимъ образомъ слѣдующій, съ механической стороны совершенно ясный фактъ: скорость движущейся точки не можетъ быть постоянно меньше средней скорости движенія за данный промежутокъ времени и

не можетъ быть постоянно больше этой средней скорости и есть моментъ, когда эти скорости равны.

Слѣдствія. 1. Если функція $f'(x)$ при всякомъ значеніи x въ интервалѣ (a, b) равна нулю, то начальная функція $f(x)$ постоянна въ этомъ интервалѣ:

$$f'(x) = 0, \qquad f(x) = constans \qquad a < x < b.$$

Пусть x_1 и x_2 — два какихъ-нибудь значенія аргумента изъ интервала (a, b):

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b.$$

По теоремѣ о конечныхъ приращеніяхъ имѣемъ

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi),$$

гдѣ

$$x_1 < \xi < x_2.$$

Такимъ образомъ ξ заключено между a и b и потому $f'(\xi) = 0$: слѣдовательно,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \qquad \text{или} \qquad f(x_2) = f(x_1), \qquad \text{т.-е.} \qquad f(x) = constans$$

что и требовалось доказать.

2. Если двѣ непрерывныя функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ имѣютъ одну и ту же производную, то онѣ отличаются одна отъ другой на постоянную величину.

Доказ. Имѣемъ:

$$f'(x) = \varphi'(x), \qquad \text{или} \qquad f'(x) - \varphi'(x) = 0. \tag{4}$$

Составимъ новую функцію $F(x)$, равную разности данныхъ функцій:

$$F(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Производная этой функціи въ силу равенства (4) тождественно равна нулю:

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0.$$

Поэтому на основаніи перваго слѣдствія имѣемъ

$$F(x) = f(x) - \varphi(x) = C,$$

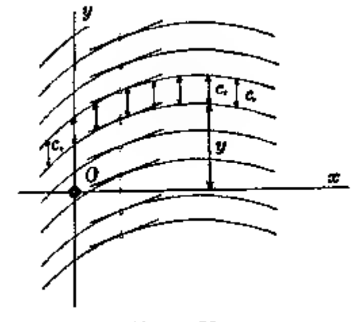
гдѣ C—нѣкоторая постоянная величина. Отсюда

$$f(x) = \varphi(x) + C.$$

Возвращаясь къ вопросу, поставленному въ началѣ этого параграфа, именно — если двѣ непрерывныя функціи имѣютъ равныя производныя, можно ли утверждать, что всегда такія двѣ функціи отличаются на постоянное слагаемое, мы можемъ теперь отвѣтить на него утвердительно.

Такимъ образомъ всякая непрерывная функція, имѣющая производную $f'(x)$, имѣетъ видъ $f(x) + C$, гдѣ C — какое-нибудь постоянное. Давая этому постоянному C произвольныя значенія, мы и получимъ различныя функціи этого вида.

Имѣя графику одной изъ этихъ функцій $f(x)$ (черт. 201) и перемѣщая ее такъ, чтобы ординаты каждой точки увеличились на одну и ту же величину C_1, мы получимъ графику другой функціи этого рода, а давая постоянному C произвольныя значенія, мы получимъ графики всѣхъ возможныхъ функцій, имѣющихъ одну и ту же производную. Касательныя этихъ линій (графикъ) въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой, параллельной оси ординатъ, т.-е. въ точкахъ, имѣющихъ одну и ту же абсциссу, параллельны между собой, такъ какъ угловые коэффиціенты ихъ равны между собой и равны именно значенію производной функціи $f'(x)$ при данномъ значеніи абсциссы.



Черт. 201.

Черезъ каждую точку (x_0, y_0) плоскости проходитъ одна изъ этихъ кривыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе опредѣляемой кривой должно имѣть видъ

$$y = f(x) + C, \tag{5}$$

гдѣ C пока не опредѣлено. Точка (x_0, y_0) лежитъ на этой кривой

и, слѣдовательно, координаты ея x_0, y_0 должны удовлетворять уравненію (5)

$$y_0 = f(x_0) + C\,,$$

откуда

$$C = y_0 - f(x_0)\,.$$

Таково значеніе постояннаго C для кривой, проходящей через точку (x_0, y_0). Уравненіе этой линіи можно написать теперь въ слѣдующемъ видѣ

$$y = f(x) + y_0 - f(x_0)\,,$$

или

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0)\,.$$

(y_0 и $f(x_0)$—постоянныя числа).

Примѣчаніе. Теорема о конечныхъ приращеніяхъ можетъ служить основаніемъ для приближеннаго вычисленія значеній функціи и для оцѣнки предѣловъ допущенной ошибки. Если непосредственное вычисленіе значеній производной функціи проще, чѣмъ вычисленіе значеній самой функціи, то, зная величину функціи при одномъ значеніи аргумента, можно вычислить ее при другомъ, близкомъ къ первому по формулѣ (3), изъ которой имѣемъ

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'[a + \theta(b - a)]\,.$$

Если при достаточно маломъ интервалѣ (a, b) производная функціи $f'(x)$ все время или возрастаетъ или убываетъ, то крайнія значенія ея $f'(a)$ и $f'(b)$ будутъ представлять наибольшее и наименьшее изъ всѣхъ остальныхъ значеній. Сообразно съ такимъ измѣненіемъ производной $f'(x)$ въ интервалѣ (a, b) можно оцѣнить предѣлы допущенной при вычисленіи $f(b)$ ошибки.

Для выясненія такого значенія теоремы о конечныхъ приращеніяхъ мы приведемъ примѣры тогда, когда въ нашемъ распоряженіи будутъ производныя трансцендентныхъ функцій.

§ 2. Постановка задачи интегральнаго исчисленія. Мы предполагали до сихъ поръ начальную функцію данной и искали ея производную или предполагали ее найденной, изслѣдуя свойства той и другой. Такова задача дифференціальнаго исчисленія. Теперь мы ставимъ обратную задачу: по данной функціи $f(x)$ найти ея начальную или первообразную функцію, т.-е. такую функцію—обозначимъ ее черезъ $F(x)$—, чтобы ея производная $F'(x)$ равнялась данной функціи:

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Такъ поставленная задача имѣетъ не одно опредѣленное рѣшеніе: если $F(x)$ представляетъ одно рѣшеніе этой задачи, то и функція $F(x)+C$, гдѣ C какое-нибудь постоянное, будетъ также представлять рѣшеніе той же задачи, ибо, какъ слѣдуетъ изъ теоремы Лагранжа о конечныхъ приращеніяхъ, непрерывныя функціи, имѣющія одну и ту же производную, отличаются постояннымъ слагаемымъ. При произвольномъ постоянномъ C функція $F(x)+C$ представляетъ общее рѣшеніе поставленной задачи

Задача, обратная задачѣ дифференціальнаго исчисленія, т.-е. задача отысканія первообразной или начальной функціи составляетъ задачу интегральнаго исчисленія: искомая первообразная функція и называется интеграломъ данной функціи.

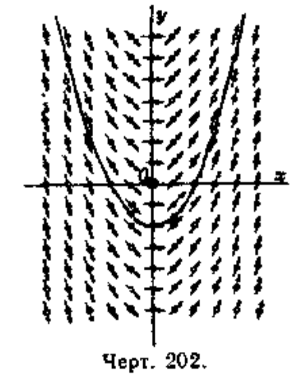
Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію или изслѣдованію этой задачи, разсмотримъ, какой геометрическій смыслъ имѣетъ ея постановка.

Пусть данная производная функція означаетъ тангенсъ угла наклона касательной къ графикѣ искомой первообразной функціи.

$$f(x) = tg\,\alpha, \quad \text{или} \quad F'(x) = tg\,\alpha\,.$$

Если точка перемѣщается по кривой, то направленіе этого перемѣщенія въ каждый моментъ опредѣляется направленіемъ касательной къ этой кривой. Такимъ образомъ, если дана производная функція, то этимъ самымъ указано въ каждомъ мѣстѣ плоскости направленіе перемѣщенія для точки, движущейся въ этой плоскости. Пусть, напр., $f(x) = x$. Для опредѣленія направленія перемѣщенія въ каждой точкѣ плоскости имѣемъ

$$tg\alpha = x\,.$$



Черт. 202.

Всѣ точки плоскости, имѣющія одну и ту же абсциссу, т.-е. лежащія на одной прямой, параллельной оси ординатъ, должны двигаться въ одномъ и томъ же направленіи (черт. 202), ибо для всѣхъ этихъ точекъ $tg\alpha$ имѣетъ одну и ту же величину. Такимъ образомъ изъ каждой точки плоскости путь перемѣщенія уже предрѣшенъ (на чертежѣ указанъ стрѣлками). Та функція, графикой которой служитъ этотъ путь, и будетъ однимъ изъ интеграловъ данной функціи.

Если $f(x) = x$, то искомая первообразная функція будетъ

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

ибо

$$F'(x) = \frac{1}{2} 2x = x, \quad \text{т.-е.} \quad F'(x) = f(x).$$

Поэтому тѣ стрѣлки, которыя указываютъ на чертежѣ направленіе перемѣщенія каждой точки, прикасаются параболъ, имѣющихъ уравненіе

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

На чертежѣ и вычерчена одна изъ этихъ параболъ, именно соответствующая значенію постояннаго C, равнаго -2.

Ясно геометрически, что, если намъ удалось опредѣлить одну такую линію, мы можемъ получить сколько угодно ихъ, перемѣстивъ поступательно найденную линію въ направленіи оси ординатъ (ср. § 1). Но какъ найти одну изъ этихъ линій? Задача интегральнаго исчисленія и состоитъ въ томъ, чтобы указать способъ составленія или опредѣленія хотя бы одной начальной функціи, графикой которой и будетъ одна изъ разсматриваемыхъ линій. Здѣсь возникаетъ прежде всего вопросъ, опредѣляетъ ли данная функція $f(x)$, какъ производная, начальную или первообразную функцію, другими словами существуетъ ли первообразная функція для данной функціи

Для нѣкоторыхъ функцій уже сейчасъ мы можемъ отвѣтить на этотъ вопросъ утвердительно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы имѣемъ рядъ функцій и дифференцированіемъ нашли ихъ производныя. При рѣшеніи обратной задачи — найти по данной функціи ея первообразную — мы ищемъ среди результатовъ предшествующаго дифференцированія данную функцію и, если таковую нашли, то та уже извѣстная функція, отъ дифференцированія которой данная функція получилась, и будетъ рѣшеніемъ поставленной задачи, будетъ интеграломъ данной функціи, подобно тому какъ въ ариѳметикѣ при дѣленіи мы, имѣя таблицу умноженія, можемъ, подыскавъ среди произведеній данное дѣлимое, опредѣлить и искомое частное.

Положимъ, напр., намъ дана функція x^n:

$$f(x) \equiv x^n,$$

при чемъ $n \neq -1$, и требуется найти первообразную функцію, т.-е. функцію, производная которой равнялась бы данной:

$$\Phi'(x) = x^n .$$

Изъ формулъ дифференціальнаго исчисленія мы знаемъ, что производная степени есть степень, извѣстнымъ образомъ составленная:

$$y = x^m, \qquad y' = m \; x^{m-1},$$

Такимъ образомъ, въ нашей задачѣ неизвѣстную первообразную функцію $\Phi(x)$ мы должны искать среди степеней. Показатель первообразной функціи на единицу больше показателя производной. Слѣдовательно, показатель искомой степени долженъ быть $n+1$. Но степень x^{n+1} мы не могли бы взять за искомую первообразную функцію $\Phi(x)$, такъ какъ производная степени x^{n+1} равняется $(n+1) . x^n$, а не x^n, какъ намъ дано. Вводя соотвѣтствующій постоянный множитель, именно $\frac{1}{n+1}$, мы можемъ уничтожить появляющійся въ производной множитель $(n+1)$. Итакъ, за $\Phi(x)$ мы можемъ взять $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, а прибавляя произвольное постоянное, получимъ общее рѣшеніе

$$\Phi(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1}$$

Примѣняя правило дифференцированія суммы (стр. 320), мы могли бы найти и первообразную функцію цѣлой функціи, ибо сумма первообразныхъ функцій слагаемыхъ имѣетъ производной данную функцію. Напр., если

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 7 ,$$

то первообразной функціей будетъ слѣдующая функція $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 7x + C,$$

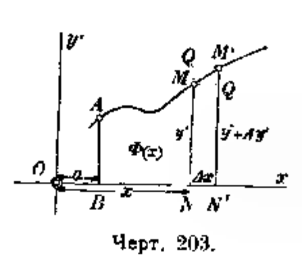
ибо

$$\Phi'(x) = \frac{4x^3}{4} - 4 \cdot \frac{3x^2}{3} + 3 \cdot \frac{2x}{2} - 7 = f(x) .$$

Но такое обращеніе формулъ дифференціальнаго исчисленія не даетъ прямого отвѣта на поставленный вопросъ, прямого способа опредѣленія первообразной функціи для любой данной напередъ функціи,

даже если ограничить задачу, для любой данной напередъ непрерывной функціи. Чтобы изыскать такой прямой способъ, мы обратимся предварительно къ другой геометрической интерпретаціи начальной функціи и ея производной

§ 3. **Другое геометрическое значеніе начальной функціи и ея производной.** Въ § 2 предыдущей главы мы говорили о геометрическомъ значеніи производной. Данную начальную функцію мы разсматривали какъ перемѣнную ординату точки, описывающей графику этой функціи. Производная функція означаетъ въ такомъ случаѣ тангенсъ угла наклона касательной этой графики къ положительному направленію оси абсциссъ, а вторая производная своимъ знакомъ опредѣляетъ характеръ изгибовъ этой линіи. Теперь мы будемъ разсматривать производную функцію $y' = f'(x)$ какъ ординату и построимъ графику этой производной. Въ такомъ случаѣ вторая производная, какъ производная производной, будетъ обозначать тангенсъ угла наклона касательной графики первой производной къ положительному направленію оси абсциссъ. Но что теперь – при такой интерпретаціи производной—означаетъ геометрически начальная функція $y = f(x)$? Прежде чѣмъ отвѣтить на этотъ вопросъ, разсмотримъ площадь фигуры (черт. 203), ограниченной осью абсциссъ, графикой производной $y' = f'(x)$ и двумя ординатами: AB, соотвѣтствующей абсциссѣ a, и MN, соотвѣтствующей абсциссѣ x. Предположимъ пока, что графика функціи $y' = f'(x)$ не пересѣкаетъ оси абсциссъ, другими словами, что y' остается все время положительнымъ. Будемъ считать ординату AB неподвижной, т.-е a постояннымъ, ордината же MN пусть перемѣщается вмѣстѣ съ измѣненіемъ аргумента x. Въ такомъ случаѣ площадь фигуры $ABNM$ будетъ перемѣнной величиной, зависящей отъ измѣненія абсциссы x, т.-е. является нѣкоторой функціей аргумента x. Обозначимъ ее черезъ $\Phi(x)$:



Черт. 203.

$$\text{пл } ABNM = \Phi(x)$$

Эта функція опредѣлена нами геометрически (какъ площадь), аналитическое же ея выраженіе остается пока намъ неизвѣстнымъ. Но разъ функція опредѣлена, хотя бы и геометрически, то

можно поставить вопросъ о нахожденіи ея производной или по крайней мѣрѣ о геометрическомъ значеніи производной.

Дадимъ аргументу x нѣкоторое приращеніе Δx; величина функціи $\Phi(x)$ при этомъ измѣнится и получитъ приращеніе, которое обозначимъ черезъ $\Delta\Phi(x)$. Какъ видно изъ чертежа

$$\Delta\Phi(x) = \text{пл. } NN'\widetilde{M'M} .$$

Ордината графики производной при этомъ также измѣняется:

$$NM = y' = f'(x); \quad N'M' = y' + \Delta y' .$$

Положимъ для опредѣленности, что производная данной функціи $f'(x)$ въ разсматриваемомъ интервалѣ съ увеличеніемъ аргумента возрастаетъ. Проведя изъ точекъ кривой M и M' прямыя MQ и $M'Q'$, параллельныя оси абсциссъ, получимъ два прямоугольника $NN'QM$ и $NN'M'Q'$, изъ которыхъ одинъ больше, другой меньше приращенія площади $\Delta\Phi(x)$:

$$\text{пл. } NN'QM < \text{пл. } NN'\widetilde{M'M} < \text{пл. } NN'M'Q'$$

или

$$y'\Delta x < \Delta\Phi(x) < (y' + \Delta y')\Delta x . \tag{1}$$

Дѣля на Δx (считая его положительнымъ), получимъ

$$y' < \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} < y' + \Delta y' .$$

Такъ какъ производную данной функціи $f'(x)$ въ разсматриваемомъ интервалѣ мы считаемъ непрерывной, то $\Delta y'$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ Δx и при переходѣ къ предѣлу въ предположеніи, что Δx стремится къ нулю, предыдущія неравенства даютъ

$$y' \leq \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} \leq y' ,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = y' , \qquad \text{или} \qquad \Phi'(x) = f'(x) . \tag{2}$$

Такимъ образомъ функція $\Phi(x)$, представляющая величину площади, ограниченной указаннымъ выше способомъ, такова, что ея

производная равна производной данной функцiи:

$$\Phi'(x) = f'(x)\,, \tag{3}$$

а слѣдовательно (§ 1), сама функцiя $\Phi(x)$ отличается отъ данной функцiи $f(x)$ на постоянное слагаемое:

$$\Phi(x) = f(x) + C\,.$$

Это постоянное слагаемое C можно легко опредѣлить. Пусть подвижная ордината NM, перемѣщаясь, совпадаетъ съ начальной (неподвижной) BA, т.-е. пусть x, измѣняясь, становится равнымъ a. Въ такомъ случаѣ площадь разсматриваемой фигуры обратится въ нуль, т.-е.

$$\Phi(a) = 0\,, \quad \text{или} \quad f(a) + C = 0\,;$$

откуда

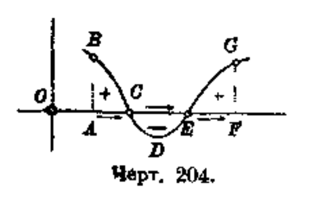
$$C = -f(a)\,.$$

Слѣдовательно,

$$\Phi(x) = f(x) - f(a)\,. \tag{4}$$

Такимъ образомъ, если производная функцiя $f'(x)$ представлена геометрически ординатой, то площадь, ограниченная графикой этой производной, осью абсциссъ и двумя ординатами, изъ которыхъ одна соотвѣтствуетъ абсциссѣ x, представляетъ одну изъ начальныхъ или первообразныхъ функцiй. Таково то новое геометрическое значенiе начальной функцiи, о которомъ гласитъ заглавiе настоящаго параграфа. Но необходимо сдѣлать нѣкоторое дополненiе къ этой интерпретацiи.

Функцiя $\Phi(x)$, измѣряющая ограниченную указаннымъ способомъ площадь, съ увеличенiемъ аргумента возрастаетъ, если производная этой функцiи $\Phi'(x)$ или, что все равно (2), производная данной функцiи $f'(x)$ положительна, и убываетъ, если эта производная отрицательна. Это значитъ, что измѣряемая площадь должна считаться положительной при увеличенiи аргумента, если она расположена надъ осью абсциссъ (черт. 204: пл. ABC и пл. EFG), и отрицательной, если она расположена подъ осью абсциссъ (пл. CDE). Такимъ образомъ мы можемъ теперь отказаться отъ сдѣланнаго въ началѣ ограниченiя относительно знака y' и считать,



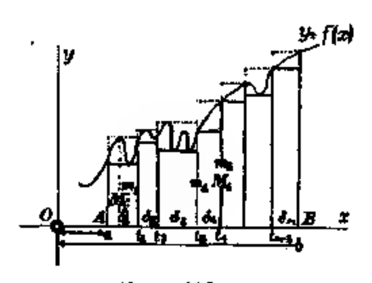
Черт. 204.

что въ общемъ случаѣ начальная функція геометрически означаетъ алгебраическую сумму положительныхъ и отрицательныхъ площадей, ограниченныхъ осью абсциссъ, графикой производной и двумя ординатами, изъ которыхъ одна соотвѣтствуетъ какой-нибудь опредѣленной (постоянной) абсциссѣ a, а другая—перемѣнной абсциссѣ x.

§ 4. **Опредѣленный интегралъ.** Новая интерпретація начальной функціи и ея производной при нѣкоторыхъ условіяхъ устанавливаетъ эквивалентность геометрической задачи вычисленія площадей и аналитической опредѣленія первообразной функціи. Изъ этой эквивалентности мы и можемъ почерпнуть указаніе на прямой способъ опредѣленія первообразной функціи по данной ея производной.

Функція будетъ опредѣлена, если указанъ способъ вычисленія значеній ея, соотвѣтствующихъ тому или другому значенію аргумента. Предыдущая интерпретація и указываетъ такой способъ.

Пусть намъ дана непрерывная функція $f(x)$. Графика этой функціи представляетъ нѣкоторую непрерывную линію (черт. 205). Будемъ предполагать, что въ интервалѣ (a, x) данная функція положительна, т.-е. соотвѣтствующая кривая лежитъ надъ осью абсциссъ.



Черт. 205.

Если бы кривая пересѣкала ось абсциссъ, то мы прибавили бы къ данной функціи достаточной величины постоянное, т.-е. вмѣсто функціи $f(x)$ разсматривали бы функцію $f(x)+A$, графика которой уже не пересѣкала бы оси абсциссъ. Найдя первообразную функцію измѣненной функціи $f(x)+A$, легко найти потомъ и первообразную функцію данной.

Площадь, ограниченная этой кривой, осью абсциссъ и двумя ординатами, изъ которыхъ одна соотвѣтствуетъ постоянной абсциссѣ a, а другая—перемѣнной абсциссѣ x, какъ мы видѣли, будетъ функціей перемѣнной абсциссы $\Phi(x)$ и производная этой функціи равна данной функціи:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Вычислить значеніе этой функціи $\Phi(x)$ для какого-либо значенія аргумента, напр. $x=b$, значитъ вычислить площадь, ограниченную графикой кривой $y=f(x)$, осью абсциссъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими, первая—абсциссѣ a, а вторая—абсциссѣ b (черт. 205).

Непрерывная функц я $f(x)$ въ замкнутомъ интервалѣ (ab) имѣетъ наибольшее и наименьшее значеніе (стр. 288). Пусть первое равно M, а второе m. Въ такомъ случаѣ ясно, что

$$m(b-a) < \Phi(b) < M(b-a),$$

ибо входящія въ эти неравенства величины суть площади, построенныя на одномъ и томъ же основаніи: первая составляетъ часть второй, измѣряемой, которая въ свою очередь является частью по слѣдней.

Раздѣлимъ теперь интервалъ (ab) на меньшіе $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$, т.-е. вставимъ между числами a и b какой либо рядь промежуточныхъ чиселъ $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$:

$$a < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n-1} < b.$$

$$\delta_1 = t_1 - a, \quad \delta_2 = t_2 - t_1, \ldots, \delta_i = t_{i+1} - t_i, \ldots, \quad \delta_n = b - t_{n-1}.$$

Въ каждомъ изъ этихъ интерваловъ данная (непрерывная) функція $f(x)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одно значеніе наименьшее изъ всѣхъ значеній въ этомъ интервалѣ и одно наибольшее (стр. 288), первое обозначимъ черезъ m_i, а второе черезъ M_i, гдѣ индексъ i указываетъ, къ какому интервалу относятся эти числа. При любомъ значеніи указателя i m_i больше или равно m, а M_i меньше или равно M:

$$m_i \geqq m \quad \text{и} \quad M_i \leqq M. \tag{1}$$

Строимъ теперь на полученныхъ интервалахъ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ два рода прямоугольниковъ: одни съ высотами m_i, другіе съ высотами M_i. Площади фигуръ, изъ которыхъ одна составлена изъ прямоугольниковъ съ наименьшими высотами (m_i), а другая изъ прямоугольниковъ съ наибольшими высотами (M_i), опредѣляются слѣдующими суммами, которыя обозначимъ черезъ s_n и S_n:

$$s_n = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \ldots + m_n\delta_n; \quad S_n = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \ldots + M_n\delta_n$$

Площади прямоугольниковъ съ наименьшими высотами (m_i) лежатъ внутри измѣряемой площади $\Phi(b)$, будутъ входящими и потому въ суммѣ образуютъ площадь меньшую измѣряемой; а площади прямоугольниковъ съ наибольшими высотами будутъ выходящими и образуютъ въ суммѣ очевидно площадь большую, чѣмъ $\Phi(b)$ (черт. 205):

$$s_n < \Phi(b) < S_n.$$

Согласно смыслу обозначенія $s_1 = m\,(b-a)$, а $S_1 = M(b-a)$, а на основаніи соотношеній (I) имѣемъ

$$s_1 \leqq s_n, \qquad S_n \leqq S_1. \tag{2}$$

Число интерваловъ мы можемъ увеличивать, подраздѣляя каждый изъ интерваловъ δ_i ($i=1,\ 2,\ 3, \ldots\ n$) на подъинтервалы. Каждый изъ интерваловъ δ_i по отношенію къ составляющимъ его подъинтерваламъ играетъ такую же роль, какъ цѣлый интервалъ (ab) по отношенію къ интерваламъ δ_i и потому построенныя суммы $s_{n'}$ и $S_{n'}$ для этого новаго разбіенія, составленныя изъ суммъ s_n и S_n, замѣной слагаемыхъ первой числами бо̀льшими или по крайней мѣрѣ не меньшими, а второй числами меньшими или по крайней мѣрѣ не бо̀льшими, находятся къ этимъ суммамъ въ слѣдующихъ соотношеніяхъ:

$$s_n \leqq s_{n'} \quad \text{и} \quad S_{n'} \leqq S_n \quad \text{при} \quad n' > n. \tag{3}$$

Продолжимъ этотъ процессъ увеличенія числа интерваловъ δ_i такъ, чтобы наибольшій изъ нихъ δ стремился къ нулю. Суммы s_n и S_n измѣняются при этомъ монотонно *), а разность между ними можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой. Дѣйствительно,

$$S_n - s_n = (M_1 - m_1)\,\delta_1 + (M_2 - m_2)\,\delta_2 + \ldots + (M_n - m_n)\,\delta_n;$$

но разсматриваемая функція $f(x)$ непрерывна и при достаточно малыхъ значеніяхъ $\delta_1,\ \delta_2, \ldots,\ \delta_n$ разность какихъ-либо значеній ея, а стало быть и значеній M_i и m_i, т.-е. колебаніе функціи въ разсматриваемыхъ интервалахъ будетъ меньше любого даннаго напередъ, сколь угодно малаго, положительнаго числа, напр. $\frac{\varepsilon}{a-b}$:

$$M_1 - m_1 < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad M_2 - m_2 < \frac{\varepsilon}{b-a}, \ldots, M_n - m_n < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Слѣдовательно,

$$S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{b-a}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) \quad \text{или} \quad S_n - s_n < \varepsilon,$$

ибо

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = (t_1 - a) + (t_2 - t_1) + \ldots + (b - t_{n-1}) = b - a.$$

*) Сумма S_n уменьшается съ увеличеніемъ указателя n или по крайней мѣрѣ не увеличивается, а s_n увеличивается или по крайней мѣрѣ не уменьшается. Такое измѣненіе перемѣннаго числа называется монотоннымъ.

Такимъ образомъ сумма входящихъ прямоугольниковъ s_n и сумма выходящихъ S_n въ указанномъ процессѣ стремятся къ одному и тому же предѣлу. Но постоянная величина измѣряемой площади $\Phi(b)$ заключена между S_n и s_n. Слѣдовательно, $S_n - \Phi(b)$ и $\Phi(b) - s_n$ также безконечно малы, а потому $\Phi(b)$ будетъ общимъ предѣломъ суммъ S_n и s_n:

$$\lim S_n = \Phi(b) \quad \text{и} \quad \lim s_n = \Phi(b).$$

Отсюда слѣдуетъ, что числа s_n и S_n суть приближенныя значенія измѣряемой площади $\Phi(b)$—одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ. Вычисляя суммы s_n и S_n, мы тѣмъ самымъ можемъ вычислить съ любою степенью точности приближенныя значенія $\Phi(b)$. Такимъ образомъ можно считать первообразную функцію $\Phi(x)$ опредѣленной аналитически, такъ какъ любое ея значеніе можно вычислить съ любою степенью точности.

Для цѣлей вычисленія видъ суммъ s_n и S_n

$$s_n = m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \ldots + m_n \delta_n,$$
$$S_n = M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \ldots + M_n \delta_n,$$

не вполнѣ удобенъ: не удобенъ въ томъ именно отношеніи, что для каждаго интервала приходится опредѣлять наименьшее и наибольшее значеніе функціи $f(x)$. Неудобство такого вычисленія можно устранить слѣдующимъ образомъ. Въ каждомъ изъ интерваловъ δ_i возьмемъ промежуточное или равное пограничному значеніе аргумента τ_i:

$$t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i \quad (i = 1, 2, \ldots n;\ t_0 = a,\ t_n = b)$$

и составимъ сумму площадей прямоугольниковъ, построенныхъ на тѣхъ же интервалахъ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ какъ основаніяхъ и имѣющихъ высотами значенія функціи $f(x)$ при $x = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$:

$$f(\tau_1)\delta_1 + f(\tau_2)\delta_2 + \ldots f(\tau_n)\delta_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i) \cdot \delta_i.$$

Символъ $\sum\limits_{i=1}^{i=n}$ читается: сумма отъ $i = 1$ до $i = n$ и означаетъ сумму слагаемыхъ вида $f(\tau_i)\delta_i$, при чемъ индексъ i при суммированіи принимаетъ значенія $1, 2, \ldots\ldots, n$.

Такъ какъ въ интервалѣ δ_i наименьшее значеніе функціи $f(x)$ равно m_i, а наибольшее M_i, то

$$m_i \leqq f(\tau_i) \leqq M_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Поэтому

$$s_n \leqq \sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\,\delta_i \leqq S_n.$$

Но суммы s_n и S_n стремятся по доказанному къ одному предѣлу. Слѣдовательно, и сумма, заключенная между ними или равная одной изъ нихъ, стремится къ тому же предѣлу, т.-е. къ $\Phi(b)$:

$$lim \sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\,\delta_i = \Phi(b).$$

Можно и это выраженіе еще болѣе упростить, пользуясь произволомъ выбора интерваловъ δ_i и значеній аргумента τ_i. Именно будемъ считать всѣ интервалы δ_i равными и обозначимъ каждый изъ нихъ черезъ Δt, а τ_i примемъ равнымъ тому или другому пограничному значенію аргумента того интервала, въ которомъ заключено значеніе τ_i:

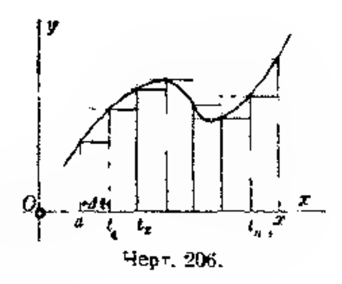
$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \Delta t$$

$$\tau_1 = a,\ \tau_2 = t_1, \ldots, \tau_n = t_{n-1}; \quad \text{или} \quad \tau_1 = t_1,\ \tau_2 = t_2, \ldots, \tau_n = b.$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\Phi(b) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(t_i)\,\Delta t, \quad \text{или} \quad \Phi(b) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Геометрическое значеніе каждой изъ этихъ суммъ до перехода къ предѣлу представлено на чертежѣ (206). Каждое слагаемое той или другой суммы представляетъ площадь элементарнаго прямоугольника съ основаніемъ Δt и высотой $f(t_i)$. При стремленіи Δt къ нулю каждое слагаемое будетъ безконечно малымъ, а число ихъ безконечно увеличивается. Такимъ образомъ нахожденіе значеній функціи $\Phi(x)$, имѣющей данную производную, сводится къ безконечному процессу: къ суммированію безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ опредѣленнаго вида. При этомъ процессѣ мы изъ частей составляемъ цѣлое, отсюда и названіе этого процесса—



Черт. 206.

интегрированіе (латинское слово Integer цѣлый), а названіе полученнаго результата—**интегралъ** или полнѣе -**опредѣленный интегралъ**

Подобно тому, какъ операція нахожденія производной $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ замѣняется сокращеннымъ ея обозначеніемъ $\frac{dy}{dx}$, въ которомъ греческое начертаніе (Δ) первой буквы слова differentia замѣняется латинскимъ (d) и опускается символъ послѣдней операціи $\lim\limits_{\Delta x=0}$, такъ и въ обозначеніи операціи нахожденія интеграла, иначе—операціи интегрированія $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{i=1}^{i=n} f(t_i)\,\Delta t$ замѣняютъ греческое начертаніе (Σ—сигма) первой буквы слова summa латинскимъ начертаніемъ $\int$ (нѣсколько вытянутая буква S), приращеніе Δt замѣняется дифференціаломъ dt, чтобы показать, что Δt стремится къ нулю; при этомъ опускаютъ $\lim\limits_{n=\infty}$ и указатель у t $[f(t_i)]$, чтобы показать, что при суммированіи значеніе t переходитъ въ безконечно близкое, мѣняясь отъ a до b· t будетъ **перемѣннымъ** суммированія; вмѣсто указанія **предѣловъ** измѣненія указателя i, отмѣчаютъ внизу и вверху символа $\int$ **предѣлы** измѣненія аргумента t при суммированіи, т.-е. a и b.

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(t_i)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Символъ $\int_a^b f(t)\,dt$ читается интегралъ отъ a до b $f(t)\,dt$.

Въ знакахъ лѣвой части предыдущаго равенства описана вполнѣ операція интегрированія; въ знакахъ правой части имѣется намекъ, что результатъ полученъ изъ суммы, подобно тому какъ въ обозначеніи производной по Лейбницу $\frac{dy}{dx}$ мы имѣемъ намекъ, что производная получена изъ отношенія приращеній функціи и аргумента.

Давая различныя значенія верхнему предѣлу опредѣленнаго интеграла, мы будемъ получать различныя значенія первообразной функціи $\Phi(x)$, которую можно опредѣлить теперь какъ опредѣленный интегралъ съ **перемѣннымъ** верхнимъ предѣломъ:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Верхній предѣлъ интеграла, т.-е. x мы должны считать пе

ремѣннымъ лишь послѣ выполненія операціи суммированія и перехода къ предѣлу, и это главное перемѣнное x существенно отличается отъ перемѣннаго суммированія или интегрированія, т.-е. отъ t.

Интегралъ $\int_a^x f(t)\,dt$ будетъ функціей верхняго предѣла x, именно искомой первообразной функціей $\Phi(x)$; производная ея равна подъинтегральной функціи (конечно съ замѣной перемѣннаго суммированія главнымъ перемѣннымъ), т.-е. данной функціи $f(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,; \qquad \Phi'(x) = f(x)\,.$$

Перемѣнное интегрированія, т. е. t можно замѣнить въ обозначеніи интеграла иной буквой, смыслъ и результатъ опереціи отъ этого не измѣняется:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(y)\,dy = \int_a^x f(z)\,dz = \ldots$$

Можно даже перемѣнное интегрированія обозначить тою же буквою, какъ и главное перемѣнное, т.-е. верхній предѣлъ; но при этомъ нужно различать существенную разницу того и другого:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx\,.$$

Пусть, напр., главное перемѣнное получаетъ опредѣленное ..... вое значеніе $b\,(x = b)$. Въ такомъ случаѣ изъ предыдущаго равенства соотвѣтствующее значеніе первообразной функціи, т.-е. $\Phi(b)$ опредѣляется такъ:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Значеніе b подставляется вмѣсто x, но x, обозначающаго главное перемѣнное, а не перамѣнное интегрированія.

§ 5. **Неопредѣленный интегралъ.** Зная одну функцію $\Phi(x)$, имѣющую данную производную $f(x)$, мы можемъ найти всѣ другія функціи, имѣющія ту же производную, прибавивъ къ $\Phi(x)$ произвольное постоянное:

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(x)\,dx + C\,.$$

$F(x)$, содержа неопредѣленное, произвольное постоянное C, называется **неопредѣленнымъ интеграломъ**.

Неопредѣленный интегралъ представляетъ общее рѣшеніе поставленной задачи нахожденія первообразной функціи, имѣющей данную функцію $f(x)$ своей производной, а функція $\Phi(x)$, т.-е. опредѣленный интегралъ, какъ функція верхняго предѣла, представляетъ только частное рѣшеніе поставленной задачи. Для составленія общаго рѣшенія можно было бы взять любое частное рѣшеніе, найденное подобнымъ же способомъ, т.-е. путемъ суммированія и перехода къ предѣлу иначе—интегрированія, измѣняя, напримѣръ, нижній предѣлъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$F(x) = \Phi(x) + C\,, \quad \Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx\,,$$

$$F(x) = \Phi_1(x) + C_1\,, \quad \Phi_1(x) = \int_{a_1}^x f(x)\,dx\,,$$

$$F(x) = \Phi_2(x) + C_2\,, \quad \Phi_2(x) = \int_{a_2}^x f(x)\,dx\,,$$

. . . .

гдѣ частныя рѣшенія $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ и т. д. составлены указаннымъ способомъ, а C, C_1, C_2,... произвольныя постоянныя.

Произволъ въ выборѣ нижняго предѣла, произволъ, насколько онъ допускается свойствомъ данной функціи $f(x)$, можно отмѣтить тѣмъ, что опускаемъ нижній предѣлъ. Но въ такомъ случаѣ опускаютъ и верхній предѣлъ, разумѣя подъ нимъ аргументъ x и обозначая перемѣнное интегрированіе тою же буквой, какъ и главное перемѣнное:

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C\,.$$

Въ обозначеніи интеграла $\int f(x)\,dx$, которое по предыдущему означаетъ **какое-нибудь** (неопредѣленное) рѣшеніе, можно уже разумѣть включеннымъ произвольное постоянное (произволъ — въ выборѣ нижняго предѣла), а потому можно опустить и произвольное постоянное C и подъ символомъ $\int f(x)\,dx$ разумѣть неопредѣленный интегралъ, т.-е. общее рѣшеніе поставленной задачи.

На символъ $\int f(x)\,dx$ можно смотрѣть также какъ на формулировку самой задачи: найти функцію, производная которой равняется

данной подъинтегральной функціи $f(x)$, или иначе—найти функцію, дифференціалъ которой равенъ $f(x)\,dx$. Какимъ бы способомъ ни была рѣшена эта задача, результатъ рѣшенія мы будемъ называть интеграломъ, а рѣшена она можетъ быть въ нѣкоторыхъ случаяхъ не только суммированіемъ безконечно малыхъ слагаемыхъ и переходомъ къ предѣлу, а также путемъ обращенія формулъ дифференціальнаго исчисленія, какъ объ этомъ говорилось при постановкѣ задачи интегральнаго исчисленія, или задачи обратной задачѣ дифференціальнаго исчисленія (§ 2). Пусть, напр., дана функція x^n, при чемъ $n \neq -1$. Первообразная функція $\Phi(x)$, какъ мы видѣли, должна равняться степени же съ показателемъ на единицу бóльшимъ, дѣленной на новаго показателя:

$$\Phi(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Дѣйствительно, дифференцируя $\Phi(x)$ мы получимъ данную функцію:

$$\Phi'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n.$$

За этой операціей, помощью которой мы здѣсь нашли первообразную функцію, сохраняется названіе интегрированія и результатъ операціи будемъ называть интеграломъ, хотя въ ней и не было рѣчи о составленіи цѣлаго изъ безконечно-малыхъ частей. Сохраняется за ней и обозначеніе интеграла $\int$ (summa), хотя въ ней и не было явно суммированія. Такимъ образомъ предыдущую задачу нахожденія первообразной функціи степени мы можемъ обозначить и написать общее ея рѣшеніе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

гдѣ C произвольное постоянное. Лѣвую часть этого равенства можно читать такъ: „взять интегралъ" или „взять неопредѣленный интегралъ" или просто „интегралъ отъ $x^n dx$". Описанная операція носитъ названіе неопредѣленнаго интегрированія.

Смыслъ символа $\int$, установленный прежнимъ способомъ, требуетъ, чтобы этотъ символъ и въ неопредѣленномъ интегралѣ ставился не просто передъ данной производной, а передъ даннымъ дифференціаломъ, т.-е. передъ произведеніемъ данной производной на дифференціалъ аргумента.

Знаки дифференцированія и интегрированія, какъ слѣдуетъ изъ ихъ опредѣленія, связаны слѣдующими соотношеніями:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \qquad \text{и} \qquad \int \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx = f(x) + C\,.$$

Разсмотримъ въ слѣдующихъ примѣрахъ примѣненіе обоихъ способовъ нахожденія первообразной функціи по данной производной.

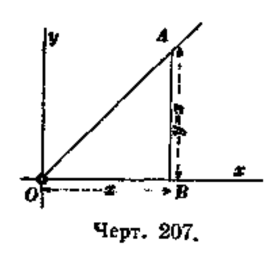
Примѣръ 1. Найти первообразную функцію, производная которой равна x, иначе—взять интегралъ $\int x\,dx$.

a) Примѣняя предыдущую формулу, выведенную для общаго случая, получимъ

$$\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

b) Чтобы найти общее рѣшеніе поставленной задачи другимъ способомъ, достаточно найти опредѣленный интегралъ, верхній предѣлъ котораго равенъ x, а нижній какой угодно, напр., 0: $\int_0^x x\,dx$, и прибавить потомъ произвольное постоянное.

Геометрически вычисленіе этого опредѣленнаго интеграла сводится къ опредѣленію площади $\Phi(x)$, ограниченной осью абсциссъ, линіей данной уравненіемъ $y = x$, нѣкоторой начальной ординатой и ординатой, соотвѣтствующей какому-нибудь значенію аргумента x.



Черт. 207.

Уравненіе $y = x$ представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ и дѣлящую координатный уголъ пополамъ, такъ какъ ордината любой ея точки равна ея абсциссѣ (черт. 207)

Такимъ образомъ задача сводится къ опредѣленію площади треугольника OBA съ основаніемъ $OB = x$ и высотой $BA = y$ или, такъ какъ $y = x$, съ высотой $BA = x$. Благодаря простотѣ этой фигуры намъ не приходится обращаться къ суммированію и переходу къ предѣлу; элементарная геометрія даетъ готовую формулу для вычисленія этой площади.

$$\triangle\, OBA = \frac{OB\,.\,BA}{2} = \frac{x\,.\,x}{2}\,;$$

$$\Phi(x) = \frac{x^2}{2} \qquad \text{или} \qquad \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}\,.$$

Такимъ образомъ, и этотъ способъ, какъ и слѣдовало, конечно, ожидать, даетъ то же аналитическое выраженіе для искомой первообразной функціи:

$$F(x) = \Phi(x) + C\,,$$

или

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Примѣръ 2. $\int x^2\,dx = F(x) = ?$

a) По формулѣ (1)

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C.$$

b) Уравненіе $y = x^2$ представляетъ параболу (черт. 208). $\Phi(x) = \int_0^x x^2\,dx$ представляетъ площадь OMN. Элементарная геометрія не даетъ соотвѣтствующей формулы для этого случая, какъ въ примѣрѣ 1, и потому мы должны обратиться къ первоначальному опредѣленію интеграла:

$$\Phi(x) = \int_0^x x^2\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_i^2)\ \Delta x =$$

$$\lim \Delta x\,(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^2_{n-1});$$

Черт. 208.

или

$$\Phi(x) = \lim \sum_{i=1}^{i=n} x^2\ \Delta x = \lim \Delta x\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

Можно вычислить съ любою степенью точности значеніе $\Phi(x)$ для всякаго значенія аргумента. Напр., при $x = 1$, полагая $\Delta x = \frac{1}{10}$ или $n = 10$, будемъ имѣть для $\Phi(1)$ слѣдующія приближенныя значенія:

$$\Phi(1) \sim \frac{1}{10}(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_9^2), \quad \text{или} \quad \Phi(1) \sim \frac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2).$$

Но

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}2,\ \ldots,\ x_{10} = 1.$$

Слѣдовательно,

$$\Phi(1) \sim \frac{1}{10}(0{,}1^2 + \ldots + 0{,}9^2), \quad \text{или} \quad \Phi(1) \sim \frac{1}{10}(0{,}1^2 + 0{,}2^2 + \ldots + 1^2).$$

$$\Phi(1) \sim \frac{1}{10} \cdot 2{,}85 = 0{,}285, \quad \text{или} \quad \Phi(1) \sim \frac{1}{10} \cdot 3{,}85 = 0{,}385.$$

0,285 и 0,385 и будутъ приближенными значеніями $\Phi(1)$ или геометрически— площади ON_1M_1, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ.

Примѣръ 3. Найти первообразную функцію, производная которой равнялась бы $\frac{1}{x}$, иначе взять интегралъ $\int \frac{dx}{x}$.

Тѣ формулы дифференціальнаго исчисленія, которыми мы располагаемъ въ данный моментъ, не даютъ намъ возможности найти искомую

функцiю по первому способу, способу неопредѣленнаго интегрированiя; нашъ запасъ формулъ дифференцiальнаго исчисленiя ограниченъ: мы можемъ отыскать пока лишь производныя рацiональныхъ функцiй, и среди этихъ производныхъ нѣтъ данной функцiи $\frac{1}{x}$.

Второй способъ даетъ возможность вычисленiя значенiй одной изъ искомыхъ функцiй $\Phi(x)$, представленной въ видѣ опредѣленнаго интеграла, напр., $\Phi(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$.

Пусть, напр., требуется вычислить значенiе этого интеграла при $x = 10$.

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\Delta x}{x_i} = \lim_{n=\infty} \Delta x \cdot \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta x}{x} = \lim_{n=\infty} \Delta x \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right).$$

Полагая $n = 9$, будемъ имѣть

$$\Delta x = \frac{10-1}{9} = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \ldots x_9 = 10$$

и

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} \sim \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} \sim 2{,}83,$$

или

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10} \sim 1{,}93.$$

Разность между этими приближенными значенiями равна 0,9. Слѣдовательно, 2,82 и 1,92 отличаются отъ точнаго значенiя интеграла $\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \Phi(10)$, заключеннаго между ними, меньше чѣмъ на 0,9.

§ 6. Основныя свойства опредѣленныхъ интеграловъ. 1. Если нижнiй и верхнiй предѣлы равны, то интегралъ равенъ нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{1}$$

ибо интервалъ $a - a = 0$ и интервалы $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = 0$, а потому и

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\,\delta_i = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2. Если верхній и нижній предѣлы опредѣленнаго интеграла переставить, то интегралъ измѣнитъ лишь свой знакъ:

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt. \tag{2}$$

Въ самомъ дѣлѣ, считая въ опредѣляющихъ суммахъ интервалы δ_1, $\delta_2,\ldots,\ \delta_n$ равными, мы для перваго интеграла каждый изъ этихъ интерваловъ должны принять равнымъ $\frac{b-a}{n}$, а для второго интеграла равнымъ $\frac{a-b}{n}$, т.-е. противоположнаго знака; значенія функціи $f(x)$ для того и другого интеграла одинаковы. Слѣдовательно, въ опредѣляющихъ суммахъ того и другого интеграла соотвѣтственныя слагаемыя равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку, а потому и суммы и ихъ предѣлы равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку.

3. Если a, c, b—три значенія аргумента, то должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Если c заключено между a и b, т.-е. если $a < c < b$ (или $a > c > b$), то, составляя опредѣляющія суммы для интервала отъ a до c и переходя къ предѣлу, получимъ $\int_a^c f(x)\,dx$; суммируя въ интервалѣ отъ c до b, получимъ интегралъ $\int_c^b f(x)\,dx$. Складывая эти суммы до перехода къ предѣлу, мы получимъ опредѣляющую сумму для всего интервала отъ a до b, т.-е. въ предѣлѣ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$. Слѣдовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если c не заключено между a и b, если, напр., $a < b < c$, то по предыдущему мы должны имѣть

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Но по второму свойству имѣемъ

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

4. Если въ интервалѣ $(b-a)$ подъинтегральная функція $f(x)$ имѣетъ наибольшее значеніе M и наименьшее m, то

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a). \tag{5}$$

Это предположеніе мы уже отмѣчали при самомъ установленіи понятія опредѣленнаго интеграла (§ 4).

Изъ неравенствъ (5) вытекаетъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

гдѣ μ нѣкоторое число, заключенное между m и M:

$$m < \mu < M.$$

Но данная функція $f(x)$ непрерывна, непрерывна и функція $f(x)-\mu$. Пусть $f(x)$ принимаетъ наименьшее значеніе m при $x=x_1$, а наибольшее при $x=x_2$:

$$f(x_1)=m, \qquad f(x_2)=M.$$

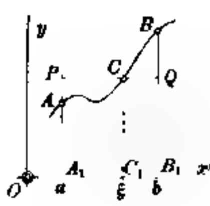
Въ такомъ случаѣ функція $f(x)-\mu$ при $x=x_1$ принимаетъ отрицательное значеніе $m-\mu$ $(m<\mu)$, а при $x=x_2$ положительное значеніе $M-\mu$ $(M>\mu)$. Слѣдовательно, при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи ξ, которое очевидно заключено и между a и b, функція $f(x)-\mu$ обращается въ нуль (стр. 291).

$$f(\xi)-\mu=0,$$

откуда

$$\mu=f(\xi) \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi).$$

Это свойство опредѣленнаго интеграла означаетъ, что на кривой $y = f(x)$ есть такая точка C, что измѣряемая опредѣленнымъ интеграломъ $\int_a^b f(x)\,dx$ площадь A_1ACBB_1 (черт. 209) равновелика площади прямоугольника A_1PQB_1 съ основаніемъ, равнымъ $b-a$ и высотою, равною ординатѣ нѣкоторой точки C, лежащей на кривой между A и B.



Черт. 209.

Разсмотримъ еще два свойства опредѣленныхъ интеграловъ.

5. Постоянный множитель подъинтегральной функціи можно вынести за знакъ интеграла

$$\int_a^b a\,f(x)\,dx = a\int_a^b f(x)\,dx.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если подъинтегральная функція содержитъ множителемъ постоянное число, то каждое слагаемое той суммы, предѣлъ которой и составляетъ данный интегралъ, будетъ также содержать его множителемъ; этотъ множитель можно вынести до перехода къ предѣлу за знакъ суммы, а слѣдовательно и интеграла.

6. Интегралъ суммы нѣсколькихъ слагаемыхъ равенъ суммѣ интеграловъ этихъ слагаемыхъ:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\,dx = \lim_{\Delta x = 0}\sum_{i=1}^{i=n} [f_1(x_i)+f_2(x_i)-f_3(x_i)]\,\Delta x.$$

До перехода къ предѣлу слагаемыя послѣдней суммы можно переставить и соотвѣтственной группировкой можно данную сумму разбить на три суммы:

$$\sum_{i=1}^{i=n} [f_1(x_i)+f_2(x_i)-f_3(x_i)]\,\Delta x =$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_1(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{i=n} f_2(x_i)\,\Delta x - \sum_{i=1}^{i=n} f_3(x_i)\,\Delta x$$

Такимъ образомъ въ предѣлѣ получимъ

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx\,.$$

§ 7. **Два общихъ правила неопредѣленнаго интегрированія.** Правило вынесенія постояннаго множителя за знакъ интеграла и правило интегрированія суммы можно отнести и къ неопредѣленнымъ интеграламъ, такъ какъ, полагая верхній предѣлъ независимымъ перемѣннымъ, а нижній неопредѣленнымъ, мы и получимъ изъ опредѣленнаго интеграла неопредѣленный, прибавляя или разумѣя прибавленными въ обѣихъ частяхъ равенствъ соотвѣтствующія произвольныя постоянныя и опуская обозначенія предѣловъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

1. $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

2. $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx\,.$

Дѣйствительно, дифференцируя по общимъ правиламъ обѣ части равенства 1 или 2 и опираясь на соотношенія знаковъ производной и интеграла (§ 5), мы получимъ въ томъ или другомъ случаѣ производныя одинаковыя:

1. $\frac{d}{dx}\int a f(x)\,dx = a\,f(x)$ и $\frac{d}{dx}\,a\int f(x)\,dx = a\,\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = a\,f(x).$

2. $\frac{d}{dx}\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\,.$

и

$$\frac{d}{dx}\left[\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\int f_1(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int f_2(x)\,dx - \frac{d}{dx}\int f_3(x)\,dx = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\,.$$

Правила 1 и 2 даютъ возможность свести интегрированіе любой цѣлой раціональной функціи къ интегрированію степени

Примѣры:

1. $\int (x^2 - 3x + 5)\,dx = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int dx = \frac{x^3}{3} - 3\,.\,\frac{x^2}{2} + 5\,.\,x + C.$

2. $\int (6x^3 - 7x^2 - 8x + 6)\,dx = 6\,.\,\frac{x^4}{4} - 7\,.\,\frac{x^3}{3} - 8\,.\,\frac{x^2}{2} + 6x + C\,.$

§ 8. **Вычисленіе опредѣленнаго интеграла помощью неопредѣленнаго интегрированія. Основное предложеніе интегральнаго исчисленія.** Задача нахожденія первообразной функціи по существу требуетъ безконечнаго процесса, что прямо и указывается въ самомъ опредѣленіи интеграла, какъ предѣла суммы безконечно большого числа безконечно малыхъ слагаемыхъ, извѣстнымъ образомъ составленныхъ изъ данной функціи:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta x, \quad \text{гдѣ} \quad \Delta x = \frac{x-a}{n}.$$

Но та же задача, какъ мы видѣли, можетъ быть рѣшена и инымъ путемъ—неопредѣленнымъ интегрированіемъ. При неопредѣленномъ интегрированіи мы стараемся угадать первообразную функцію путемъ обращенія формулъ дифференціальнаго исчисленія подобно тому, какъ результаты дѣленія чиселъ можно угадать, обращая таблицу умноженія. Въ это угадываніе можно, какъ увидимъ потомъ, ввести планомѣрность, установить для него нѣкоторые общіе пріемы, которые являются въ концѣ концовъ обращеніемъ формулъ дифференціальнаго исчисленія, обращеніемъ тѣхъ операцій, помощью которыхъ для данной функціи мы искали ея производную. Но нахожденіе производной по самому опредѣленію требуетъ также безконечнаго процесса: $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Такимъ образомъ, и неопредѣленное интегрированіе соприкасается съ безконечнымъ процессомъ, но онъ уже выполненъ въ обратной задачѣ дифференцированія, а при неопредѣленномъ интегрированіи мы только ищемъ среди результатовъ дифференцированія, среди результатовъ этого безконечнаго процесса ту функцію, которая намъ дана, и если ее нашли, то та функція, отъ которой данная функція дифференцированіемъ получена какъ производная, и будетъ искомой первообразной функціей. Возможно, конечно, что среди результатовъ дифференцированій и нельзя найти данной функціи. Въ такомъ случаѣ неопредѣленное интегрированіе и не приведетъ къ рѣшенію поставленной задачи. Но если неопредѣленнымъ интегрированіемъ намъ удалось найти первообразную функцію, то естественно ожидать, что и при в ы ч и с л е н і и опредѣленнаго интеграла мы можемъ избавиться отъ выполненія безконечнаго процесса, требуемаго

его опредѣленіемъ:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta x .$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $F(x)$ одна изъ первообразныхъ функцій, найденная неопредѣленнымъ интегрированіемъ:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C; \qquad F'(x) = f(x).$$

Здѣсь C произвольное постоянное. Интегралъ

$$\int_a^x f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

тоже одна изъ первообразныхъ функцій и потому отличается отъ $F(x)$ (стр. 342) на нѣкоторое опредѣленное постоянное C_0.

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C_0 . \tag{1}$$

Здѣсь C_0 не произвольное, но уже нѣкоторое опредѣленное постоянное, которое нужно подобрать.

Опредѣленный интегралъ, если верхній предѣлъ его равенъ нижнему, обращается въ нуль (§ 6):

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Поэтому и правая часть равенства (1), т.-е. $F(x) + C_0$ должна при $x = a$ обращаться въ нуль:

$$F(a) + C_0 = 0 .$$

Отсюда находимъ

$$C_0 = -F(a),$$

и, слѣдовательно,

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{2}$$

Полагая верхній предѣлъ равнымъ b, будемъ имѣть

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2'}$$

Разность двухъ значеній функціи обозначается символически такимъ образомъ:

$$F(b) - F(a) = \Big[F(x) \Big]_a^b .$$

Формулы (2) и (2') можно поэтому представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^x; \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Такимъ образомъ мы пришли къ основному предложенію интегральнаго исчисленія:

Опредѣленный интегралъ равенъ разности значеній первообразной функціи при верхнемъ и нижнемъ предѣлахъ.

Это предложеніе сводитъ вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ къ неопредѣленному интегрированію.

Примѣръ 1. Пусть данная функція $f(x) = x^2$. Найти первообразную функцію и опредѣлить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$, осью абсциссъ и ординатой, соотвѣтствующей абсциссѣ $x = 1$. По общей формулѣ (стр. 359) для интеграла степени имѣемъ

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

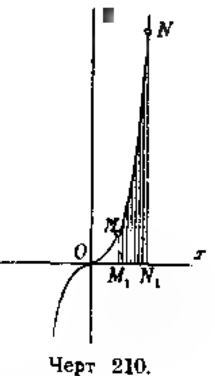
Слѣдовательно, одна изъ первообразныхъ функцій будетъ $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Кривая, представляемая уравненіемъ $y = x^2$, парабола (черт. 208).

$$\text{пл. } \overset{\smile}{OMN} = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Въ примѣрѣ 2 § 5 мы, исходя изъ опредѣленія опредѣленнаго интеграла, вычислили приближенныя значенія этой площади 0,285 и 0,385

$$0{,}285 < \frac{1}{3} < 0{,}385\,.$$

Примѣръ 2. Вычислить площадь $\overset{\smile}{M}NM_1N_1$ (черт. 210), ограниченную кривой $y = x^3$, осью абсциссъ и двумя ординатами, изъ которыхъ одна соотвѣтствуетъ абсциссѣ $x = 1$, а другая абсциссѣ $x = 2$.



Черт 210.

Рѣшеніе. $\text{Пл. } \overset{\smile}{M}NM_1N_1 = \int_1^2 x^3\,dx.$

Но

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

Слѣдовательно,

$$\text{пл. } \overset{\smile}{M}NM_1N_1 = \int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4} \text{ кв ед}$$

Примѣръ 3. Вычислить площадь OAM (черт. 190, стр. 326), ограниченную кривой

$$y = 0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 1{,}5x\,,$$

осью абсциссъ и ординатой, соотвѣтствующей абсциссѣ $x = 1$.

Рѣшеніе.

$$\text{Площ. } OAM = \int_0^1 (0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 1{,}5x)\,dx\,.$$

Но интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ

$$\int_0^1 (0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 1{,}5x)\,dx = \int_0^1 0{,}1x^3\,dx - \int_0^1 0{,}9x^2\,dx + \int_0^1 1{,}5x\,dx\,.$$

Постоянный множитель подъинтегральной функціи можно вынести за знакъ интеграла.

$$\text{пл. } OAM = 0{,}1\int_0^1 x^3\,dx - 0{,}9\int_0^1 x^2\,dx + 1{,}5\int_0^1 x\,dx =$$

$$= 0{,}1\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 0{,}9\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 1{,}5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 0{,}1\cdot\frac{1}{4} - 0{,}9\cdot\frac{1}{3} + 1{,}5\,\frac{1}{2} =$$

$$= 0{,}025 - 0{,}3 + 0{,}75 = 0{,}475 \text{ кв. ед.}$$

§ 9. **Доказательство существованія интеграла и первообразной функціи независимо отъ геометрическихъ интерпретацій.** Исходя изъ второй интерпретаціи начальной или первообразной функціи и производной (§ 3), мы свели вычисленіе значеній первообразной функціи къ вычисленію площадей, опредѣленнымъ образомъ ограниченныхъ и пришли такимъ образомъ къ понятію опредѣленнаго интеграла какъ предѣла суммы безконечно малыхъ слагаемыхъ вида $f(\tau_i)\delta_i$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim \sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\,\delta_i\,.$$

Но можно доказать существованіе разсматриваемаго предѣла независимо отъ геометрическихъ интерпретацій, доказать, что суммы s_n и S_n, т.-е.

$$s_n = \sum m_i\,\delta_i \quad \text{и} \quad S_n = \sum M_i\,\delta_i$$

стремятся при нѣкоторыхъ условіяхъ, налагаемыхъ на функцію $f(x)$, къ одному и тому же предѣлу при всякомъ законѣ разбіенія интервала (ab) на подъинтервалы δ_i, если наибольшій изъ этихъ подъинтерваловъ δ стремится къ нулю. Дѣйствительно, если процессъ увеличенія числа интерваловъ δ_i совершается по тому же закону, какъ мы разсматривали раньше, т.-е. начальный интервалъ разбивается на интервалы δ_i, каждый изъ этихъ интерваловъ разбивается снова на подъинтервалы δ' и т. д., то по тѣмъ же основаніямъ (не связаннымъ съ геометрическими интерпретаціями), какъ и раньше заключаемъ, что, во-первыхъ, $s_n < S_n$ и, во-вторыхъ, s_n при увеличеніи числа дѣленій n увеличивается, а S_n уменьшается:

$$s_n < S_n, \quad s_n < s_{n'} \quad \text{и} \quad S_{n'} < S_n \quad \text{при} \quad n' > n\,.$$

Если резность $S_n - s_n$ можетъ быть сдѣлана при безграничномъ уменьшеніи δ и оставаться далѣе сколь угодно малой, т.-е.

$$S_n - s_n = \sum (M_i - m_i)\,\delta_i < \varepsilon\,,$$

то s_n и S_n стремятся къ одному и тому же предѣлу.

При непрерывности данной функціи такъ и будетъ, ибо, какъ мы видѣли (§ 4), при достаточно маломъ δ

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n), \quad \varepsilon > 0\,.$$

Обозначимъ этотъ общій предѣлъ s_n и S_n черезъ I

$$\lim s_n = \lim S_n = I$$

Теперь покажемъ, что не только при указанномъ законѣ разбіенія, при которомъ дѣлящія интервалъ (ab) точки остаются дѣлящими и для всѣхъ послѣдующихъ разбіеній, но и при всякомъ иномъ законѣ соотвѣтствующія суммы s'_p и S'_p стремятся къ тому же предѣлу I, если только наибольшій изъ интерваловъ δ стремится къ нулю.

Дѣйствительно, пусть точки, дѣлящія интервалъ (ab) на n дѣленій, и точки, дѣлящія на p, соединены въ одну группу и даютъ разбіеніе интервала ab на интервалы, совокупность которыхъ обозначимъ черезъ (n, p), а соотвѣтствующія суммы обозначимъ черезъ s''_{np} и S''_{np}. Эти суммы являются послѣдующими суммами по пер-

воначальному закону какъ по отношенію къ суммамъ s_n и S_n, такъ и по отношенію къ суммамъ s'_p, S'_p. Слѣдовательно,

$$s_n < s''_{np} \quad \text{и} \quad S''_{np} < S_n,$$
$$s'_p < s''_{np} \quad \text{и} \quad S''_{np} < S'_p.$$

Но $s''_{np} < S''_{np}$ и потому

$$s_n < s''_{np} < S''_{np} < S'_p \quad \text{и} \quad s'_p < s''_{np} < S''_{np} < S_n,$$

откуда

$$s'_p < S_n \quad \text{и} \quad s_n < S'_p.$$

Эти соотношенія справедливы при всякомъ n и p. Переходя къ предѣлу, оставляя p какимъ-нибудь постояннымъ, а n безгранично увеличивающимся (вслѣдствіе безграничнаго уменьшенія δ), получимъ

$$s'_p \leqq \lim S_n \quad \text{и} \quad \lim s_n \leqq S'_p$$

откуда при всякомъ значеніи p имѣемъ.

$$s'_p \leqq I \leqq S'_p\,.$$

Но разность $S'_p - s'_p$ по тѣмъ же основаніямъ, какъ и разность $S_n - s_n$, можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, тѣмъ болѣе разности $I - s'_p$ и $S_n - I$ могутъ быть сдѣланы меньше любого напередъ даннаго положительнаго числа ε:

$$I - s'_p < \varepsilon \quad \text{и} \quad S'_p - I < \varepsilon,$$

т.-е.

$$\lim s'_p = \lim S'_p = I\,.$$

Слѣдовательно при всякомъ законѣ разбіенія интервала (ab), если наибольшій интервалъ δ стремится къ нулю, суммы s_n, S_n, s'_p, S'_p имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ; къ тому же предѣлу стремятся и суммы, заключенныя между s_n и S_n или s'_p и S'_p, т.-е. существуетъ **интегралъ** данной непрерывной функціи въ разсматриваемомъ интервалѣ (ab):

$$\lim s'_p = \lim S'_p = \lim \sum_1^n f(\tau_i)\,\delta_i = \lim \sum_0^{n-1} f(t_i)\,\delta_i =$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\delta_i = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Указанный процессъ составленія суммъ приводитъ такимъ образомъ, независимо отъ геометрической интерпретаціи, къ опредѣ-

ленному числу, интегралу данной функціи и если верхній предѣлъ интеграла мѣняется, мѣняется и это число, т.-е. опредѣленный интегралъ можно разсматривать какъ нѣкоторую функцію верхняго предѣла:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx\,.$$

Такое опредѣленіе интеграла, не связанное съ геометрическимъ значеніемъ первообразной функціи и ея производной (§ 3), еще не означаетъ, что $\Phi(x)$ первообразная функція, т.-е. что ея производная $\Phi'(x)$ равна подъинтегральной функціи $f(x)$; но можно доказать, основываясь на свойствахъ опредѣленныхъ интеграловъ, независящихъ отъ геометрическаго значенія интеграловъ, что

$$\Phi'(x) = f(x)\,,$$

т. е. что функція $\Phi(x)$ и есть первообразная фумкція для данной функціи $f(x)$. Дѣйствительно, по опредѣленію имѣемъ

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}.$$

Но

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt\,;$$

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt \quad \int_a^x f(t)\, dt\,.$$

По второму и третьему свойству опредѣленныхъ интеграловъ (§ 6) имѣемъ

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt =$$

$$= \int_x^a f(t)\, dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt\,.$$

По четвертому свойству

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt = (x + \Delta x - x)\, f(\xi) = \Delta x\, f(\xi)\,, \qquad \text{гдѣ} \qquad x + \Delta x > \xi > x\,.$$

Слѣдовательно,

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \Delta x\, f(\xi), \qquad \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi)$$

и

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x - 0} f(\xi)\,.$$

Но $f(x)$ непрерывная функція, и потому

$$\lim f(\xi) = f(\lim \xi) = f(x), \qquad \text{ибо} \quad \lim_{\Delta x = 0} \xi = x.$$

Такимъ образомъ

$$\Phi'(x) = f(x),$$

что требовалось доказать.

$\Phi(x)$ будетъ одной изъ первообразныхъ функцій данной, а общимъ рѣшеніемъ задачи отысканія первообразной функціи будетъ функція $\Phi(x) + C$.

Данную функцію $f(x)$ мы брали непрерывной. Но предѣлъ суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\,\delta_i$ можетъ существовать при нѣкоторыхъ условіяхъ и въ случаѣ прерывной функціи $f(x)$, именно если

$$\sum (M_i - m_i)\,\delta_i < \varepsilon,$$

гдѣ подъ M_i и m_i разумѣются соотвѣтствующія интервалу δ_i верхняя и нижняя границы функціи $f(x)$.

Такого рода функціи называются **интегрируемыми**: непрерывная функція интегрируема, но не всякая интегрируемая функція непрерывна.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Неопредѣленные интегралы:

a. $\int (x^3 - 2x^2 + 1)\,dx$ c. $\int (2x + 3)\,dx$

b. $\int x^3 (1 - x)^2\,dx$ d. $\int (a^2 + x^2)\,dx$

2. Опредѣленные интегралы:

a. $\int_2^3 (x^3 - 2x^2 + 1)\,dx$. c. $\int_1^5 (2x + 3)\,dx$.

b. $\int_0^1 x^3 (1 - x)^2\,dx$. d. $\int_a^b (a^2 + x^2)\,dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линіей $y = 2x + 3$, осью абсциссъ и двумя ординатами, изъ которыхъ одна соотвѣтствуетъ абсциссѣ 0, другая 4.

4. Построить графику функціи $y = -x^2 + 2x + 3$ и вычислить площадь, ограниченную этой линіей и осью абсциссъ.

5. Какое геометрическое значеніе имѣетъ интегралъ $\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)\,dx$?

6. Опредѣлить среднее значеніе $f(\xi)$ функціи $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ въ интервалѣ отъ -1 до 3 и опредѣлить потомъ ξ.

ГЛАВА V.

ОСНОВНЫЯ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.

§ 1. **Дифференцированіе функціи отъ функціи.** Если перемѣнная величина y зависитъ отъ другой перемѣнной u, являющейся функціей аргумента x, то первая называется функціей отъ функціи.

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x).$$

Такъ, напр.,

$$y = a^{\sin x}, \quad \text{или} \quad y = a^u, \quad \text{гдѣ} \quad u = \sin x,$$

есть функція отъ функціи: y зависитъ отъ u, а u есть $\sin x$.

Точно такъ же

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 1}, \quad \text{или} \quad y = \sqrt[3]{u}, \quad \text{гдѣ} \quad u = x^2 + 3x + 1,$$

есть функція отъ функціи.

Пусть аргументъ x получаетъ приращеніе Δx; функціи u и y при этомъ также измѣнятся, получивъ соотвѣтственныя приращенія Δu и Δy. Предполагается, что функціи $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ функціи непрерывныя и каждая имѣетъ производную по соотвѣтствующему перемѣнному. Пока Δx не безконечно малая величина, приращенія Δu и Δy также не будутъ безконечно малыми и будетъ имѣть мѣсто слѣдующее ариѳметическое тождество:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Переходя къ предѣлу, т.-е. полагая Δx стремящимся къ нулю, получимъ:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right), \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Такъ какъ Δu стремится къ нулю одновременно съ Δx, то предыдущее равенство можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{или} \quad y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) .$$

Такимъ образомъ при дифференцированіи функціи отъ функціи по независимому перемѣнному нужно взять ея производную по промежуточному перемѣнному (u) и умножить эту производную на производную промежуточнаго перемѣннаго по независимому перемѣнному.

Примѣры. 1. $y = (x^2 + 1)^3$. Обозначимъ $x^2 + 1$ черезъ u. Въ такомъ случаѣ

$$y = u^3 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{но} \quad \frac{du}{dx} = 2x .$$

Слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot 2x = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x^5 + 12x^3 + 6x .$$

Тотъ же результатъ получимъ, если предварительно возведемъ двучленъ $x^2 + 1$ въ кубъ.

2. $y = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)^2; \quad \frac{x-1}{x^3} = u; \quad y = u^2 .$

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot \frac{du}{dx} = 2\,\frac{x-1}{x^3} \cdot \frac{x^2 \cdot 1 - (x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2(x-1)(2-x)}{x^5}.$$

Можно образовать функцію отъ функціи черезъ посредство нѣсколькихъ промежуточныхъ функцій. Напр.,

$$y = F(u), \quad u = f(v) \quad \text{и} \quad v = \varphi(x), \quad \text{или} \quad y = F\left[f\left\{\varphi(x)\right\}\right].$$

Подобно предыдущему изъ тождества

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

при непрерывности функцій F, u и v, слѣдуетъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{df(v)}{dv} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

§ 2. **Производная степени съ дробнымъ и отрицательнымъ показателемъ.** Правило дифференцированія степени, выведенное для цѣлаго положительнаго показателя (стр. 317), распространяется и на случай дробныхъ и отрицательныхъ показателей.

Пусть, напр.,

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \tag{1}$$

гдѣ p и q цѣлыя и положительныя числа. Требуется показать, что

$$y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Возведя обѣ части равенства (1) въ степень q, получимъ.

$$y^q = x^p.$$

Лѣвая и правая части этого равенства представляютъ одну и ту же функцію аргумента x: правая часть выражена непосредственно черезъ x, а лѣвая черезъ посредство y, т.-е. представляетъ функцію отъ функціи, именно—степень y съ показателемъ q, а y равняется данной функціи (1).

Производныя той и другой части равны между собой

$$\frac{d(y^q)}{dx} = \frac{d(x^p)}{dx}.$$

Такъ какъ p и q цѣлыя положительныя числа, то ту и другую часть равенства (2) можно дифференцировать, примѣняя уже установленное правило дифференцированія степени съ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ. Производная правой части равна $p \cdot x^{p-1}$, а производную лѣвой находимъ по правилу дифференцированія функціи отъ функціи:

$$\frac{d(y^q)}{dx} = \frac{d(y^q)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = q\,y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Слѣдовательно,

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Изъ этого равенства можно опредѣлить искомую производную $\frac{dy}{dx}$ данной функціи y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}.$$

Подставляя вмѣсто y его выраженіе (1) черезъ x и выполняя указанныя дѣйствія надъ степенями, находимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}. \qquad (2)$$

Такимъ образомъ правило дифференцированія степени и въ случаѣ дробнаго показателя остается тѣмъ же самымъ.

Если бы показатель степени былъ отрицательнымъ, то, освобождаясь отъ отрицательнаго показателя, можно привести данную функцію къ виду дроби или частнаго; примѣняя правило дифференцированія частнаго, убѣдимся, что правило дифференцированія степени распространяется и на случай отрицательныхъ показателей. Пусть, напр.,

$$y = x^{-m},$$

гдѣ m положительное число. Освобождаясь отъ отрицательнаго показателя, получимъ

$$y = \frac{1}{x^m}.$$

По правилу дифференцированія дроби имѣемъ

$$y' = \frac{x^m \cdot 0 - 1 \cdot mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}},$$

или, по выполненіи дѣйствій надъ степенями,

$$y' = -mx^{-m-1}. \qquad (3)$$

Дифференцированіе алгебраическихъ функцій. Распространивъ правило дифференцированія степени на случай дробныхъ и отрицательныхъ показателей, мы можемъ находить производныя любыхъ алгебраическихъ функцій явныхъ или неявныхъ. О дифференцированіи раціональныхъ цѣлыхъ или дробныхъ функцій мы уже говорили раньше (стр. 324). Приведемъ теперь нѣсколько примѣровъ дифференцированія ирраціональныхъ функцій.

Примѣры. 1. $y = \sqrt[3]{x}$, или $y = x^{1/3}$

$$y' = \frac{1}{3} x^{1/3-1} = \frac{x^{-2/3}}{3}, \quad \text{или} \quad y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

2. $y = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}$, или $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^{1/2}$.

Обозначивъ выраженіе, заключенное въ скобки, одною буквою, напр. u, мы будемъ имѣть функцію отъ функціи

$$y = u^{1/2}, \quad \text{гдѣ} \quad u = x^3 + 2x^2 + 1 .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(u^{1/2})}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\, u^{1/2-1} \cdot (3x^2 + 4x) .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\, u^{-1/2}\, (3x^2 + 4x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, (3x^2 + 4x) = \frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}} .$$

3. $y = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$, или $y = u^{1/2}$, где $u = Ax^2 + Bx + C$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot u^{1/2-1} \cdot u' = \frac{2Ax + B}{2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} .$$

При дифференцированіи неявныхъ алгебраическихъ функцій примѣняются тѣ же общія правила дифференцированія (§ 6 гл. III): правило дифференцированія степени и постояннаго (§ 5 гл. III) и правило дифференцированія функціи отъ функціи. Слѣдуетъ только замѣтить, что въ выраженіе производной неявной (т.-е. опредѣляемой уравненіемъ) функціи входитъ кромѣ аргумента и сама функція.

Положимъ, напр., требуется найти производную функціи y, опредѣляемой уравненіемъ

$$y^5 + (ax + b)\, y + mx^3 + n = 0 . \tag{4}$$

Лѣвая часть этого уравненія представляетъ функцію аргумента входящаго явно и черезъ y. Такъ какъ y должно быть таково, чтобы лѣвая часть постоянно была равна нулю, то и производная лѣвой части, какъ производная постояннаго, должна равняться нулю. Находимъ производную лѣвой части, примѣняя правила дифференцированія суммы, произведенія и функціи отъ функціи:

$$\frac{d\,(y^5)}{dx} + \frac{d\,[(ax + b) \cdot y]}{dx} + \frac{d\,(m \cdot x^3)}{dx} + \frac{d\,(n)}{dx} = 0$$

y^5 есть функція отъ функціи: именно—пятая степень y; а y есть функція x, опредѣленная даннымъ уравненіемъ (5). Слѣдовательно,

$$\frac{d(y^5)}{dx} = \frac{d(y^5)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 5y^4 \cdot y' .$$

Далѣе находимъ:

$$\frac{d\,[(ax+b)\,.\,y]}{dx} = (ax+b)\,\frac{dy}{dx} + y\,\frac{d(ax+b)}{dx} = (ax+b)\,y' + y\,.\,a\,.$$

$$\frac{d\,(mx^3)}{dx} = 3mx^2 \quad \text{и} \quad \frac{d\,(n)}{dx} = 0.$$

Итакъ,

$$5y^4\,y' + (ax+b)\,y' + ay + 3mx^2 = 0\,.$$

Изъ этого уравненія искомая производная y' неявной функціи можетъ быть опредѣлена:

$$y' = -\frac{ay+3mx^2}{5y^4+ax+b}. \tag{5}$$

Въ это выраженіе производной входитъ не только аргументъ x, но и функція y. Если бы мы захотѣли выразить производную въ зависимости только отъ аргумента, то пришлось бы рѣшить данное опредѣляющее уравненіе (5) относительно y и вставить полученное рѣшеніе въ выраженіе производной (6). Но здѣсь мы встрѣтились бы съ затрудненіемъ алгебраическаго характера: уравненіе степени выше четвертой въ общемъ случаѣ требуетъ для своего рѣшенія операцій болѣе сложныхъ, чѣмъ тѣ, которыми мы располагаемъ (сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, возведеніе въ степень и извлеченіе корня).

§ 3. **Предѣлъ выраженія** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Отысканіе производныхъ показательной и логариѳмической функцій требуетъ, какъ мы увидимъ, опредѣленія предѣла выраженія $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при n стремящемся къ безконечности (положительной или отрицательной). Поэтому мы и разсмотримъ предварительно эту задачу.

Положимъ сначала, что n увеличивается безгранично, принимая цѣлыя положительныя значенія. Выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ принимаетъ слѣдующія числовыя значенія:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \left(\frac{5}{4}\right)^4,\ \ldots\ ,\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

или

$$2,\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{10}{27},\ 2\frac{113}{256},\ldots$$

Стремится ли этотъ рядъ чиселъ къ какому-либо предѣлу и, если стремится, то каковъ этотъ предѣлъ — этотъ вопросъ и предстоитъ намъ рѣшить.

Разлагая выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по биному Ньютона*), получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)\ldots2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}. \quad (1)$$

Переставляя множителей въ числителяхъ и знаменателяхъ, можно представить это разложеніе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{n}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(n-1)}{n},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (2)$$

Изъ этого разложенія слѣдуетъ, что число $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при увеличеніи n увеличивается, ибо дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ уменьшаются, а потому разности $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots$ увеличиваются, увеличиваются, слѣдовательно, третій, четвертый и т. д. члены разложенія, а кромѣ того, съ увеличеніемъ n въ концѣ разложенія (2) прибавляются новые положительные члены.

Всѣ члены разложенія (2) положительны, а сумма первыхъ двухъ равна 2. Слѣдовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2. \quad (3)$$

---

*) Биномиальные коэффиціенты въ разсматриваемомъ случаѣ мы пишемъ безъ сокращеній:

$$C_n^p=\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots p},\qquad C_n^n=1=\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots n},$$

$$C_n^{n-1}=n=\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-2)]}{1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)}\ \text{и т. д.}$$

Съ другой стороны, отбрасывая въ скобкахъ у каждаго слагаемаго разложенія (2) вычитаемыя $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$, мы увеличимъ эти слагаемыя и получимъ сумму бо́льшую первоначальной:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}. \tag{4}$$

Замѣняя въ знаменателяхъ второй части этого неравенства множители 3, 4, 5,... двойками, мы увеличимъ каждое слагаемое, въ которомъ такая замѣна производится и усилимъ, стало быть, неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Еще болѣе будетъ усилено это неравенство, если ко второй части прибавить рядъ положительныхъ чиселъ $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots$ до безконечности:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

Но члены правой части, начиная со второго, образуютъ теперь безконечно убывающую геометрическую прогрессію со знаменателемъ, равнымъ $1/_2$. Сумма такой прогрессіи равна 2.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Слѣдовательно,

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Итакъ, при всякомъ цѣломъ и положительномъ значеніи n число $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ заключено между 2 и 3. Но съ увеличеніемъ n оно, какъ было показано выше, увеличивается. Слѣдовательно (стр. 249), оно стремится къ опредѣленному предѣлу, заключенному между 2 и 3. Этотъ предѣлъ мы будемъ обозначать буквою e:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Мы предполагали въ предыдущемъ выводѣ, что n безгранично увеличивается, принимая цѣлыя и положительныя значенія. Покажемъ теперь, что выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ тому же пре-

дѣлу e, если n стремится къ положительной или отрицательной безконечности, измѣняясь непрерывно. Обозначимъ непрерывно мѣняющееся положительное число, стремящееся къ безконечности, черезъ z Требуется доказать, что

$$\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e\,.$$

Въ каждый моментъ своего измѣненія число z заключено между двумя послѣдовательными цѣлыми числами, которыя обозначимъ черезъ n и $n+1$:

$$n<z<n+1\,.$$

Вмѣстѣ съ увеличеніемъ z будутъ увеличиваться и цѣлыя числа n и $n+1$. Обратныя величины чиселъ n, z и $n+1$ находятся въ слѣдующемъ соотношеніи.

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{z}>\frac{1}{n+1},$$

и слѣдовательно,

$$1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{z}>1+\frac{1}{n+1}.$$

Возводя первую сумму этихъ послѣднихъ неравенствъ въ степень $n+1$, вторую въ степень z и третью въ степень n, т.-е. возводя бо́льшую сумму въ болѣе высокую степень, мы усилимъ эти неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{z}\right)^z>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{z}\right)^z>\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Переходя къ предѣлу, получимъ (стр. 255).

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\geqq\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\geqq\frac{\lim\limits_{n+1=\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n+1=\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)},$$

или

$$e\geqq\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\geqq e\,.$$

Слѣдовательно,

$$\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e\,.$$

Если z стремится, принимая отрицательныя значенія, къ отрицательной безконечности, то предѣлъ выраженія $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$ будетъ тотъ же, т.-е. e. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $z=-(t+1)$, гдѣ t положительное число; такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right),$$

и слѣдовательно,

$$\lim_{z=-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=\lim_{t=\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t=\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e.$$

Итакъ, какимъ бы способомъ z по абсолютной величинѣ ни увеличивалось, перемѣнное число $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$ стремится къ одному и тому же предѣлу e.

Число e играетъ такую же важную роль въ анализѣ, какъ и число π, т.-е. число, выражающее отношеніе окружности къ діаметру. Между прочимъ число e служитъ основаніемъ такъ называемыхъ натуральныхъ или неперовыхъ или также гиперболическихъ логариѳмовъ, о которыхъ рѣчь будетъ впереди, и называется часто основаніемъ неперовыхъ логариѳмовъ.

Вычисленіе основанія неперовыхъ логариѳмовъ, т.-е. числа e. Приближенныя значенія числа e—основанія неперовыхъ логариѳмовъ — можно получить, вычисляя выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при различныхъ значеніяхъ n. Напр., при $n=1000$ для приближеннаго значенія e имѣемъ $1{,}001^{1000}$. Но непосредственное вычисленіе очень высокихъ степеней практически граничитъ съ невозможностью. Поэтому естественно изыскать другіе способы вычисленія.

Обозначимъ ради сокращенія письма вторую часть неравенства (4) черезъ s_n:

$$s_n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}. \tag{5}$$

Неравенство (4) можно теперь написать въ такомъ видѣ:

$$s_n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4'}$$

При переходѣ къ предѣлу въ предположеніи, что n стремится къ

безконечности, будемъ имѣть

$$\lim_{n=\infty} s_n \geqq \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{или} \qquad \lim_{n=\infty} s_n \geqq e. \tag{6}$$

Съ другой стороны, если въ разложенiи (2) возьмемъ только часть всей совокупности слагаемыхъ, то получимъ слѣдующее неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right),$$

гдѣ p—цѣлое число, меньшее n.

Считая p постояннымъ, а n перемѣннымъ, переходимъ къ предѣлу, предполагая, что n стремится къ безконечности: предѣлъ лѣвой части будетъ оставаться больше предѣла правой части или сдѣлается равнымъ ему (стр. 255):

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p},$$

или

$$e \geqq s_p\,. \tag{7}$$

Но если n стремится къ безконечности, а $p<n$, то p можно считать какимъ угодно цѣлымъ положительнымъ конечнымъ числомъ. Такимъ образомъ при всякомъ такомъ значенiи p имѣетъ мѣсто неравенство

$$s_p \leqq e\,. \tag{7'}$$

Слѣдовательно, считая p перемѣннымъ и стремящимся къ безконечности, изъ предыдущаго неравенства или равенства будемъ имѣть

$$\lim_{p=\infty} s_p \leqq e\,. \tag{8}$$

Сопоставляя соотношенiя (6) и (8), мы должны замѣтить, что

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{p=\infty} s_p\,,$$

такъ какъ s_n и s_p одинаковыя перемѣнныя числа лишь при различномъ обозначенiи перемѣннаго указателя. Но въ такомъ случаѣ изъ соотношенiй (6) и (8), т.-е.

$$\lim_{n=\infty} s_n \geqq e \qquad \text{и} \qquad \lim_{n=\infty} s_n \leqq e$$

слѣдуетъ, что

$$\lim_{n=\infty} s_n = e\,. \tag{9}$$

Такимъ образомъ число e можетъ быть опредѣлено какъ сумма безконечно большого числа слагаемыхъ, иначе—какъ безконечный рядъ:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} + \cdots \tag{10}$$

Число s_n (5) увеличивается, приближаясь къ своему предѣлу e, и потому представляетъ его приближенное значеніе съ недостаткомъ Чтобы найти приближенное значеніе того же числа съ избыткомъ и такимъ образомъ имѣть возможность оцѣнить степень точности вычисленія, поступимъ слѣдующимъ обрезомъ. Въ опредѣляющемъ рядѣ (9) замѣнимъ въ знаменателяхъ каждый множитель, превышающій $n+1$, числомъ $n+1$; тѣмъ самымъ мы увеличимъ правую часть этого равенства и обратимъ его въ неравенство.

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} +$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n(n+1)} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n(n+1)^3} + \cdots$$

или

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots n} +$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right].$$

Члены правой части, заключенные въ скобки, образуютъ безконечно убывающую геометрическую прогрессію, сумма которой равна въ предѣлѣ $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ неравенство

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}, \tag{11}$$

или

$$e < s_n + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}. \tag{11'}$$

Такъ какъ

$$\lim_{n=\infty}\left(s_n+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n=\infty}s_n+\lim_{n=\infty}\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}=e,$$

то число $s_n+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}$ будетъ приближеннымъ значеніемъ числа e, именно, въ силу неравенства (11'), приближеннымъ значеніемъ съ избыткомъ. Замѣняя число e числомъ s_n или $s_n+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}$ мы дѣлаемъ ошибку, меньшую дроби $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}$. Члены ряда s_n легко вычисляются: начиная съ третьяго, надо дѣлить предыдущее слагаемое на новый множитель знаменателя.

Полагая, напр., $n=10$, будемъ имѣть

$$\frac{1}{1.2.3\ldots10}\cdot\frac{1}{10}=0,000\,000\,027\ldots$$

Слѣдовательно, вычисляя s_{10} съ девятью десятичными знаками, получимъ семь точныхъ десятичныхъ знаковъ для e:

$$s_{10}=2,718\,281\,801\ldots$$
$$e=2,718\,281\,8\ldots$$

Ирраціональность числа e. Число e не можетъ быть раціональнымъ, т.-е. дробью съ цѣлымъ числителемъ и цѣлымъ знаменателемъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли

$$s_n<e<s_n+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$e=s_n+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\theta}{n},\quad \text{гдѣ}\quad 0<\theta<1,$$

или

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\theta}{n}.\qquad(12)$$

Число θ зависитъ отъ n, заключено между нулемъ и единицей и не можетъ быть равнымъ ни нулю, ни единицѣ.

Допустимъ, что число e раціонально, напр. равно $\frac{a}{b}$, гдѣ a и b цѣлыя числа. Въ равенствѣ (12) для n можно брать какое угодно цѣлое число, напр. b, соотвѣтственно подбирая число θ. Такимъ образомъ, если $e=\frac{a}{b}$, то должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{a}{b}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots b}+\frac{1}{1.2.3\ldots b}\cdot\frac{\theta}{b}.$$

По умноженіи обѣихъ частей этого равенства на произведеніе $1.2.3\ldots b$, всѣ члены его, кромѣ послѣдняго $\frac{\theta}{b}$, будутъ цѣлыми числами. Такимъ образомъ, опредѣляя $\frac{\theta}{b}$, будемъ имѣть

$$\frac{\theta}{b} = \text{цѣлое число или нуль.}$$

Но θ меньше 1 и не равно нулю, и потому $\frac{\theta}{b}$ правильная дробь и не можетъ равняться цѣлому числу или нулю. Слѣдовательно, допущеніе наше не вѣрно: число e не можетъ быть раціональнымъ.

Доказывается, кромѣ того, что число e не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами и представляетъ поэтому, какъ и число π, число трансцендентное.

§ 4. Производная показательной функціи и соотвѣтствующая формула интегральнаго исчисленія. Найдемъ производную показательной функціи

$$y = a^x. \tag{1}$$

По общему пріему составленія производной мы должны опредѣлить предварительно для даннаго приращенія аргумента Δx соотвѣтственное приращеніе функціи Δy:

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x}.$$

Слѣдовательно,

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x, \qquad \text{или} \qquad \Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1). \tag{2}$$

Составимъ теперь отношеніе приращенія функціи къ соотвѣтственному приращенію аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right). \tag{3}$$

Разность $a^{\Delta x} - 1$ при Δx, стремящемся къ нулю — величина безконечно малая (стр. 279, 280). Обозначимъ ее черезъ $\frac{1}{n}$, гдѣ n число, стремящееся къ безконечности*):

$$a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{n}. \tag{4}$$

*) Если Δx стремится къ нулю, оставаясь положительнымъ числомъ (при правостороннемъ подходѣ къ разсматриваемой точкѣ графики), то при $a > 1$ $a^{\Delta x} - 1$ положительное число и n должно стремиться къ $+\infty$. Если же Δx стре-

Отсюда

$$a^{\Delta x}=1+\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \Delta x=\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Слѣдовательно, равенство (3) принимаетъ видъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^x}{n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^x}{\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}. \tag{5}$$

Переходимъ теперь къ предѣлу, предполагая, что Δx стремится къ нулю, а стало быть n къ положительной или отрицательной безконечности:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{n=\infty}\frac{a^x}{\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a^x}{\lim\limits_{n=\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Логариѳмическая функція для тѣхъ значеній аргумента, для которыхъ она опредѣлена, т.-е. для значеній большихъ нуля, функція непрерывная и потому (стр. 268)

$$\lim_{n=\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log_a\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad [\lim f(x_n)=f(\lim x_n)].$$

Но

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Слѣдовательно,

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^x}{\log_a e}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{a^x}{\log_a e}. \tag{6}$$

Въ частномъ случаѣ, если $a=e$, мы имѣемъ показательную функцію

$$y=e^x. \tag{7}$$

Производная этой функціи равна самой же функціи:

$$\frac{dy}{dx}=e^x,$$

ибо $\log_a e=\log_e e=1$.

мится къ нулю, оставаясь отрицательнымъ числомъ, то $a^{\Delta x}-1$ будетъ числомъ отрицательнымъ, ибо $(-\Delta x)$ число положительное и $a^{-\Delta x}>1$, а $a^{\Delta x}<1$. Въ этомъ случаѣ число n должно стремиться къ $-\infty$.

Формулу (6) можно преобразовать такъ, чтобы въ нее входилъ логариөмъ при основаніи e, т.-е. логариөмъ натуральный, иначе — неперовъ или гиперболическій. Натуральный логариөмъ будемъ обозначать символомъ *log* безъ особаго указанія на основаніе

Пусть встрѣчающійся въ формулѣ (6) логариөмъ имѣетъ величину c:

$$log_a e = c .$$

По опредѣленію логариөма при основаніи a (стр. 233) имѣемъ:

$$a^c = e .$$

Беремъ натуральные логариөмы отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$c \,.\, log\, a = 1 , \qquad (log\, e = 1),$$

откуда

$$c = \frac{1}{log\, a} \qquad \text{или} \qquad log_a e = \frac{1}{log\, a} .$$

Подставляя это выраженіе въ производную показательной функціи $y = a^x$, получимъ

$$\frac{dy}{dx} = a^x \, log\, a . \tag{6'}$$

Итакъ, имѣемъ слѣдующія формулы дифференціальнаго исчисленія:

$$y = e^x, \qquad \frac{dy}{dx} = e^x , \qquad dy = e^x dx . \tag{7}$$

$$y = a^x, \qquad \frac{dy}{dx} = a^x \, log\, a, \qquad dy = a^x \, log\, a\, dx . \tag{8}$$

Примѣры: 1. $y = e^{x^2}$, или $y = e^u$, гдѣ $u = x^2$.

$$y' = \frac{de^u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \,.\, u' = e^{x^2} \,.\, 2x ; \qquad dy = 2x\, e^{x^2} dx .$$

2. $y = e^{-x}$; $\quad y' = e^{-x} \,.\, (-1) = -e^{-x}$.

3. $y = e^{-x^2}$; $\quad y' = e^{-x^2} \,.\, (-2x) = -2xe^{-x^2}$.

4. $y = 3e^{x^2-5x+1}$; $\quad y' = 3e^{x^2-5x+1} \,.\, (2x-5)$.

5. $y = e^{\varphi(x)}$; $\quad y' = e^{\varphi(x)} \,.\, \varphi'(x)$.

6. $y = \frac{e^{3x}}{x}$;

$$y' = \frac{x(e^{3x})' - e^{3x}\,.\,(x)'}{x^2} = \frac{x\,.\,e^{3x}\,.\,3 - e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3x}(3x-1)}{x^2}\,.$$

Примѣчаніе. Функція $\frac{e^{3x}}{x}$ достигаетъ minimum'a при $x = \frac{1}{3}$.

7. $y = x\,e^x$; $\quad y' = x\,e^x + e^x = e^x(x+1)$.

8. $y = a^{x^2}$; $\quad y' = a^{x^2}\log a\,.\,2x = 2\,a^{x^2}\,x\log a$.

Формулы (7) и (6) можно обратить, считая найденныя производныя данными функціями, а прежде данныя функціи искомыми первообразными функціями. Такимъ образомъ получимъ соотвѣтствующія формулы интегральнаго исчисленія.

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{8}$$

$$\int a^x \log a\,dx = a^x + C, \qquad \text{или} \qquad \log a \int a^x\,dx = a^x + C,$$

или наконецъ

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C. \tag{9}$$

(Почему вмѣсто $\frac{C}{\log a}$ можно писать просто C?)

§ 5. **Производная логариѳмической функціи и соотвѣтствующая формула интегральнаго исчисленія.** Производную логариѳмической функціи

$$y = \log_a x \tag{1}$$

можно найти или общимъ пріемомъ, составляя отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и переходя къ предѣлу, или разсматривая логариѳмическую функцію какъ функцію обратную показательной. Придерживаясь общаго пріема, находимъ приращеніе логариѳма:

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)\,.$$

Слѣдовательно,

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x\,,$$

или

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right). \tag{2}$$

Находимъ теперь отношеніе приращенія функціи къ приращенію

аргумента.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right). \tag{3}$$

Прежде чѣмъ перейти къ предѣлу для нахожденія производной логариѳмической функціи, преобразуемъ вторую часть равенства (3), полагая $\frac{\Delta x}{x}$ равнымъ $\frac{1}{n}$.

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \Delta x = \frac{x}{n}. \tag{4}$$

При измѣненіи приращенія аргумента Δx аргументъ x разсматривается какъ постоянное. Поэтому, когда Δx стремится къ нулю, стремится къ нулю и $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$, а слѣдовательно n стремится къ безконечности.

Преобразовывая помощью подстановокъ (4) вторую часть равенства (3), получимъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n}{x}\, log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \text{или} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x}.$$

Слѣдовательно,

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n = \infty} \frac{log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x}.$$

Въ силу непрерывности логариѳма $\lim log_a u = log_a \lim u$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{log_a \lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x}.$$

Но $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{log_a e}{x}. \tag{5}$$

Такъ какъ $log_a e = \frac{1}{log\, a}$ (§ 4), то формулу (5) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\, log\, a}. \tag{5'}$$

Если разсматривается логариѳмическая функція при неперовомъ основаніи e, т.-е.

$$y = \log x,$$

то производная имѣетъ болѣе простой видъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (a = e\,,\ \log a = \log e = 1) \tag{6}$$

Формулы (5') и (6) можно получить инымъ путемъ, именно разсматривая логариѳмъ $y = \log_a x$, какъ функцію обратную показательной:

$$x = a^y.$$

Дифференцируемъ ту и другую часть этого опредѣляющаго равенства, разсматривая правую часть какъ функцію отъ функціи:

$$1 = \frac{da^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Производная показательной функціи намъ уже извѣстна:

$$\frac{da^y}{dy} = a^y \log a$$

Слѣдовательно,

$$1 = a^y \log a \cdot \frac{dy}{dx};$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \log a}.$$

Но $a^y = x$, и потому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log a}. \tag{5'}$$

Подобнымъ же образомъ, если $y = \log x$ или $x = e^y$, то, дифференцируя ту и другую часть послѣдняго равенства, получимъ

$$1 = \frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{или} \quad 1 = e^y \cdot \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \tag{6}$$

Примѣры дифференцированія функцій, содержащихъ логариѳмъ.

1. $y = \log f(x)$, или $y = \log u$, гдѣ $u = f(x)$.

$$y' = \frac{d \log u}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \quad y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

2. $y = \log (x^2)$; $y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$ иначе $y = \log (x^2) = 2 \log x$; $y' = \frac{2}{x}$.

3. $y = \frac{\log x}{x-1}$; $\quad y' = \frac{(x-1) \cdot \frac{1}{x} - \log x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \log x}{x(x-1)^2}$.

4. $y = \log_a (x^3 - 2x + 1)$;

$$y' = \frac{1}{(x^3-2x+1) \log a} \cdot (3x^2 - 2) = \frac{3x^2-2}{(x^3-2x+1) \log a}.$$

5. $y = \log \frac{x-1}{x+1}$;

Первый способъ: $y' = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{(x+1) \cdot 1 - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}$

Второй способъ: $y = \log (x-1) - \log (x+1)$; $\quad y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$.

6. $y = \log (e^{x^2} - 1)$; $\quad y' = \frac{1}{e^{x^2}-1} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}-1}$.

Соотвѣтствующія формулы интегральнаго исчисленія. Формулу дифференціальнаго исчисленія (6)

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad \text{или} \qquad d \log x = \frac{dx}{x} \tag{6}$$

можно обратить и получить соотвѣтствующую формулу интегральнаго исчисленія, считая найденную производную **данной** (подъинтегральной) функціей, а прежде данную **искомой** первообразной функціей или интеграломъ.

Символъ $\int \frac{dx}{x}$ означаетъ слѣдующій вопросъ: какая функція имѣетъ производную, равную данной подъинтегральной функціи, т.-е. $\frac{1}{x}$? Иначе—какая функція имѣетъ дифференціалъ $\frac{dx}{x}$?

Формула дифференціальнаго исчисленія (6) даетъ отвѣтъ на этотъ

вопросъ: одна изъ такихъ функцій есть $log\, x$, ибо $\frac{d\, log\, x}{dx} = \frac{1}{x}$; общее же рѣшеніе получимъ, прибавляя къ этой функціи произвольное постоянное:

$$\int \frac{dx}{x} = log\, x + C. \tag{7}$$

Задача. Вычислить площадь, ограниченную вѣтвью гиперболы, данной уравненіемъ

$$y = \frac{1}{x},$$

осью абсциссъ и двумя ординатами, изъ которыхъ одна соотвѣтствуетъ абсциссѣ 1, а другая x (черт. 211).

Рѣшеніе. Искомая площадь равна опредѣленному интегралу:

$$\text{пл. } B\overset{\frown}{AM}N = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Но

$$\int \frac{dx}{x} = log\, x + C$$

Черт. 211.

Слѣдовательно,

$$\text{пл. } B\overset{\frown}{AM}N = \int_1^x \frac{dx}{x} = [log\, x]_1^x = log\, x; \quad (log\, 1 = 0).$$

Понятно поэтому, почему неперовскіе или натуральные логариѳмы называются также гиперболическими.

$$\text{Если } ON = 10, \quad \text{то пл. } B\overset{\frown}{AM}N = \int_1^{10} \frac{dx}{x} = log\, 10.$$

По первоначальному опредѣленію $log\, 10$ равняется показателю степени числа e, равной 10:

$$10 = e^z, \quad z = log\ 10.$$

Вычисленіе логариѳмовъ по этому опредѣленію, какъ уже было отмѣчено (стр. 233), представляетъ затрудненія, граничащія съ невозможностью. Но вычисляя опредѣленный интегралъ $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$ согласно его опредѣленію, мы можемъ получить его числовое значеніе съ любою степенью точности. На стр. 362 такое вычисленіе было сдѣлано и получены приближенныя значенія съ избыткомъ и недостаткомъ съ ошибкой, меньшей 0,9:

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} \sim 2{,}83 \quad \text{и} \quad \int_1^{10} \frac{dx}{x} \sim 1{,}93.$$

Но и этотъ способъ вычисленія логариѳмовъ еще не представляется лучшимъ.

§ 6. **Графики показательной и логариѳмической функцій.** Изслѣдуемъ показательную и логариѳмическую функціи помощью ихъ производныхъ

Показательная функція.

$$y = e^x; \qquad y' = e^x; \qquad y'' = e^x .$$

Показательная функція, ея первая и вторая производныя положительны при всякомъ значеніи аргумента. Слѣдовательно, функція эта постоянно возрастаетъ, а графика ея расположена надъ осью абсциссъ и выпуклостью постоянно обращена внизъ.

Вычислимъ координаты нѣсколькихъ точекъ этой кривой, напр. при $x = -3$, -2, -1, 0, 1, 2, 3, пользуясь обыкновенными логариѳмическими таблицами:

1. $log_{10}\, e = 0{,}43429,\quad e = 2{,}718\ldots \quad log_{10}\, e^{-1} = \bar{1}{,}56571,\quad e^{-1} = 0{,}3679\ldots$
2. $log_{10}\, e^2 = 0{,}86858,\quad e^2 = 7{,}389\ldots \quad log_{10}\, e^{-2} = \bar{1}{,}13142,\quad e^{-2} = 0{,}1353\ldots$
3. $log_{10}\, e^3 = 1{,}30287,\quad e^3 = 20{,}085\ldots \quad log_{10}\, e^{-3} = \bar{2}{,}69713,\quad e^{-3} = 0{,}0497\ldots$

Итакъ,

$$(y)_{x=-3} \sim 0{,}05\,; \qquad (y)_{x=-2} \sim 0{,}14\,; \qquad (y)_{x=-1} \sim 0{,}4\,; \qquad (y)_{x=0} = 1\,;$$

$$(y)_{x=1} \sim 2{,}7\,; \qquad (y)_{x=2} \sim 7{,}4\,; \qquad (y)_{x=3} \sim 20\,.$$

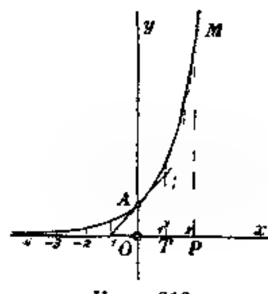
Опредѣлимъ еще направленіе касательной въ точкѣ пересѣченія кривой съ осью ординатъ:

$$(y')_{x=0} = e^0 = 1\,, \qquad \text{но} \qquad y' = tg\,\alpha\,;$$

слѣдовательно,

$$(\alpha)_{x=0} = 45^0.$$

Этими данными видъ кривой опредѣляется вполнѣ (черт. 212).



Черт 212.

Не трудно вывести очень простое правило построенія касательной въ каждой точкѣ этой кривой.

Пусть TM касательная въ точкѣ M. Изъ прямоугольнаго треугольника TPM имѣемъ

$$TP\,.\,tg\,\alpha = PM \qquad \text{или} \qquad TP\,.\,y' = y\,.$$

Но $y = y'$ и слѣдовательно,

$$TP = 1\,.$$

Такимъ образомъ проекція касательной (т.-е. отрѣзка отъ точки пересѣченія касательной съ осью абсциссъ до точки прикосновенія M) на ось абсциссъ всегда для разсматриваемой кривой постоянна и равна единицѣ принятаго масштаба даннаго чертежа. Эта проекція носитъ названіе подкасательной или субтангенса.

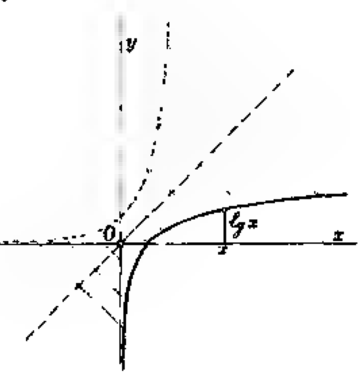
Логариѳмическая функція.

$$y = log\, x; \quad y' = \frac{1}{x}; \quad y'' = -\frac{1}{x^2}.$$

Логариѳмическая функція опредѣлена (стр. 284) только для положительныхъ значеній аргумента, а при такихъ значеніяхъ аргумента первая производная положительна. Слѣдовательно, логариѳмическая функція постоянно возрастаетъ. Такъ какъ вторая производная отрицательна, то кривая, изображающая разсматриваемую функцію, обращена постоянно выпуклостью вверхъ.

Такъ какъ $(y)_{x=1} = 0$ и $(y')_{x=1} = 1$, то кривая пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкѣ (1, 0) и имѣетъ въ этой точкѣ касательную, наклоненную къ оси абсциссъ подъ угломъ въ 45°.

Кривая имѣетъ видъ, представленный на черт. 213. Не трудно замѣтить родство этой кривой съ графикой показательной функціи. Если перевернуть чертежъ около биссектрисы координатнаго угла, то графика показательной функціи совпадаетъ съ графикой логариѳмической и наоборотъ. Въ самомъ дѣлѣ, при такомъ перемѣщеніи плоскости координатъ ось абсциссъ совпадаетъ съ осью ординатъ, а ось ординатъ съ осью абсциссъ и уравненіе



Черт. 213.

$$y = e^x$$

преобразуется въ уравненіе

$$x = e^y, \quad \text{или} \quad y = log\, x.$$

§ 7. **Примѣненія показательной функціи.** Показательная и логариѳмическая функціи имѣютъ довольно частыя примѣненія для описанія соотвѣтствующихъ явленій природы и жизни. Разсмотримъ нѣкоторыя изъ этихъ примѣненій.

Органическій ростъ. Пусть капиталъ K_0 отданъ въ ростъ по сложнымъ процентамъ $p^0/_0$, при чемъ капитализація наросшихъ процентныхъ денегъ производится ежегодно. Въ такомъ случаѣ капиталъ K_t, который получится при такомъ ростѣ черезъ t лѣтъ, вычисляется по слѣдующей извѣстной формулѣ:

$$K_t = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \tag{1}$$

Если капитализація процентныхъ денегъ происходитъ чаще, напр., черезъ каждую $\frac{1}{m}$ года, то предыдущая формула (1) принимаетъ видъ:

$$K_t = K_0\left[\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^m\right]^t$$

или

$$K_t = K_0\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt}, \quad \text{гдѣ} \quad n = \frac{100m}{p} \quad \text{и} \quad r = \frac{p}{100}.$$

Если капитализація происходитъ непрерывно, то m, а стало-быть $n = \frac{100m}{p}$ нужно положить равнымъ ∞:

$$K_t = \lim_{n=\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt} = K_0\left[\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt}$$

или

$$K_t = K_0 e^{rt}.$$

Обозначая t черезъ x, K_t черезъ y, а K_0 черезъ y_0, будемъ имѣть

$$y = y_0 e^{rx}. \tag{2}$$

Такимъ образомъ процентный ростъ при непрерывной капитализаціи совершается по закону показательной функціи. Всякій органическій ростъ, какъ, напр., увеличеніе населенія большихъ городовъ или государствъ, ростъ организма, какъ собранія продуцирующихъ клѣточекъ и т. п., когда количество продуцируемаго въ каждый моментъ пропорціонально количеству уже накопившихся продуктовъ, совершается или имѣетъ тенденцію совершаться по этому закону.

Убывающая показательная функція. Довольно часто пользуются показательной функціей съ отрицательнымъ показателемъ при описаніи физическихъ и химическихъ явленій, когда какая-либо величина, напр., дѣйствіе радіоактивныхъ веществъ, количество вещества, не вступившаго еще въ соотвѣтствующую хими-

ческую реакцію и т. п. — убываетъ болѣе или менѣе быстро съ теченіемъ времени. Показательная функція

$$y = ae^{-kx}, \tag{3}$$

гдѣ a и k - параметры, опредѣляемые начальными условіями разсматриваемаго явленія, въ этихъ случаяхъ довольно близко соотвѣтствуетъ результатамъ опыта. Графика этой функціи (черт. 214) пересѣкаетъ ось ординатъ въ точкѣ, отстоящей отъ начала координатъ на разстояніи, равномъ единицѣ принятаго масштаба; а касательная въ этой точкѣ имѣетъ направленіе, опредѣляемое производной

$$y' = -a\,.\,k\,.\,e^{-kx} \quad \text{и} \quad (y')_{x=0} = -ak.$$

Черт. 214.

На черт. 214

$$a = 1, \quad k = 1 \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{3}.$$

Соотвѣтственно значенію k разсматриваемая функція можетъ выражать законъ и быстраго и медленнаго убыванія.

§ 8. **Производныя тригонометрическихъ функцій и соотвѣтствующія формулы интегральнаго исчисленія.** Всѣ тригонометрическія функціи могутъ быть выражены черезъ одну какую-нибудь изъ нихъ (гл. I, § 5). Поэтому для нахожденія производныхъ всѣхъ тригонометрическихъ функцій достаточно опредѣлить непосредственно, исходя изъ опредѣленія, производную только одной какой-нибудь функціи, напр. синуса. Выразивъ всякую данную тригонометрическую функцію черезъ синусъ, мы по правиламъ дифференцированія суммы, произведенія, дроби и функціи отъ функціи найдемъ производную и этой функціи.

Производная синуса: $y = \sin x$. Давая аргументу x приращеніе Δx, находимъ соотвѣтствующее приращеніе Δy разсматриваемой функціи, т.-е. синуса.

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \quad \text{и} \quad \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Но разность синусовъ равняется удвоенному произведенію косинуса полусуммы ихъ дугъ на синусъ полуразности этихъ дугъ [стр. 238];

слѣдовательно,

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Опредѣлимъ теперь отношеніе приращенія функціи къ соотвѣтствующему приращенію аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \tag{1}$$

Переходя къ предѣлу, будемъ имѣть

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x - 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}. \tag{2}$$

Такъ какъ $\cos x$—функція непрерывная, то

$$\lim_{\Delta x = 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Съ другой стороны мы знаемъ (стр. 260), что отношеніе синуса къ дугѣ его, когда эта дуга безгранично уменьшается, стремится къ единицѣ:

$$\lim_{\Delta x - 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \underline{\cos x}. \tag{3}$$

Производная косинуса: $y = \cos x$. Такъ какъ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то дифференцированіе косинуса сводится къ дифференцированію функціи отъ функціи:

$$y = \sin u, \quad \text{гдѣ} \quad u = \frac{\pi}{2} \quad x$$

Дифференцируя находимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin u}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Но

$$\frac{d\sin u}{du} = \cos u - \cos\left(\frac{\pi}{2} \quad x\right), \quad \text{а} \quad \frac{du}{dx} = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -1.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x\,. \tag{4}$$

Примѣры: 1. $y = 3 \sin (x^2 - x)$, или $y = 3 \sin u$, гдѣ $u = x^2 - x$.

$$\frac{dy}{dx} = 3\,\frac{d \sin u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cos (x^2 - x)\,.\,(2x - 1) = 3\,(2x - 1)\,.\cos (x^2 - x)\,.$$

2. $y = \cos \dfrac{x-1}{x^2}$; $\quad y' = -\sin \dfrac{x-1}{x^2} \cdot \dfrac{x^2\,.\,1 - (x - 1)\,.\,2x}{x^4}$;

$$y' = \frac{x-2}{x^3}\,\sin \frac{x-1}{x^2}\,.$$

3. Законъ простого колебанія или гармоническаго движенія, иначе — колебаніе по закону синуса:

$$s = a \sin \left[\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right],$$

гдѣ s — отклоненіе колеблющейся точки отъ начальной точки O къ моменту времени t; t — перемѣнное время, T — періодъ колебнія, a — амплитуда (величина наибольшаго отклоненія отъ начальной точки O), α—фаза (величина, опредѣляющая положеніе колеблющейся точки въ начальный моментъ). Опредѣлить скорость и ускореніе движущейся точки (гл. III, § 9).

$$\frac{ds}{dt} = a \cos\left[\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right] \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi a}{T} \cos\left[\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right];$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{2\pi a}{T} \sin\left[\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right] \cdot \frac{2\pi}{T} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin\left[\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right].$$

. $y = a\,e^{-kx} \sin x$; $\quad y' = a\,[e^{-kx} \cos x + \sin x\,.\,e^{-kx}\,.\,(-k)]$;

$$y' = a e^{-kx} (\cos x - k \sin x)\,.$$

Производная тангенса: $y = tg\,x$. Производную тангенса можно найти какъ производную дроби, ибо

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Примѣняя правило дифференцированія дроби (стр. 323), находимъ

$$\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

или

$$\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (5)$$

Производная котангенса: $y = cotg\,x$. Точно такъ же, примѣняя правило дифференцированія дроби, найдемъ производную котангенса:

$$cotg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad \frac{d\,cotg\,x}{dx} = \frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin x^2} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x},$$

или

$$\frac{d\,cotg\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (6)$$

Что касается производныхъ тригонометрическихъ функцій $\sec x$ и $cosec\,x$, то ихъ мы выводить не будемъ, такъ какъ онѣ требуются рѣже, къ тому же ихъ нетрудно найти, замѣнивъ $\sec x$ черезъ $\frac{1}{\cos x}$, а $cosec\,x$ черезъ $\frac{1}{\sin x}$.

Производныя тригонометрическихъ функцій, какъ слѣдуетъ изъ формулъ (3), (4), (5) и (6), суть функціи также тригонометрическія.

Примѣры. 5. $y = 5\,tg(1 - x^2)$, или $y = 5\,tg\,u$; гдѣ $u = 1 - x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{d\,tg\,u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5\frac{1}{\cos^2 u} \cdot (-2x) = -\frac{10x}{\cos^2(1 - x^2)}.$$

6. $y = 1 + tg^2 x$, $y' = 2\,tg\,x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\,tg\,x}{\cos^2 x}$.

7. $y = \sec^2 x$, или $y = \frac{1}{\cos^2 x}$,

$$y' = \frac{\cos^2 x \cdot 0 - 1 \cdot 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = \frac{2\,tg\,x}{\cos^2 x}.$$ (срав. съ пр. 6).

8. $y = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; $y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$.

9. $y = \log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$, или $y = \log u$, гдѣ $u = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$;

$$y' = \frac{d\log u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{1}{\cos x}.$$

10. $y = e^{\sin x}$; $y' = e^{\sin x} . \cos x$.

11. $y = 3\sec 2x + \operatorname{cosec} x$, или $y = \frac{3}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin x}$

$$y' = \frac{\cos 2x . 0 - 3 . (-\sin 2x) . 2}{\cos^2 2x} + \frac{\sin x . 0 - 1 . \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{6\sin 2x}{\cos^2 2x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{6\, tg\, 2x}{\cos 2x} - \frac{\cot g\, x}{\sin x}.$$

Соотвѣтствующія формулы интегральнаго исчисленія Будемъ теперь считать въ формулахъ (3), (4), (5) и (6) найденныя производныя данными функціями, а прежде данныя — искомыми первообразными функціями или интегралами. Обращая такимъ образомъ эти формулы дифференціальнаго исчисленія, получимъ соотвѣтственныя формулы интегральнаго исчисленія.

Формулы дифференціальн. исчисленія.	Формулы интегральнаго исчисленія.	
$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$; $d\sin x = \cos x\, dx$,	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$.	(7)
$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$; $d(-\cos x) = \sin x\, dx$;	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.	(8)
$\frac{d\, tg\, x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$; $d\, tg\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}$;	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$.	(9)
$\frac{d\cot g\, x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $d(-\cot g\, x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$;	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\, x + C$.	(10)

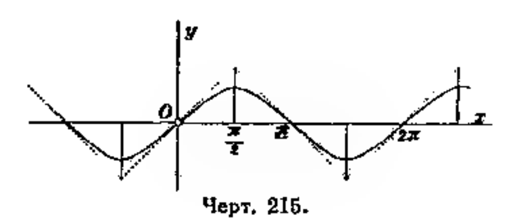
§ 9. Графики функцій: $sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$ и $cotg\,x$. Изслѣдуемъ ходъ измѣненія разсматриваемыхъ функцій помощью первой и второй производныхъ и соотвѣтственно этому изслѣдованію построимъ графики этихъ функцій.

Синусоида: $y = sin\,x$. Графика синуса называется синусоидой. Найдемъ первую и вторую производныя синуса:

$$y = sin\,x; \quad y' = cos\,x; \quad y'' = -sin\,x.$$

При $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\ldots, k\pi$, гдѣ k—цѣлое положительное или отрицательное число, $sin\,x$ обращается въ нуль. Слѣдовательно, въ точкахъ, абсциссы которыхъ равны $k\pi$, синусоида пересѣкаетъ ось абсциссъ.

Такъ какъ $y'' = -y$, то дуги синусоиды, расположенныя надъ осью абсциссъ, выпуклостью обращены вверхъ, а расположенныя подъ осью внизъ. Въ точкахъ пересѣченія съ осью абсциссъ синусоида имѣетъ точки перегиба (черт. 215).



Черт. 215.

При $x = k\pi$, первая производная $cos\,x$ принимаетъ значенія $+1$, если k четное цѣлое число и -1, если k нечетное цѣлое число. Слѣдовательно, въ точкахъ $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(4\pi, 0)$ и т. д. касательная къ синусоидѣ наклонена къ оси абсциссъ подъ угломъ въ 45^0, ибо $tg\,\alpha = 1$, а въ точкахъ $(\pi, 0)$, $(3\pi, 0)$, $(5\pi, 0) \ldots$ подъ угломъ въ 135^0, ибо $tg\,\alpha = -1$.

Maximum'а синусъ достигаетъ при $x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{2}; \ldots\ldots, \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, гдѣ k — цѣлое положительное или отрицательное число, ибо при такихъ значеніяхъ аргумента первая производная обращается въ нуль, а вторая имѣетъ отрицательныя значенія. Величина maximum'а равна единицѣ:

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right) = 1.$$

При $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ синусъ достигаетъ minimum'a, равнаго отрицательной единицѣ, ибо при такихъ значеніяхъ аргумента первая производная обращается въ нуль, а вторая имѣетъ положительный знакъ.

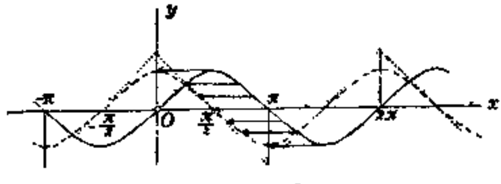
Косинусоида: $y=\cos x$. Подобное же изслѣдованіе можно сдѣлать и для косинуса. Но можно также построеніе графики косинуса свести къ построенію синусоиды, ибо

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Такимъ образомъ графика косинуса въ то же время служитъ графикой синуса

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

аргументъ котораго увеличенъ на $\frac{\pi}{2}$: ордината синусоиды при абсциссѣ $\frac{\pi}{2}+x$, равна ординатѣ косинусоиды при абсциссѣ x. Слѣдовательно, если передвинуть на соотвѣтственное разстояніе влѣво синусоиду по оси абсциссъ, не мѣняя осей координатъ, то мы и получимъ косинусоиду (черт. 216).



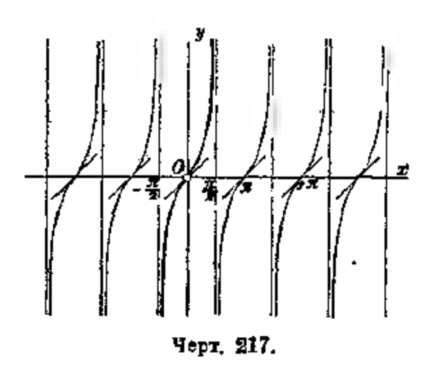
Черт. 216.

Графика тангенса: $y=tg\,x$. Находимъ первую и вторую производныя тангенса:

$$y=tg\,x;\quad y'=\frac{1}{\cos^2 x};\quad y''=\frac{+2\cos x\,.\sin x}{\cos^4 x}=\frac{2\,tg\,x}{\cos^2 x}$$

Тангенсъ обращается въ 0 при $x=k\pi$, гдѣ k—какое-нибудь цѣлое положительное или отрицательное число: $tg\,k\pi=0$. Слѣдовательно, тангенсоида пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкахъ ... $(-2\pi, 0)$,

$(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, ... (черт. 217). Значеніе первой производной при этихъ значеніяхъ аргумента равно 1:



Черт. 217.

$$(y')_{x=k\pi} = \frac{1}{\cos^2 k\pi} = 1.$$

Слѣдовательно, касательныя къ тангенсоидѣ въ точкахъ ея пересѣченія съ осью абсциссъ наклонены подъ угломъ въ 45^0 къ положительному направленію этой оси, ибо

$$tg\,\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \alpha = 45^0.$$

Первая производная при всякомъ значеніи аргумента положительна и потому $tg\,x$—функція всегда возрастающая.

Такъ какъ знакъ второй производной $\frac{2tg\,x}{\cos^2 x}$ совпадаетъ со знакомъ самой функціи $tg\,x$, то тѣ части тангенсоиды, которыя расположены **надъ** осью абсциссъ $(y > 0)$, выпуклостью обращены **внизъ** $(y'' > 0)$, а части тангенсоиды, расположенныя **подъ** осью абсциссъ $(y < 0)$, выпуклостью обращены **вверхъ** $(y'' < 0)$. При $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, гдѣ k — какое-нибудь цѣлое положительное или отрицательное число, разсматриваемая функція $tg\,x$ обращается въ $\pm\infty$. Тангенсоида состоитъ изъ безчисленнаго множества **вѣтвей**. Прямыя, проходящія черезъ точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ параллельно оси ординатъ раздѣляютъ плоскость на параллельныя полосы; въ каждой изъ этихъ полосъ лежитъ одна вѣтвь тангенсоиды.

Графика котангенса: $y = cotg\,x$. Графику котангенса можно получить изъ графики тангенса слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ

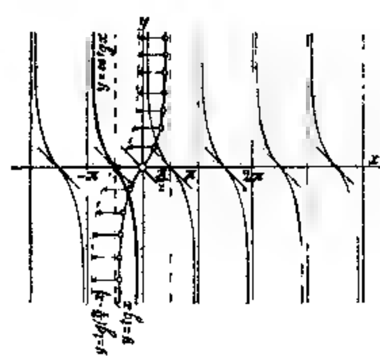
$$cotg\,x = -tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

то графика котангенса въ то же время служитъ графикой функціи

$$y = -tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Сдвигая тангенсоиду (черт. 217) **влѣво** на разстояніе $\frac{\pi}{2}$, какъ это

мы дѣлали съ синусоидой, мы получимъ графику $tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. Теперь нужно измѣнить знакъ каждой ординаты этой графики, чего можно достигнуть, поворачивая плоскость около оси абсциссъ такъ, чтобы прежнее положительное направленіе оси ординатъ совпало съ отрицательнымъ (черт. 218). Послѣ такихъ перемѣщеній тангенсоиды мы и получимъ графику котангенса.



Черт. 218.

Задача 1. Вычислить площадь, ограниченную дугой синусоиды и осью абсциссъ (черт. 219).

Обозначая искомую площадь черезъ I, будемъ имѣть

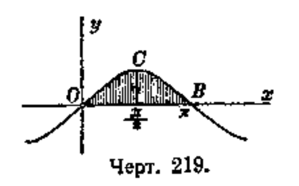
$$I=\int_0^{\pi} \sin x\,dx, \quad \text{а} \quad \int \sin x\,dx=-\cos x+C.$$

Слѣдовательно (гл. IV, § 8),

$$I=\int_0^{\pi} \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=1+1=2 \text{ кв. ед.}$$

Задача 2. Построить графику затухающаго колебанія, совершающагося по закону

$$s=ae^{-kt}\sin\frac{2\pi t}{T},$$



Черт. 219.

гдѣ s — отклоненіе колеблющейся матеріальной точки отъ центральнаго положенія, а k и T постоянныя [будемъ считать $a=6$, $k={}^1/_3$ и $T=6$], t перемѣнное время. По такому закону, напр., совершаются колебанія маятника въ сопротивляющейся средѣ, колебанія магнита, электрическія колебанія подъ вліяніемъ самоиндукціи.

Будемъ t разсматривать какъ положительную абсциссу, а s какъ ординату опредѣляемую уравненіемъ

$$s=6e^{-\frac{t}{3}}\sin\frac{\pi t}{3}.$$

Кривая (графика разсматриваемой функціи, черт. 220) пересѣкаетъ ось абсциссъ при такихъ значеніяхъ t, при которыхъ $\sin\frac{\pi t}{3}$ обращается въ нуль:

$$\sin\frac{\pi t}{3}=0;\quad t=0,\ 3,\ 6,\ 9,\dots,3n,\dots$$

Направленіе касательныхъ въ точкахъ пересѣченія опредѣляется значеніями первой производной при $t=0, 3, 6, 9, \dots$:

$$s'=6\left[e^{-\frac{t}{3}}\cdot\cos\frac{\pi t}{3}\cdot\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi t}{3}\cdot e^{-\frac{t}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right];$$

$$s'=2e^{-\frac{t}{3}}\left(\pi\cos\frac{\pi t}{3}-\sin\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$(s')_{t=0}=2\pi,\quad (s')_{t=3}=-\frac{2\pi}{e},\quad (s')_{t=6}=\frac{2\pi}{e^2},\quad (s')_{t=9}=-\frac{2\pi}{e^3},\dots$$

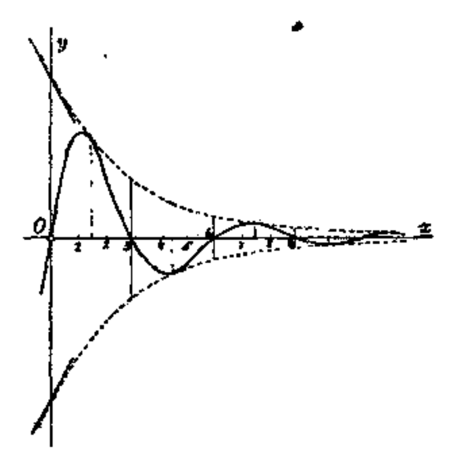
Такимъ образомъ тангенсы угловъ наклона касательныхъ въ точкахъ пересѣченія съ осью абсциссъ уменьшаются по абсолютной величинѣ въ убывающей геометрической прогрессіи.

Первый множитель разсматриваемой функціи $6e^{-\frac{t}{3}}$ при всякомъ значеніи t положителенъ и безгранично уменьшается, а второй $\sin\frac{\pi t}{3}$ принимаетъ положительныя и отрицательныя значенія, колеблющіяся между $+1$ и -1. Слѣдовательно, волны изучаемой графики, лежащія н а д ъ осью абсциссъ, к а с а ю т с я кривой

$$s=6e^{-\frac{t}{3}},$$

а волны, лежащія п о д ъ осью абсциссъ, к а с а ю т с я кривой

$$s=-6e^{-\frac{t}{3}}.$$



Черт. 220.

Точки прикосновенія имѣютъ абсциссы

$$t=\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}+3,\ \frac{3}{2}+6,\dots$$

Ординаты этихъ точекъ не будутъ ни maxima, ни minima.

Maximum'a и minimum'a изучаемая функція достигаетъ при тѣхъ значеніяхъ t, при которыхъ первая производная обращается въ нуль:

$$s' = 2e^{-\frac{t}{3}}\left(\pi \cos \frac{\pi t}{3} - \sin \frac{\pi t}{3}\right) = 0\,, \quad \text{или} \quad tg\frac{\pi t}{3} = \pi\,;$$

откуда

$$\frac{\pi t}{3} = arc\, tg\, \pi + n\pi\,.$$

Обозначая черезъ $t_1, t_2, \ldots, t_n \ldots$ послѣдовательныя значенія t, при которыхъ колеблющаяся точка достигаетъ наибольшаго отклоненія въ ту или другую сторону, будемъ имѣть:

$$t_1 = \frac{3}{\pi}\, arc\, tg\, \pi\,, \quad t_2 = \frac{3}{\pi}\, arc\, tg\, \pi + 3\,, \quad t_3 = \frac{3}{\pi}\, arc\, tg\, \pi + 6\,, \ldots$$

Каждый maximum или minimum функціи s представляетъ величину размаха или амплитуду колебанія. Отношеніе послѣдовательныхъ амплитудъ постоянно:

$$s_1 : s_2 = 6e^{-\frac{t_1}{3}} \sin\frac{\pi t_1}{3} : 6\, e^{-\frac{t_2}{3}} \sin\frac{\pi t_2}{3} = -e\,,$$

ибо $t_2 - t_1 = 3$. Величина $\left|\frac{s_1}{s_2}\right| = h$ называется коэффиціентомъ затуханія; а $\log h$ логариѳмическимъ декрементомъ; для даннаго примѣра $\log h = +1$.

Вычисляя t_1, нетрудно убѣдиться, что $t_1 < {}^3/_2$, т.-е. maximum'a или minimum'a функція s достигаетъ въ каждомъ интервалѣ, образованномъ послѣдовательными точками пересѣченія кривой съ осью абсциссъ, не въ серединѣ его, а ближе къ лѣвой границѣ.

§ 10. Производныя обратныхъ тригонометрическихъ или круговыхъ функцій и соотвѣтствующія формулы интегральнаго исчисленія. Переходимъ теперь къ опредѣленію производныхъ круговыхъ функцій, т.-е. функцій обратныхъ тригонометрическимъ.

1. Разсмотримъ прежде всего функцію $y = arc \sin x$. Такъ какъ y есть дуга, синусъ которой равенъ x, то

$$x = \sin y\,. \tag{1}$$

Такимъ образомъ функцію y можно разсматривать, какъ неявную функцію, опредѣляемую уравненіемъ (1). Вторая часть этого уравненія, если считать x за независимое перемѣнное, будетъ функціей отъ функціи, ибо она зависитъ прежде всего отъ y, а y зависитъ

отъ x. Производная лѣвой части равенства (1) равна 1, а производная правой части находится по правилу дифференцированія функціи отъ функціи:

$$\frac{d \sin y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Но производная $\sin y$ по y, какъ по главному перемѣнному, равна $\cos y$, а $\frac{dy}{dx}$ искомая производная функціи $y = \arc\sin x$. Итакъ,

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \qquad (2)$$

Такимъ образомъ производная $\arc\sin x$ найдена, но въ зависимости отъ самой функціи y. Выразимъ ее непосредственно черезъ x. По основной формулѣ тригонометріи имѣемъ

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Подставляя x вмѣсто $\sin y$ согласно равенству (1), получимъ

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Слѣдовательно, производная $\arc\sin x$, опредѣляемая равенствомъ (2), выражается черезъ x слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{или} \quad \frac{d \arc\sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (3)$$

Графика $\arc\sin x$. Для полученія графики функціи $y = \arc\sin x$ мы, зная первую производную этой функціи и найдя вторую ея производную, могли бы изучить ходъ ея измѣненія. Но, такъ какъ $\arc\sin x$ есть функція обратная синусу, мы можемъ поступить проще: именно, повернуть плоскость съ начерченной на ней синусоидой ($y = \sin x$) около биссектрисы координатнаго угла на 180^0 такъ, чтобы ось абсциссъ совпала съ прежней осью ординатъ и обратно. Тогда координаты точекъ синусоиды въ новомъ положеніи будутъ удовлетворять уравненію

$$x = \sin y,$$

т.-е. синусоида въ новомъ положеніи (черт. 221) будетъ служить графикой функціи

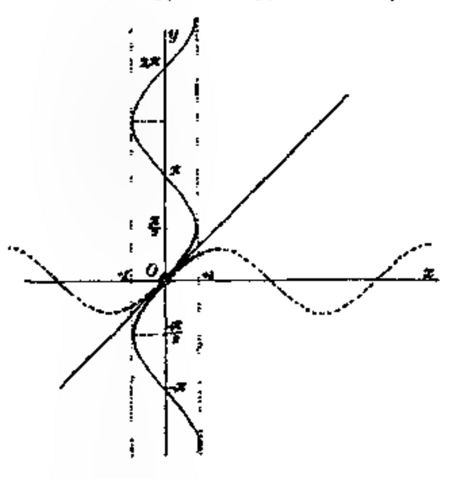
$$y = arc\sin x.$$

$arc\sin x$ принимаетъ дѣйствительныя значенія только для значеній аргумента x, заключенныхъ въ интервалѣ отъ -1 до $+1$:

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Но для каждаго значенія аргумента въ этомъ интервалѣ соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній функціи y, изъ которыхъ одно и только одно заключено въ предѣлѣ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Обозначая черезъ $Arc\sin x$ разсматриваемую функцію со всею совокупностью ея значеній, а черезъ $arc\sin x$ ту вѣтвь ея (часть кривой, черт. 221), которая даетъ значенія y, заключенныя между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, будемъ имѣть

$$-\frac{\pi}{2} \leqq arc\sin x \leqq +\frac{\pi}{2}$$



Черт. 221.

и

$$Arc\sin x = arc\sin x + 2k\pi, \quad \text{или} \quad Arc\sin x = (2k+1)\pi - arc\sin x, \quad (4)$$

такъ какъ

$$x = \sin y = \sin(y + 2k\pi) = \sin(\pi - y + 2k\pi),$$

гдѣ k какое-нибудь цѣлое положительное или отрицательное число.

2. Разсмотримъ теперь функцію $y = arc\cos x$. Такъ какъ y есть дуга, косинусъ которой равенъ x, то

$$x = \cos y. \quad (5)$$

Дифференцируя обѣ части этого равенства по x и принимая во вниманіе, что вторая часть зависитъ непосредственно отъ y, а y есть разсматриваемая функція x, получимъ

$$1 = \frac{d\cos y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{или} \quad 1 = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx};$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}.$$

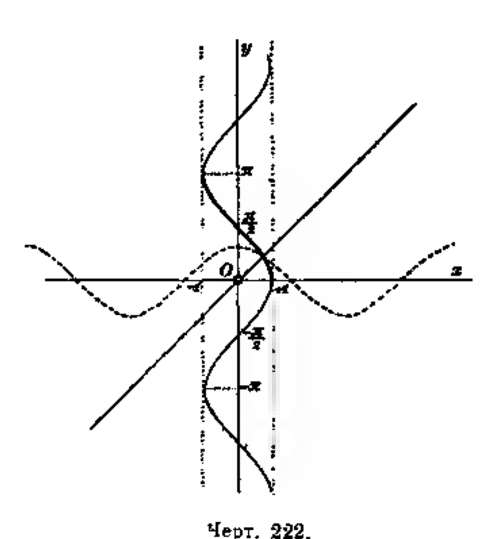
Но

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \text{а} \quad \cos y = x$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{или} \quad \frac{d \, arc \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{6}$$

Графика $arc \cos x$. Для полученія графическаго изображенія функціи $y = arc \cos x$ надо плоскость съ косинусоидой повернуть около биссектрисы координатнаго угла на 180^0 (черт. 222).



Черт. 222.

Дѣйствительныя значенія $arc \cos x$ принимаетъ только для значенія аргумента въ интервалѣ $(-1, 1)$:

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Разсматриваемая функція многозначна, при чемъ одно и только одно значеніе для каждаго значенія аргумента заключено между 0 и π.

Обозначая черезъ $Arc \cos x$ разсматриваемую функцію со всей совокупностью ея значеній, а черезъ $arc \cos x$ ту ея вѣтвь, которая (черт. 222) даетъ значенія, заключенныя между 0 и π, будемъ имѣть

$$0 \leqq arc \cos x \leqq \pi$$

и

$$Arc \cos x = 2k\pi \pm arc \cos x, \tag{7}$$

такъ какъ

$$x = \cos y = \cos (y + 2k\pi) = \cos (2k\pi - y),$$

гдѣ k какое-нибудь цѣлое положительное или отрицательное число.

3. Пусть теперь $y = arc\,tg\,x$. Та же функціональная зависимость x и y опредѣляется и уравненіемъ

$$x = tg\,y. \qquad (8)$$

Дифференцируя обѣ части этого уравненія по x, находимъ

$$1 = \frac{d\,tg\,y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \qquad \text{или} \qquad 1 = \frac{1}{cos^2 x} \cdot \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = cos^2 y.$$

Но

$$cos\,y = \frac{1}{sec\,y}, \quad sec\,y = \sqrt{1 + tg^2 x}, \quad \text{а} \quad tg\,y = x,$$ (стр. 235, 3 и 4);

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{или} \qquad \frac{d\,arc\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (9)$$

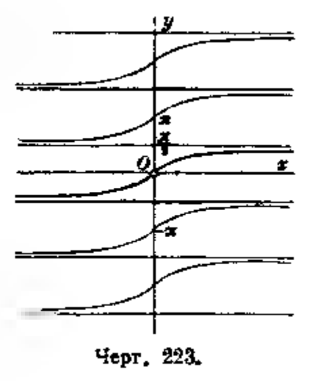
Такъ какъ производная $arc\,tg\,x$ всегда положительна, то эта функція всегда возрастающая.

Графическое изображеніе функціи $y = arc\,tg\,x$ получимъ, повернувъ плоскость съ тангенсоидой около биссектрисы координатнаго угла (черт. 223). Графика функціи $y = arc\,tg\,x$ состоитъ изъ безчисленнаго множества вѣтвей, и одна изъ нихъ даетъ значенія $arc\,tg\,x$, заключенныя между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Обозначая разсматриваемую функцію со всею совокупностью ея значеній черезъ $Arc\,tg\,x$, а ту вѣтвь ея, которая даетъ значенія, заключенныя между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, черезъ $arc\,tg\,x$, будемъ имѣть:

$$-\frac{\pi}{2} \leq arc\,tg\,x \leq +\frac{\pi}{2}$$

и

$$Arc\,tg\,x = arc\,tg\,x + k\pi, \qquad (10)$$



Черт. 223.

такъ какъ $x = tg\,y = tg\,(y + k\pi)$, гдѣ k какое-нибудь цѣлое положительное или отрицательное число.

4. Такимъ же образомъ находится производная $arc\,cotg\,x$ и строится графика этой функцiи. Пусть $y = arc\,cotg\,x$; слѣдовательно,

$$x = cotg\,y. \tag{11}$$

Дифференцируя обѣ части этого уравненiя, получимъ

$$1 = \frac{d\,cotg\,y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{или} \quad 1 = -\frac{1}{sin^2 y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \quad sin^2 y.$$

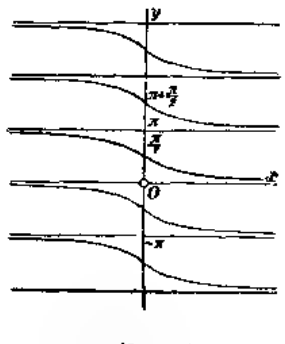
Но

$$sin\,y = \frac{1}{cosec\,y}; \quad cosec\,y = \sqrt{1 + cotg^2 y}, \quad a \quad cotg\,y = x, \qquad \text{(стр. 235; 3, 4).}$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \text{или} \quad \frac{d\,arc\,cotg\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{12}$$

Производная $arc\,cotg\,x$ всегда отрицательна, слѣдовательно, эта функцiя всегда убываетъ. Графическое изображенiе ея мы получимъ, повернувъ около биссектрисы координатнаго угла плоскость съ котангенсоидой (черт. 224).



Черт. 224.

Эта графика состоитъ изъ безчисленнаго множества вѣтвей, одна изъ которыхъ даетъ значенiя функцiи, заключенныя между 0 и π. Если обозначить разсматриваемую функцiю со всею совокупностью ея значенiй черезъ $Arc\,cotg\,x$, а ту вѣтвь ея, которая даетъ значенiя, заключенныя между 0 и π, черезъ $arc\,cotg\,x$, то будемъ имѣть

$$0 \leq arc\,cotg\,x \leq \pi, \qquad Arc\,cotg\,x = arc\,cotg\,x + k\pi, \tag{13}$$

такъ какъ

$$x = cotg\,y = cotg\,(y + k\pi),$$

гдѣ k какое-нибудь цѣлое положительное или отрицательное число.

Тригонометрическiя функцiи и имъ обратныя круговыя суть функцiи трансцендентныя и опредѣленiя ихъ коренятся не въ алгебрѣ, а въ геометрiи. Но, какъ видно изъ формулъ (3), (6), (9) и (12), производныя круговыхъ функцiй суть функцiи алгебраиче-

-скія. Если поэтому присоединить къ операціямъ алгебраическимъ также операціи перехода отъ данной производной функціи къ неизвѣстной первоначальной, т.-е. операціи, изученіе которой составляетъ предметъ интегральнаго исчисленія, то мы будемъ въ состояніи дать аналитическія опредѣленія тригонометрическимъ и круговымъ функціямъ.

Соотвѣтствующія формулы интегральнаго исчисленія получимъ, обращая формулы (3), (6), (9) и (12).

Формулы дифференц. исчисленія.	Формулы интегр. исчисленія.
$\frac{d \, arc \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad d \, arc \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc \sin x + C.$ (14)
$\frac{d \, arc \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad d(-arc \cos x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -arc \cos x + C.$ (15)
$\frac{d \, arc \, tg \, x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad d \, arc \, tg \, x = \frac{dx}{1+x^2}$;	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc \, tg \, x + C.$ (16)
$\frac{d \, arc \, cotg \, x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$, $\quad d(-arc \, cotg \, x) = \frac{dx}{1+x^2}$;	$\int \frac{dx}{1+x^2} = -arc \, cotg \, x + C.$ (17)

Примѣчаніе. $arc \sin x$ и $-arc \cos x$ имѣютъ одну и ту же производную, иначе получаются при интегрированіи одной и той же (подъинтегральной) функціи. Слѣдовательно (стр. 342), эти функціи отличаются на постоянное. Дѣйствительно (стр. 241),

$$arc \sin x - (-arc \cos x) = arc \sin x + arc \cos x = \frac{\pi}{2}.$$

То же самое должно сказать относительно $arc \, tg \, x$ и $-arc \, cotg \, x$.

$$arc \, tg \, x - (-arc \, cotg \, x) = arc \, tg \, x + arc \, cotg \, x = \frac{\pi}{2}.$$

При этомъ эти соотношенія имѣютъ мѣсто для тѣхъ вѣтвей разсматриваемыхъ функцій, которыя отмѣчены самымъ обозначеніемъ ихъ ($arc \sin x$, а не $Arc \sin x$ и т. д.).

Примѣры: 1. $y = arc\,tg \frac{1}{x}$, или $y = arc\,tg\, u$, гдѣ $u = \frac{1}{x}$;

$$y' = \frac{d\, arc\,tg\, u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(Сравнить производныя $arc\,tg \frac{1}{x}$ и $arc\,cotg\, x$; что слѣдуетъ изъ этого сравненія?)

2. $y = arc \sin \sqrt{1-x^2}$, или $y = arc \sin u$, гдѣ $u = (1-x^2)^{1/2}$;

$$y' = \frac{d\, arc \sin u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-(1-x^2)} \cdot \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Сравнить съ производной $arc \cos x$).

3. $y = \frac{arc \cos x}{x}$;

$$y' = \frac{x \cdot \frac{d\, arc \cos x}{dx} - arc \cos x \frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - arc \cos x \cdot 1}{x^2},$$

$$y' = -\frac{x + \sqrt{1-x^2} \cdot arc \cos x}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}.$$

4. $y = \log arc\,tg\, x$;

$$y' = \frac{1}{arc\,tg\, x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2) \cdot arc\,tg\, x}.$$

5. $y = arc\,tg\,(\log x)$;

$$y' = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\,[1+(\log x)^2]}.$$

6. $y = arc\,cotg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$y' = -\frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) - \sqrt{1-x^2} \cdot 1}{x^2} =$$

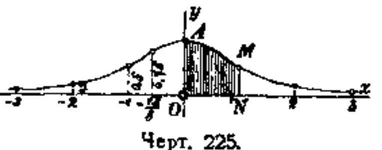
$$= \frac{+x^2+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Вычислить площадь, ограниченную осями координатъ, линіей, данной уравненіемъ

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

и ординатой этой линіи, соотвѣтствующей абсциссѣ 1.

Разсматриваемая кривая линія, какъ видно изъ ея уравненія, имѣетъ наибольшую ординату при $x = 0$, симметрично расположена относительно оси ординатъ и асимптотически приближается къ оси абсциссъ (черт. 225). Точки перагиба имѣютъ координаты $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$, которыя опредѣляются помощью уравненія $y'' = 0$.



Черт. 225.

$$\text{пл. } OAMN = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [arc\,tg\,x]_0^1 = arc\,tg\,1 = \frac{\pi}{4}.$$

Этою формулой дается способъ приближеннаго вычисленія π. Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію (стр. 355) имѣемъ:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\Delta x}{1+x_i^2} = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta x}{1+x_i^2}.$$

Слѣдовательно, полагая, напр., $n = 10$ и потому $\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0,1$, будемъ имѣть два приближенныхъ значенія

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \sim 0,1\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{1+0.1^2} + \frac{1}{1+0,2^2} + \ldots + \frac{1}{1+0,9^2}\right] = 0,808\ldots$$

$$\sim 0,1\left[\frac{1}{1+0,1^2} + \frac{1}{1+0,2^2} + \ldots + \frac{1}{1+1^2}\right] = 0,758\ldots$$

Разность этихъ значеній равна 0,05:

$$0,1\left(1-\frac{1}{2}\right) = 0,1\,\frac{1}{2} = 0,05$$

и потому каждая изъ этихъ суммъ даетъ приближенное значеніе $\frac{\pi}{4}$ съ ошибкой меньше 0,05, а слѣдовательно π можно вычислить съ ошибкой меньше $4 \,.\, 0,05 = 0,2$:

$$\pi \sim 0,1\,.\,(8,08\ldots)\,.\,4 = 3,234\,. \qquad \pi \sim 3,2$$

т.-е.

$$\pi \sim 0,1\,.\,(7,58\ldots)\,.\,4 = 3,034\ldots \qquad \pi \sim 3$$

Среднее ариѳметическое найденныхъ приближеній будетъ ближе къ истинному значенію:

$$\pi \sim \frac{3,2+3}{2} = 3,15.$$

Для болѣе точнаго вычисленія по этому способу пришлось бы интервалъ отъ 0 до 1 разбить на большее число частей. Впослѣдствіи мы разсмотримъ способы лучшаго использованія тѣхъ же самыхъ числовыхъ данныхъ.

§ 11. **Примѣненіе логариѳмической производной при дифференцированіи нѣкоторыхъ функцій.** Если правила дифференцированія, изложенныя въ предыдущихъ параграфахъ, непримѣнимы непосредственно къ какой-либо функціи, то иногда предварительное логариѳмированіе обѣихъ частей равенства, опредѣляющаго данную функцію, значительно упрощаетъ задачу.

Пользуясь предварительнымъ логариѳмированіемъ, можно, напримѣръ, доказать, что правило дифференцированія степени распространяется на какіе угодно показатели не только раціональные, какъ было указано раньше. Пусть, напр.,

$$y = x^m, \tag{1}$$

гдѣ m какое угодно число, хотя бы и ирраціональное. Прежде чѣмъ найти производную этой функціи, логариѳмируемъ обѣ части равенства (1):

$$\log y = m \log x .$$

Беремъ производную отъ обѣихъ частей этого равенства, принявъ во вниманіе, что лѣвая часть есть функція отъ функціи:

$$\frac{d \log y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = m \frac{d \log x}{dx}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{m}{x},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{x} .$$

Но $y = x^m$; слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m x^m}{x} = m x^{m-1},$$

т.-е. правило дифференцированія степени остается такимъ же и для ирраціональныхъ показателей.

Примѣры:

1. $y = x^{\sqrt{2}}, \quad y' = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$.

2. $y = x^{\pi}, \quad y' = \pi \cdot x^{\pi-1}$.

Разсмотримъ теперь функцію такого вида:

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

или

$$y = u^v, \tag{2}$$

гдѣ $u = f(x)$, а $v = \varphi(x)$. Эту функцію нельзя дифференцировать какъ степень, ибо показатель v не постоянная величина, а перемѣнная, зависящая отъ x, но нельзя эту функцію дифференцировать и какъ показательную функцію, ибо основаніе u не постоянная величина. Функція эта сложная. Производную ея мы найдемъ, предварительно логариѳмируя обѣ части равенства (2):

$$\log y = v \log u .$$

Производныя обѣихъ частей этого равенства равны между собой; кромѣ того, $\log y$ и $\log u$ мы должны дифференцировать какъ функціи отъ функціи:

$$\frac{d \log y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = v \frac{d \log u}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \log u \cdot \frac{dv}{dx}$$

или

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = v \frac{1}{u} u' + \log u \cdot v',$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{v}{u} u' + v' \log u \right) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = u^v \left(\frac{vu'}{u} + v' \log u\right).$$

Примѣръ. Разсмотримъ наиболѣе простую изъ этого рода сложныхъ функцій

$$y = x^x .$$

Логариѳмируемъ обѣ части равенства и дифференцируемъ по x

$$\log y = x \log x; \quad \frac{1}{y} y' = x \frac{1}{x} + \log x,$$

откуда

$$y' = y (1 + \log x), \quad \text{или} \quad y' = x^x(1 + \log x).$$

Предварительное логариѳмированіе даетъ возможность легко найти производную произведенія сколькихъ угодно функцій. Пусть, напр.,

$$y = u v w,$$

откуда

$$\log y = \log u + \log v + \log w .$$

Дифференцируя находимъ

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w},$$

или

$$y' = \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right) u v w = vw \cdot u' + uw \cdot v' + uv \cdot w',$$

что согласуется съ выведенной ранѣе формулой (стр. 322).

§ 12. **Таблица основныхъ формулъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.** Основныя формулы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, выведенныя въ предыдущихъ параграфахъ, сведемъ теперь въ одну таблицу, которая и будетъ служить базой для дифференцированія и интегрированія составныхъ функцій.

1. $y = x^n$; $\quad \frac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1}$; $\quad d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n\,dx$.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $n \neq -1$.

2. $y = e^x$; $\quad \frac{de^x}{dx} = e^x$; $\quad de^x = e^x\,dx$.

2. $\int e^x\,dx = e^x + C$.

2'. $y = a^x$; $\quad \frac{da^x}{dx} = a^x \log a$; $\quad d\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x\,dx$.

2'. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$.

3. $y = \log x$; $\quad \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$; $\quad d \log x = \frac{dx}{x}$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$.

3'. $y = \log_a x$; $\quad \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \log a}$; $\quad d \log_a x = \frac{dx}{x \log a}$.

3'. $\int \frac{dx}{x \log a} = \log_a x + C$,

$$= \frac{\log x}{\log a} + C.$$

4. $y = \sin x$; $\quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$; $\quad d \sin x = \cos x\,dx$.

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

5. $y = \cos x$; $\quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$; $\quad d(-\cos x) = \sin x\,dx$.

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

6. $y = tg\,x$; $\quad \frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\quad d\,tg\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$.

7. $y = \cot g\, x$; $\frac{d \cot g\, x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$$d(-\cot g\, x) = \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\, x + C$.

8. $y = \arcsin x$; $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. $y = \arccos x$; $\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$d(-\arccos x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$.

10. $y = \operatorname{arc\,tg} x$; $\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$;

$$d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

11. $y = \operatorname{arc\,cotg} x$; $\frac{d \operatorname{arc\,cotg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$;

$$d(-\operatorname{arc\,cotg} x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccotg} x + C$.

§ 13. **Общія правила неопредѣленнаго интегрированія. Способъ подстановки. Интегрированіе по частямъ.** Правило вынесенія постояннаго множителя за знакъ интеграла и правило интегрированія суммы (гл. IV, § 7) позволяютъ, какъ мы видѣли, свести задачу интегрированія цѣлой алгебраической функціи къ интегрированію степени и постояннаго. Точно такъ же можно довести до конца и задачу интегрированія многочлена, составленнаго изъ функцій, интегралы которыхъ даны основными таблицами.

Примѣръ 1. $\int\left(5x^3 + 2\sin x + \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{x} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2}\right)dx =$

$$= 5\int x^3 dx + 2\int \sin x\, dx + 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 5\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 5\frac{x^4}{4} - 2\cos x + 3\operatorname{tg} x - 5\log x + 2\arcsin x + 3\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Кромѣ этихъ двухъ правилъ, для той же цѣли сведенія неопредѣленныхъ интеграловъ къ основнымъ таблицамъ служатъ *способъ подстановки или введенія новой перемѣнной* и *способъ интегрированія по частямъ.*

Способъ подстановки. Пусть требуется найти неопредѣленнымъ интегрированіемъ первообразную функцію

$$\int f(x)\,dx\,, \tag{1}$$

при чемъ интеграла этого въ таблицахъ основныхъ нѣтъ. Введемъ новую перемѣнную t, замѣняя x нѣкоторой функціей $\varphi(t)$ этого новаго перемѣннаго, функціей, которая должна быть соотвѣтственнымъ образомъ подобрана; при этомъ dx замѣнится дифференціаломъ этой функціи:

$$x = \varphi(t)\,, \qquad dx = \varphi'(t)\,dt\,. \tag{2}$$

Слѣдовательно,

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int \Phi(t)\,dt\,,$$

гдѣ $\Phi(t)$ обозначеніе подъинтегральной функціи $f[\varphi(t)]\,.\,\varphi'(t)$. Если функція $\varphi(t)$ подобрана такъ, что преобразованный интегралъ $\int\Phi(t)\,dt$ можно найти по основнымъ формуламъ, то поставленная задача и будетъ рѣшена, при чемъ въ полученномъ результатѣ можно снова вернуться къ прежнему перемѣнному x. Въ этомъ и состоитъ способъ интегрированія помощью подстановки или введенія новаго перемѣннаго.

Примѣръ 2. Положимъ, нужно взять интегралъ

$$\int \sin 2x\,dx\,.$$

Въ основныхъ формулахъ такого интеграла нѣтъ. Вводимъ новую перемѣнную t, полагая

$$2x = t\,,$$

откуда

$$x = \frac{t}{2} \qquad \text{и} \qquad dx = \frac{1}{2}\,dt\,.$$

Слѣдовательно

$$\int \sin 2x\,dx = \int \sin t\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = \quad \frac{1}{2}\cos t + C$$

или

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C\,.$$

Примѣръ 3. Взять интегралъ $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Вводимъ новую перемѣнную, полагая

$$\sqrt{1+x^2}=t\,,$$

откуда

$$1+x^2=t^2 \quad \text{и} \quad x=\sqrt{t^2-1}\,, \quad \text{а} \quad dx=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}\,.$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int dt=t+C\,.$$

Возвращаясь къ прежнему перемѣнному, получимъ

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}+C\,.$$

Примѣръ 4. Взять интегралъ $\int \frac{dx}{x\,[1+(\log x)^2]}$. Вводимъ новую перемѣнную, полагая

$$\log x=t\,,$$

откуда

$$\frac{dx}{x}=dt\,.$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{dx}{x\,[1+(\log x)^2]}=\int \frac{dt}{1+t^2}=arctg\,t+C\,.$$

Возвращаясь къ прежнему перемѣнному, получимъ

$$\int \frac{dx}{x\,[1+(\log x)^2]}=arctg\,(\log x)+C\,.$$

Какъ видно изъ приведенныхъ примѣровъ, главная трудность этого способа заключается въ выборѣ функціи $\varphi(t)$. При разсмотрѣніи интегрированія отдѣльныхъ классовъ функцій можно будетъ указать нѣкоторыя правила выбора подстановокъ.

Способъ интегрированія по частямъ Способъ интегрированія по частямъ выводится изъ формулы дифференцированія произведенія двухъ функцій:

$$(uv)'=uv'+vu',$$

или, въ дифференціалахъ:

$$d(uv)=u\,dv+v\,du\,,$$

гдѣ u и v функціи одного и того же независимаго перемѣннаго.

Если возьмемъ интегралы отъ обѣихъ частей этого равенства, то будемъ имѣть

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

и отсюда получаемъ формулу интегрированія по частямъ:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Если намъ требовалось найти $\int u\,dv$, то предыдущая формула позволяетъ свести задачу къ нахожденію другого интеграла, именно $\int v\,du$, который можетъ оказаться проще, чѣмъ данный, и этимъ упрощается наша задача.

Примѣръ 5. Пусть намъ требуется взять интегралъ

$$\int x^n \log x\,dx.$$

Такого интеграла въ основныхъ формулахъ нѣтъ. Попытаемся же примѣнить способъ интегрированія по частямъ. Полагаемъ

$$\log x = u, \quad x^n\,dx = dv.$$

Изъ послѣдняго равенства получимъ

$$v = \int x^n\,dx \quad \text{или} \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Слѣдовательно,

$$\int x^n \log x\,dx = \int \log x \; d\frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \log x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\,d\log x = \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\frac{dx}{x},$$

или

$$\int x^n \log x\,dx = \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx.$$

Послѣдній интегралъ берется по основнымъ формуламъ и мы находимъ

$$\int x^n \log x\,dx = \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Примѣръ 6. Часто приходится примѣнять вмѣстѣ оба вышеуказанные способа. Напр., чтобы взять интегралъ

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx,$$

полагаемъ сначала

$$arc\,tg\,x = u\,, \quad dx = dv\,, \quad \text{т.-е.} \quad v = x\,,$$

слѣдовательно, примѣняя способъ интегрированія по частямъ, будемъ имѣть

$$\int arc\,tg\,x\,dx = x\,arc\,tg\,x - \int x\,d(arc\,tg\,x) = x\,arc\,tg\,x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Для интегрированія $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$ примѣнимъ способъ подстановки, именно положимъ

$$t = 1 + x^2; \quad \text{отсюда} \quad dt = 2x\,dx\,, \quad x\,dx = \frac{dt}{2};$$

слѣдовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log t = \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \log\sqrt{1+x^2}.$$

Поэтому

$$\int arc\,tg\,x\,dx = x\,arc\,tg\,x - \log\sqrt{1+x^2} + C.$$

§ 14. Введеніе новаго перемѣннаго и интегрированіе по частямъ въ примѣненіи къ опредѣленнымъ интеграламъ. Преобразованіе помощью введенія новаго перемѣннаго можетъ быть примѣнено и непосредственно къ опредѣленному интегралу или въ цѣляхъ упрощенія вида его или даже въ цѣляхъ его вычисленія безъ предварительнаго опредѣленія первообразной функціи въ старомъ перемѣнномъ. Но здѣсь необходимо сдѣлать нѣкоторое добавленіе къ тому, что было сказано относительно этого способа выше.

Пусть однозначная функція $x = \varphi(t)$ мѣняется какъ угодно, но непрерывно въ интервалѣ $(t_0\, t_1)$, принимая при $t = t_0$ значеніе a, а при $t = t_1$ значеніе b; непрерывной будемъ предполагать и производную функцію $\varphi'(t)$ въ томъ же интервалѣ $(t_0\, t_1)$. Помощью подстановки $x = \varphi(t)$ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, гдѣ $f(x)$ непрерывная функція для всѣхъ значеній x, которыя оно принимаетъ при измѣненіи t отъ t_0 до t_1, преобразовывается въ интегралъ $\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, равный данному, хотя бы, въ случаѣ колебательнаго измѣненія $\varphi(t)$, между элементами того и другого и не было взаимно однозначнаго соотвѣтствія. Дѣйствительно, если $\Phi(x)$ какая-либо первообразная функція даннаго интеграла, т.-е. если $\Phi'(x) = f(x)$, то та же функція, если въ ней разсматривать $x = \varphi(t)$, будетъ первообразной функціей преобразованнаго интеграла, ибо

$$\frac{d\Phi[\varphi(t)]}{dt} = \frac{d\Phi(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

По основному предложенію имѣемъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi[\varphi(t_1)] - \Phi[\varphi(t_0)].$$

Но по условію $\Phi(a) = \Phi[\varphi(t_0)]$ и $\Phi(b) = \Phi[\varphi(t_1)]$; слѣдовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{2}$$

Если функція $\varphi(t)$ не можетъ принимать значеній равныхъ предѣламъ a и b даннаго интеграла, то она и не можетъ служить для преобразованія послѣдняго. Такъ, нельзя преобразовать $\int_0^2 x\,dx$ помощью подстановки $x = \sin t$. При пользованіи для преобразованія интеграла многозначной функціей нужно выдѣлить изъ нея однозначную непрерывную вѣтвь; если ни одна вѣтвь своими значеніями не заполняетъ всего интервала $(a\, b)$, то нужно разбить интегралъ на соотвѣтствующія части и преобразовать каждую изъ нихъ отдѣльно.

Примѣръ 1. Преобразовать интегралъ $\int_0^2 (x-1)^2\,dx$ помощью подстановки $(x-1)^2 = t$. Функція x, опредѣляемая уравненіемъ $(x-1)^2 = t$, имѣетъ двѣ вѣтви $x = 1 - \sqrt{t}$ и $x = 1 + \sqrt{t}$. Первая не можетъ принимать значеній $x > 1$, а вторая значеній $x < 1$. Часть даннаго интеграла отъ 0 до 1 можно преобразовать помощью первой вѣтви, а остальную часть отъ 1 до 2 помощью второй вѣтви; для первой $dx = -\frac{dt}{2\sqrt{t}}$, для второй $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\int_0^2 (x-1)^2 dx = \int_0^1 (x-1)^2 dx + \int_1^2 (x-1)^2 dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t}\,dt.$$

Примѣръ 2. Преобразовать интегралъ

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi s p q}} \int_0^l e^{-\frac{x^2}{2spq}}\,dx, \quad \text{полагая} \quad \frac{x^2}{2spq} = t^2.$$

Изъ данной подстановки выдѣляются двѣ однозначныя и непрерывныя вѣтви $x = t\sqrt{2spq}$ и $x = -t\sqrt{2spq}$. Возьмемъ первую изъ нихъ:

$$x = t\sqrt{2spq}; \quad dx = dt\sqrt{2spq}; \quad l = g\sqrt{2spq},$$

гдѣ g значеніе t, соотвѣтствующее верхнему предѣлу даннаго интеграла; если $x = 0$, то и $t = 0$. Слѣдовательно,

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^g e^{-t^2}\,dt.$$

Интегрированіе по частямъ, примѣненное непосредственно къ опредѣленному интегралу, можетъ иногда значительно упростить вычисленіе.

Интегрируя дифференціалъ произведенія

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

въ предѣлахъ отъ a до b для независимаго перемѣннаго x, отъ котораго зависятъ функціи u и v, мы и получимъ формулу интегрированія по частямъ для опредѣленныхъ интеграловъ:

$$\int_{x=a}^{x=b} d(uv) = \int_{x=a}^{x=b} u\,dv + \int_{x=a}^{x=b} v\,du \quad \text{или} \quad [uv]_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} u\,dv + \int_{x=a}^{x=b} v\,du\,,$$

откуда

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du\,, \tag{3}$$

гдѣ предѣлы, разумѣется, относятся къ независимому перемѣнному x.

Примѣръ 3. Вычислить опредѣленный интегралъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d\cos x = -\Big[\sin x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,d\sin x\,,$$

но

$$\Big[\sin x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0\,, \quad \text{а} \quad d\sin x = \cos x\,dx\,,$$

слѣдовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx\,, \quad \text{или} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\,dx\,,$$

откуда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx\,,$$

и далѣе

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{а} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Примѣръ 4. Вычислить интегралъ $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$, гдѣ m и n цѣлыя положительныя числа.

Полагая $(1-x)^n = u$ и $x^m dx = dv$ или $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, интегрируемъ по частямъ въ предѣлахъ отъ 0 до 1:

$$I_{m,n} = \int_0^1 (1-x)^n d\frac{x^{m+1}}{m+1} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} d(1-x)^n$$

или

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx, \qquad \text{т.-е.} \qquad I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}.$$

Такимъ образомъ для вычисленія интеграла $I_{m,n}$ мы составили редукціонную формулу, понижающую второй указатель. Примѣняя эту формулу n разъ получимъ

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} I_{m+2,n-2} = \ldots = \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} I_{m+n,0}.$$

$$I_{m+n,0} = \int_0^1 x^{m+n}\,dx = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+n+1}.$$

Слѣдовательно,

$$I_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)(m+n+1)} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!},$$

гдѣ $m! = 1.2.3\ldots m$, $n! = 1.2.3\ldots n$, $(m+n+1)! = 1.2.3\ldots(m+n+1)$.

Въ частности

$$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = \frac{2!\,3!}{6!} = \frac{1}{60}; \qquad \int_0^1 x^5(1-x)^3\,dx = \frac{5!\,3!}{9!} = \frac{1}{504}.$$

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

Производная функція и дифференціалъ. 1. Что такое производная функція? 2. Какое геометрическое значеніе имѣетъ производная? 3. Какое механическое значеніе имѣютъ первая и вторая производныя данной функціи, устанавливающей законъ движенія точки? 4. Если функція $y = f(x)$ непрерывна, всегда ли отношеніе ея приращенія къ приращенію независимаго перемѣннаго, т.-е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится къ (опредѣленному) предѣлу? 5. Какое геометрическое значеніе могутъ имѣть мѣста разрыва производной функціи?

6. Какъ можно по производной судить о возрастаніи и убываніи функціи? 7. Какъ можно судить объ изгибахъ графики непрерывной функціи? 8. Что такое точка перегиба кривой? 9. Что такое maximum или minimum функціи? 10. Какъ найти maximum или minimum функціи? 11. Какъ построить графику данной функціи?

12. Какія трансцендентныя функціи имѣютъ алгебраическія производныя? Какія изъ нихъ имѣютъ раціональныя и какія ирраціональныя? 13. Въ чемъ состоятъ общія правила дифференцированія? 14. Основныя формулы дифференціальнаго исчисленія? 15. Что такое дифференціалъ функціи?

Первообразная функція. Интегралъ. 1. Что такое первообразная или начальная функція? 2. Почему первообразная функція можетъ быть названа интеграломъ? 3. Что такое опредѣленный интегралъ? 4. Что такое неопредѣленный интегралъ? 5. Какое геометрическое значеніе имѣетъ опредѣленный интегралъ? 6. Въ чемъ состоятъ различныя геометрическія интерпретаціи начальной функціи и ея производной? 7. Какими способами можно вычислить значеніе первообразной функціи при какомъ-либо значеніи аргумента?

8. Какимъ образомъ вычисленіе опредѣленнаго интеграла можетъ быть сведено къ неопредѣленному интегрированію? и какое значеніе имѣетъ это сведеніе для геометрической задачи вычисленія площадей? 9. Въ чемъ состоятъ основныя свойства опредѣленныхъ интеграловъ? 10. Каковы общія правила неопредѣленнаго интегрированія и какую цѣль эти правила преслѣдуютъ? 11. Основныя формулы интегральнаго исчисленія? 12. Какую особенность должно отмѣтить при преобразованіи опредѣленнаго интеграла способомъ введенія новаго перемѣннаго?

Теорема Ролля и теорема Лагранжа. 1. Въ чемъ состоятъ теорема Ролля и теорема Лагренжа о конечныхъ приращеніяхъ? 2. Какое значеніе имѣетъ теорема Лагранжа для обоснованія интегральнаго исчисленія?

УПРАЖНЕНІЯ

Дифференцированіе функцій.

1. $y=(a^2-x^2)^4$.

2. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2}{x^2-3}}$.

3. $y=(x+\sqrt{1+x^2})^2$.

4. $y=\sqrt[3]{4-x^2}$.

5. $y=e^{ax+b}$.

6. $y=\dfrac{x^3}{e^x}$.

11. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}$.

12. $y=\sin(ax+b)$.

13. $y=e^{\cos x}$.

14. $y=\dfrac{a\sin x}{1+\cos x}$.

15. $y=\log tg\, x$.

16. $y=\log tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

7. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

8. $y=\log f(x)$.

9. $y=\log(x+\sqrt{1+x^2})$.

10. $y=\log\frac{a+x}{a-x}$.

17. $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

18. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

19. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

20. $y=\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$.

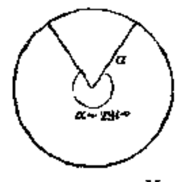
Отвѣты: 2) $y'=\frac{-x^4+6x^2-6x}{2(x^3-3)\sqrt{(x^2-2)(x^3-3)}}$; 7) $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$;

8) $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$; 9) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 11) $y'=\cos^2 x$,

15) $y'=\frac{2}{\sin 2x}$; 16) $y'=\frac{1}{\cos x}$; 17) $y'=\frac{1}{1+x^2}$;

18) $y'=-\frac{1}{1+x^2}$, 19) $y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; 20) $y'=\frac{1}{1+x^2}$.

21. Вырѣзать изъ бумажнаго круга радіуса a секторъ такъ, чтобы изъ него можно было сдѣлать конусъ (воронку) наибольшаго объема. Какъ великъ центральный уголъ α (черт. 226) этого сектора и какъ великъ радіусъ основанія x образованнаго конуса?

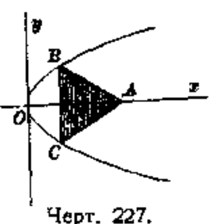




Черт. 226.

Отв. $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\alpha\sim 294^0$.

22. Построить равнобедренный треугольникъ ABC (черт. 227) наибольшей площади, двѣ вершины котораго B и C лежать на параболѣ $y^2=2px$, а третья A на ея оси на разстояніи a отъ вершины.



Черт. 227.

Отв. Абсцисса точки B: $x=\frac{a}{3}$.

Построеніе графикъ функцій.

23. $y=e^{-x^2}$

24. $y=x^4e^{-x}$

25. $y=xe^{-x^2}$

26. $y=\sin^2 x$.

Интегрированіе помощью основныхъ формулъ.

27 $\int 6x^7\,dx = \frac{3}{4}x^8 + C.$ 30. $\int\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)dx.$

28. $\int(a^2 + x^2)\,dx = a^2x + \frac{x^3}{3} + C.$ 31 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

29. $\int 3\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x^3} + C.$ 32 $\int\frac{(1+x^2)^2+1}{1+x^2}\,dx.$

Интегрированіе помощью введенія новаго перемѣннаго.

33. $\int[f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$ Указаніе: $t = f(x)$.

34. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+x}} = 2\sqrt{a+x} + C.$ Указаніе. 1) $t = a + x$, или 2) $t = \sqrt{a+x}$.

35. $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C.$ Указаніе: $t = e^{kx}$.

36. $\int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \log f(x) + C.$ Указаніе: $t = f(x)$.

37. $\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} = \log(1+x^2) + C.$ Указаніе: въ числителѣ дифференціалъ знаменателя.

38. $\int\cot g\,x\,dx = \int\frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \log\sin x + C.$

39. $\int tg\,x\,dx = -\log\cos x + C.$

40. $\int\frac{\cos x\,dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{b}\log(a + b\sin x) + C.$

41. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\,arc\,tg\,x} = \log(arc\,tg\,x) + C.$ Указаніе: $t = arc\,tg\,x$.

42 $\int\frac{\varphi'(x)\,dx}{1+[\varphi(x)]^2} = arc\,tg\,\varphi(x) + C.$ Указаніе: $t = \varphi(x)$.

43. $\int\frac{dx}{1+(x-2)^2} = arc\,tg\,(x-2) + C.$

44. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = arc\, tg\,(\sin x) + C$.

45. $\int \frac{e^x\, dx}{e^x - 1} = \log\,(e^x - 1) + C$.

46. $\int \frac{\varphi'(x)\, dx}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}} = arc\,\sin \varphi(x) + C$. Указаніе: $t = \varphi(x)$.

47. $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = arc\,\sin x^2 + C$. Указаніе: $t = x^2$.

48. $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} + C$. Указаніе: 1) $t = 1 + x^2$, или 2) $t = \sqrt{1+x^2}$.

Интегрированіе по частямъ.

49. $\int \log x\, dx = x\,(\log x - 1) + C$. Указаніе: $u = \log x$, $v = x$.

50. $\int (x-1)^2 e^x\, dx = e^x\,(x^2 - 4x + 5) + C$. Указаніе: $u = (x-1)^2$, $dv = e^x\, dx$.

51. $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$. Указаніе: $u = \sin x$, $dv = \sin x\, dx$, послѣ подъ интеграломъ $\cos^2 x$ замѣняется черезъ $1 - \sin^2 x$.

52. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C$.

53. $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$. Указаніе $u = x^2$, $\cos x\, dx = dv$.

54. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x} = x\, tg\, x + \log \cos x + C$. Указаніе: $x = u$; $\frac{dx}{\cos^2 x} = dv$.

Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ.

55. Опредѣлить площадь гиперболическаго сектора съ вершиной въ началѣ координатъ и дугой равносторонней гиперболы ($xy = 1$), одинъ конецъ которой имѣетъ абсциссу 1, а другой x.

Отв. пл. $OAB = \log x$.

56. Опредѣлить площадь, ограниченную дугой параболы

$$y = 6 - 4x + x^2$$

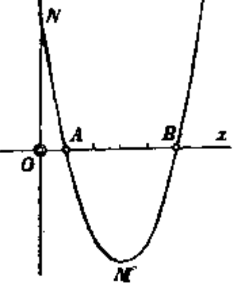
и осью абсциссъ въ предѣлахъ отъ 0 до 4.

Отв. $13^1/_3$ кв. ед.

57. Опредѣлить точки пересѣченія параболы

$$y = x^2 - 6x + 5$$

съ осью абсциссъ и вычислить площадь, ограниченную дугой параболы и осью абсциссъ (черт. 228)



Черт. 228.

Отв. Точки пересѣченія: $(1;0)$ и $(5;0)$.

Площ. — $10^2/_3$ кв. ед.

58. Вычислить опредѣленные интегралы:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; b) $\int_1^2 (x^2 - x + 1)\,dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot g\, x\,dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$.

Отв. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $1^5/_6$; c) $^1/_2$; d) $\frac{\log 2}{2}$; e) $\frac{2}{3}$

ГЛАВА VI.

ДОПОЛНЕНІЯ КЪ ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

(Обобщенія, приближенное вычисленіе и оцѣнка).

§ 1. **Интегралы съ безконечными предѣлами.** Въ опредѣленіи интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось [гл. IV, § 4], что предѣлы интегрированія a и b числа конечныя и подъинтегральная функція $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) непрерывна. Поэтому мы не имѣемъ пока права говорить объ интегралѣ функціи, если не выполняется хотя бы одно изъ вышеприведенныхъ условій. Но соотвѣтствующимъ дополненіемъ можно распространить опредѣленіе интеграла и на тѣ случаи, когда интервалъ интегрированія безконечно великъ или когда подъинтегральная функція испытываетъ разрывы непрерывности въ предѣлахъ интегрированія. Такимъ образомъ мы получимъ обобщенные или несобственные интегралы. Разсмотримъ изъ нихъ сначала интегралы съ безконечными предѣлами.

Пусть функція опредѣлена для всякаго конечнаго значенія x бо́льшаго a и непрерывна въ интервалѣ отъ a до ∞. Таковы, напр., будутъ функціи x^{-1}, $\sin x$, $\sin (x^2)$; но не таковы функціи $\sqrt{1-x^2}$, $\arcsin x$ или $\arccos x$, которыя имѣютъ дѣйствительныя значенія лишь для $|x| \leq 1$. Для всякаго конечнаго значенія верхняго предѣла $x > a$ интегралъ такой функціи существуетъ, существуетъ для нея и непрерывная первообразная функція $\Phi(x)$ [гл. IV, §§ 4, 9], т.-е. функція, имѣющая производную равную данной функціи: $\Phi'(x)=f(x)$. По основному предложенію [гл. IV, § 8] имѣемъ

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Big[\Phi(x)\Big]_a^x = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Если это выраженіе при безгранично увеличивающемся x стремится къ опредѣленному предѣлу, то предѣлъ этотъ и называется ин-

тегралом ъ данной функціи въ предѣлахъ отъ a до ∞:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} [\Phi(x) - \Phi(a)]\,. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ, вычисленіе опредѣленнаго интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ требуетъ двойного безконечнаго процесса: во-первыхъ, интегрированія въ первоначальномъ смыслѣ и, во-вторыхъ, перехода къ предѣлу въ полученномъ выреженіи при безгранично увеличивающемся x. Геометрически $\int_a^\infty f(x)\,dx$ означаетъ измѣряемую отъ нѣкоторой начальной ординаты площадь, заключенную между кривой $y = f(x)$ и осью абсциссъ, распростирающимися въ положительномъ направленіи до безконечности.

Согласно съ предыдущимъ обобщеніемъ понятія опредѣленнаго интеграла имѣемъ также, если функція $f(x)$ соотвѣтствующимъ образомъ опредѣлена,

$$\int_{\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \int_x^b f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x=-\infty} \int_x^b f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{x'=-\infty \\ x''=+\infty}} \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx.$$

Примѣръ 1. Вычислить измѣряемую отъ оси ординатъ площадь, ограниченную осью абсциссъ, продолженной въ положительномъ направленіи, и кривой, данной уравненіемъ

$$y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Разсматриваемая кривая, какъ видно изъ ея уравненія, имѣетъ наибольшую ординату при $x = 0$, симметрично расположена относительно оси ординатъ и асимптотически приближается къ оси абсциссъ (черт. 225). Опредѣляемая площадь равна интегралу разсматриваемой функціи, взятому въ предѣлахъ отъ нуля до безконечности

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{x=\infty} \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{x=\infty} \Big[\operatorname{arctg} x \Big]_0^x = \lim_{x=\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Вся площадь, ограниченная данной кривой и осью абсциссъ, равна интегралу той же функціи, взятому отъ $-\infty$ до $+\infty$, и такъ какъ подъинтегральная

функція четна*) (кривая симметрично расположена относительно оси ординатъ), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

Примѣръ 2. Вычислить $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$. По опредѣленію имѣемъ

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{x=\infty}\int_1^{x}\frac{dx}{x}=\lim_{x=\infty}\log x=\infty.$$

Примѣръ 3. Вычислить $\int_0^{\infty}\sin x\,dx$. По опредѣленію имѣемъ

$$\int_0^{\infty}\sin x\,dx=\lim_{x=\infty}\Big[-\cos x\Big]_0^{\infty}=\lim_{x=\infty}\Big[-\cos x+1\Big].$$

Но $\cos x$ при безграничномъ возрастаніи x не стремится ни къ какому предѣлу и потому символъ $\int_0^{\infty}\sin x\,dx$ не имѣетъ опредѣленной величины, не имѣетъ значенія.

§ 2. **Интегралы прерывныхъ функцій.** Если функція $f(x)$ непрерывна внутри интервала (ab), но прерывна въ обоихъ или въ одномъ изъ концовъ его, то нельзя говорить объ опредѣленномъ интегралѣ этой функціи въ предѣлахъ отъ a до b, опираясь на данное выше [гл. IV, § 4] опредѣленіе интеграла, ибо колебаніе функціи (M_i-m_i) въ концахъ интервала въ случаѣ прерывности не безконечно мало, какъ предполагается въ этомъ опредѣленіи (стр. 353). Но можно соотвѣтствующимъ дополненіемъ распространить это опредѣленіе и на этотъ случай.

Пусть функція $f(x)$, непрерывная внутри интервала (ab), испытываетъ перерывъ въ одномъ или обоихъ концахъ этого интервала.

*) Если $f(x)$ функція четная, т.-е. $f(x)=f(-x)$, то графика ея симметрично расположена относительно оси ординатъ. Въ силу этой симметріи интегралы $\int_{-a}^{0}f(x)\,dx$ и $\int_0^{a}f(x)\,dx$ равны, такъ какъ для каждаго элемента одного найдется соотвѣтственный и равный ему элементъ другого, и потому

$$\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_0^{a}f(x)\,dx=2\int_0^{a}f(x)\,dx.$$

Если $a < b$, то въ интервалѣ $(a+\varepsilon,\ b-\eta)$, гдѣ ε и η достаточно и сколь угодно малыя положительныя числа, разсматриваемая функція непрерывна, непрерывна и въ концахъ его, интегралъ этой функціи существуетъ, существуетъ и непрерывная первообразная функція $\Phi(x)$ *). Слѣдовательно, по первоначальному опредѣленію и основному предложенію имѣемъ

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx = \Big[\,\Phi(x)\,\Big]_{a+\varepsilon}^{b-\eta} = \Phi(b-\eta) - \Phi(a+\varepsilon)\,. \tag{1}$$

Предѣлъ этого выраженія при ε и η, стремящихся къ нулю, если только этотъ предѣлъ существуетъ, и называется въ обобщенномъ смыслѣ интеграломъ отъ a до b данной функціи:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}} \Big[\,\Phi(b-\eta) - \Phi(a+\varepsilon)\Big]\,. \tag{2}$$

Первообразная функція $\Phi(x)$ опредѣлена и непрерывна, какъ слѣдуетъ изъ первоначальнаго опредѣленія интеграла, внутри интервала (ab). Если $\lim \Phi(a+\varepsilon)$ и $\lim \Phi(b-\eta)$, при ε и η стремящихся къ нулю, существуютъ, то подъ $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ мы и будемъ разумѣть соотвѣтственно эти предѣлы:

$$\lim_{\varepsilon=0} \Phi(a+\varepsilon) = \Phi(a)\,, \qquad \lim_{\eta=0} \Phi(b-\eta) = \Phi(b), \tag{3}$$

Такимъ образомъ и для обобщеннаго интеграла имѣетъ мѣсто основное предложеніе:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)\,. \tag{4}$$

Въ частности, если функція $f(x)$ прерывна въ одномъ изъ концовъ интервала $(a,\ b)$, будемъ имѣть соотвѣтственно слѣдующіе обобщен-

---

*) Подъ $\Phi(x)$ можно разумѣть, напр., $\int_c^x f(x)\,dx$, гдѣ c какое нибудь опредѣленное а x перемѣнное число изъ интервала $(a,\ b)$ $a < c < b$ и $a < x < b$.

ные интегралы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,, \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta=0} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx\,. \qquad (5)$$

Къ подобному же обобщенію опредѣленія интеграла приводитъ и случай, когда подъинтегральная функція $f(x)$ испытываетъ разрывъ непрерывности внутри интервала (ab).

Пусть $f(x)$ прерывна при $x = c$. Внутри интерваловъ (ac) и (cb) разсматриваемая функція непрерывна и лишь въ одномъ изъ концовъ каждаго испытываетъ перерывъ. Слѣдовательно, по предыдущему опредѣленію будемъ имѣть

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx. \qquad (6)$$

Если эти обобщенные интегралы существуютъ, то подъ интеграломъ отъ a до b мы и будемъ разумѣть сумму ихъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx\,. \qquad (7)$$

Если первообразная функція, найденная, напр., путемъ неопредѣленнаго интегрированія, непрерывна во всемъ интервалѣ (ab), то существуютъ и не собственные интегралы отъ a до c и отъ c до b, а стало быть и отъ a до b. Дѣйствительно, пусть $\Phi(x)$ такая непрерывная въ интервалѣ (ab) первообразная функція данной. Къ интерваламъ $(a, c-\varepsilon)$ и $(c+\eta, b)$ примѣнимо основное предложеніе:

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = \Phi(c-\varepsilon) - \Phi(a) \quad \text{и} \quad \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(c+\eta) \qquad (8)$$

Переходя къ предѣламъ, полагая ε и η стремящимися къ нулю, получимъ

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \Phi(c-\varepsilon) - \Phi(a) \quad \text{и} \quad \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \lim_{\eta=0} \Phi(c+\eta).$$

Но по условію предѣлы $\lim\limits_{\varepsilon=0} \Phi(c-\varepsilon)$ и $\lim\limits_{\eta=0} \Phi(c+\eta)$ существуютъ:

$$\lim_{\varepsilon=0} \Phi(c-\varepsilon) = \Phi(c) \quad \text{и} \quad \lim_{\eta=0} \Phi(c+\eta) = \Phi(c).$$

Слѣдовательно, интегралы отъ a до c и отъ c до b, а стало быть и отъ a до b существуютъ.

Обратно, если существуютъ эти интегралы, то можно построить первообразную функцію, непрерывную во всемъ интервалѣ (ab), полагая

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx \quad \text{для} \quad a \leqq x < c \quad \text{и}$$

$$\Phi(x) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^x f(x)\,dx \quad \text{для} \quad c < x \leqq b. \tag{9}$$

При x, стремящемся къ c то и другое выраженіе стремится къ одному и тому же предѣлу—интегралу отъ a до c, который мы примемъ за значеніе $\Phi(c)$:

$$\lim_{x=c} \int_a^x f(x)\,dx = \lim_{x=c} \left[\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^x f(x)\,dx \right] = \int_a^c f(x)\,dx = \Phi(c), \tag{10}$$

ибо

$$\lim_{x=c} \int_c^x f(x)\,dx = \lim_{x=c} \left[\int_c^b f(x)dx - \int_x^b f(x)\,dx \right] = 0.$$

Поэтому основное предложеніе интегральнаго исчисленія имѣетъ мѣсто и для обобщеннаго на этотъ случай опредѣленнаго интеграла. Дѣйствительно, по предыдущему имѣемъ

$$\int_a^c f(x)\,dx = \Phi(c) - \Phi(a) \qquad \int_c^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(c). \tag{11}$$

По сложеніи этихъ интеграловъ получимъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{12}$$

Если бы несобственные интегралы отъ a до c и отъ c до b не существовали, то, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, невозможно построить никакимъ способомъ первообразной функціи, непрерывной во всемъ интервалѣ (ab), а потому не могутъ имѣть мѣста равенства (11), ибо $\Phi(c)$ не существуетъ, не имѣетъ мѣста поэтому и равенство (12).

Если подъинтегральная функція имѣетъ не одинъ, но конечное число перерывовъ между предѣлами интегрированія, напр., при $x=c_1, c_2, \ldots, c_n$ и интегралы отъ a до c_1, отъ c_1 до c_2 и т. д., отъ c_n до b существуютъ, то сумма ихъ и называется интеграломъ отъ a до b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

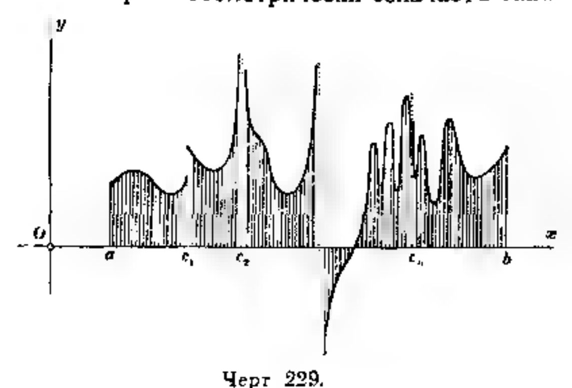
или

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_i=0\\ \eta_i=0}} \left[\int_a^{c_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c_1+\eta_1}^{c_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n+\eta_n}^{b} f(x)\,dx \right].$$

Для такой функціи, для которой эти обобщенные интегралы существуютъ, можетъ быть подобно предыдущему построена непрерывная первообразная функція $\Phi(x)$ и имѣетъ мѣсто основное предложеніе интегральнаго исчисленія:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (13)$$

Обобщенный интегралъ геометрически означаетъ такъ же, какъ и

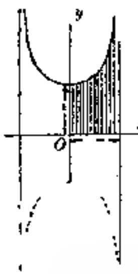


Черт 229.

въ первоначальномъ опредѣленіи, площадь, но ограниченную соотвѣтственно обобщенію (черт. 229).

Если перерывовъ между предѣлами интегрированія безконечное множество, то необходимы дальнѣйшія обобщенія.

Примѣръ 1. Вычислить измѣряемую отъ оси ординатъ площадь, заключенную между осью абсциссъ и кривой, данной уравненіемъ



Черт 230.

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

до ординаты, соотвѣтствующей абсциссѣ $x = 1$.

Разсматриваемая кривая (черт. 230) имѣетъ, какъ слѣдуетъ изъ ея уравненія, наименьшую ординату при $x=0$ и заключена въ полосѣ между ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ $+1$ и -1, приближаясь къ нимъ асимптотически. Опредѣляемая площадь равна интегралу данной функціи, взятому въ предѣлахъ отъ 0 до 1. Но при верхнемъ предѣлѣ подъинтегральная функція обращается въ безконечность. Согласно предыдущему имѣемъ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon=0} \Big[arc\sin x \Big]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} arc\sin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Примѣръ 2. Вычислить интегралъ $\int_{-1}^{1} x^{-n} dx$ при $n > 0$. Разсмотримъ два случая $n > 1$, напр., $n = 2$ и $n < 1$, напр., $n = 2/3$.

1. Интегралъ $\int_{-1}^{1} x^{-2} dx$ представляетъ положительную величину, ибо подъинтегральная функція x^{-2} для каждаго значенія аргумента имѣетъ положительное значеніе и dx при интегрированіи отъ -1 до $+1$ положительно. Неопредѣленнымъ интегрированіемъ получаемъ

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

Но основной формулы интегральнаго исчисленія въ данномъ случаѣ примѣнить нельзя, такъ какъ не только подъинтегральная функція x^{-2}, но и первообразная x^{-1} въ предѣлахъ интеграціи, именно при $x = 0$, обращается въ безконечность. Но если, не обративъ на это вниманія, мы примѣнили бы основную формулу вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ, то получили бы невозможный результатъ,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x} \Big]_{-1}^{+1} = -2,$$

т. е. положительная величина $\int_{-1}^{+1} x^{-2} dx$ равняется отрицательному числу.

Кривая $y=x^{-2}$, какъ видно изъ ея уравненія, состоитъ изъ двухъ вѣтвей, симметрично расположенныхъ относительно оси ординатъ, асимптотически приближающихся къ оси ординатъ въ положительномъ направленіи и оси абсциссъ одна въ положительномъ, другая въ отрицательномъ (черт. 231). Разсматриваемый интегралъ выражаетъ площадь, построенную на данномъ основаніи, но по оси y простирающуюся въ безконечность. Такъ какъ подъинтегральная функція въ предѣлахъ интеграціи обращается въ безконечность, то согласно опредѣленію такого интеграла имѣемъ

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\eta=0}\int_{+\eta}^{+1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon=0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\eta=0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{+\eta}^{+1}=$$

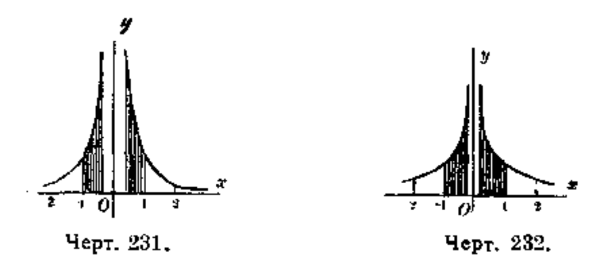
$$=\lim_{\varepsilon=0}\left[+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{1}\right]+\lim_{\eta=0}\left[-\frac{1}{1}+\frac{1}{\eta}\right]=\infty.$$

2. Подобнымъ же способомъ находимъ и интегралъ $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^{2/3}}$:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^{2/3}}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^{2/3}}+\lim_{\varepsilon=0}\int_{\eta}^{+1}\frac{dx}{x^{2/3}}=\lim_{\varepsilon=0}\left[3x^{1/3}\right]_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon=0}\left[3x^{1/3}\right]_{\eta}^{+1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\left[-3\sqrt[3]{\varepsilon}+3\right]+\lim_{\varepsilon=0}\left[3-3\sqrt[3]{\varepsilon}\right]=6.$$

Графика функціи $y=x^{-2/3}$ (черт. 232), будетъ такого же вида, какъ и графика функціи $y=x^{-2}$ съ тѣмъ только различіемъ, что вѣтви первой быстрѣе при-



Черт. 231. Черт. 232.

ближаются къ оси ординатъ (съ уменьшеніемъ абсолютной величины x) и медленнѣе къ оси абсциссъ (съ увеличеніемъ $|x|$). Поэтому-то опредѣляемая площадь въ одномъ случаѣ получается безконечно большая, а въ другомъ—конечная; **порядокъ безконечности** подъинтегральной функціи въ первомъ случаѣ больше, въ другомъ меньше единицы.

§ 3. Механическія квадратуры. Формула трапецій и формула Симпсона. Примѣняя основное предложеніе интегральнаго исчисленія (гл. VI, § 8), мы сводили вычисленіе опредѣленнаго интеграла къ отысканію первообразной функціи путемъ неопредѣленнаго интегрированія. Но не всегда, какъ мы уже знаемъ, первообразная функція данной можетъ быть выражена помощью элементарныхъ функцій въ конечномъ видѣ и поэтому не всегда сведеніе вычисленія опредѣленнаго интеграла къ неопредѣленному интегрированію приведетъ къ рѣшенію поставленной задачи. Наоборотъ, тогда непосредственное вычисленіе опредѣленнаго интеграла по его первоначальному опредѣленію

$$\int_a^x f(x)dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\ \Delta x = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\ \Delta x$$

можетъ служить основаніемъ изученія и первообразной функціи, по крайней мѣрѣ такое вычисленіе даетъ значенія первообразной функціи, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ аргумента (верхняго предѣла въ опредѣленномъ интегралѣ). Но непосредственное вычисленіе опредѣленнаго интеграла по его первоначальному опредѣленію чаще всего можетъ быть только приближеннымъ, именно, можно вычислить сумму $\Sigma f(x_i)\Delta x$, гдѣ $i=0,1,2,\ldots n-1$, полагая число слагаемыхъ этой суммы конечнымъ, другими словами — располагая конечнымъ числомъ значеній данной подъинтегральной функціи.

Имѣя въ виду геометрическое значеніе опредѣленнаго интеграла, можно сказать, что приближенное вычисленіе его сводится къ приближенному вычисленію площади, ограниченной осью абсциссъ, двумя ординатами и данной кривой, путемъ измѣренія конечнаго числа ординатъ этой ограничивающей кривой. Такое приближенное вычисленіе опредѣленнаго интеграла или площади носитъ названіе механической квадратуры.

Способъ трапецій. Пусть интервалъ (a, b) раздѣленъ на n равныхъ частей; обозначая каждую часть черезъ Δx, будемъ имѣть

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Значенія функціи при $x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ x_2=a+2\Delta x, \ldots,\ x_n=b$ вычислены, или, если мы имѣемъ дѣло съ графикой функціи, ор-

динаты, соотвѣтствующія абсциссамъ a, $a+\Delta x$, $a+2\Delta x$ и т. д. измѣрены. Обозначимъ ихъ черезъ $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ (черт. 233).

Площадь $ABDC$ выражается интеграломъ данной функціи. По опредѣленію интеграла имѣемъ

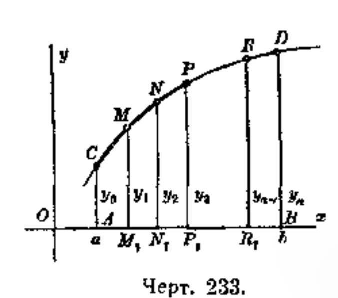
$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta x \qquad \int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\,\Delta x,$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\Big[y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\Big]; \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\Big[y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n\Big]. \qquad (2)$$

Если ордината кривой, ограничивающей измѣряемую площадь, все время возрастаетъ или все время убываетъ, иначе—если производная подъинтегральной функціи не мѣняетъ знака, то одна изъ суммъ (1), (2) будетъ меньше, а другая больше вычисляемаго опредѣленнаго интеграла, а потому среднее ариѳметическое этихъ суммъ точнѣе выражаетъ этотъ интегралъ, иначе ближе подходитъ къ измѣряемой площади:



Черт. 233.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\Big[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\Big]. \qquad (3)$$

Такимъ образомъ, располагая величинами $y_0, y_1, \ldots, y_n$ и величиной интервала $b-a$, можно вычислить по формулѣ (3) приближенно интегралъ $\int_a^b f(x)dx$.

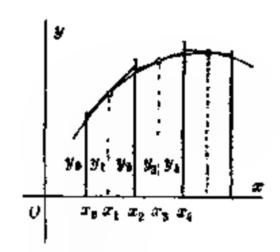
Ту же формулу мы могли бы получить, опредѣляя площади трапецій $ACMM_1$, $M_1MN_1N, \ldots R_1RBD$ и складывая ихъ, т. е. опредѣляя площадь многоугольной фигуры $ACBD$. Дѣйствительно,

$$\text{пг. } ACBD = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$

$$=\frac{b-a}{n}\Big[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\Big].$$

Поэтому и способъ приближеннаго вычисленія опредѣленнаго интеграла по формулѣ (3) носитъ названіе **способа трапецій**.

Кривая, ограничивающая измѣряемую площадь, замѣнена, при вычисленіи ея по способу трапецій, ломаной вписанной линіей $CMN\ldots\ldots RD$. При изгибѣ кривой выпуклостью, обращенной отъ **оси абсциссъ**, способъ трапецій даетъ площадь меньшую по абсолютной величинѣ измѣряемой, и, такимъ образомъ, мы получаемъ приближенное значеніе интеграла съ недостаткомъ. Но можно установить другую формулу для вычисленія приближеннаго значенія интеграла съ избыткомъ и такимъ образомъ имѣть критерій для оцѣнки точности полученнаго результата. Раздѣлимъ для этого каждое изъ прежнихъ дѣленій пополамъ. Такимъ образомъ, весь интервалъ (a, b) раздѣлится на $2n$ частей. Въ новыхъ точкахъ дѣленія проводимъ и **измѣряемъ** или **вычисляемъ** соотвѣтствующія ординаты. Перенумеруемъ всѣ измѣренныя ординаты заново $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ (черт. 234). Изъ нихъ прежнія ординаты будутъ съ четными, а новыя съ нечетными указателями. Проведя въ концахъ новыхъ ординатъ касательныя къ кривой до пересѣченія съ продолженіями сосѣднихъ (четныхъ) ординатъ, получимъ рядъ трапецій съ общей высотой $\frac{b-a}{n}$. Площади этихъ трапецій



Черт 234.

$$\frac{b-a}{n}\cdot y_1, \quad \frac{b-a}{n}\cdot y_3, \ldots, \quad \frac{b-a}{n}\cdot y_{2n-1},$$

въ суммѣ дадутъ приближенное значеніе интеграла съ избыткомъ, если кривая въ разсматриваемомъ интервалѣ выпуклостью обращена отъ оси абсциссъ:

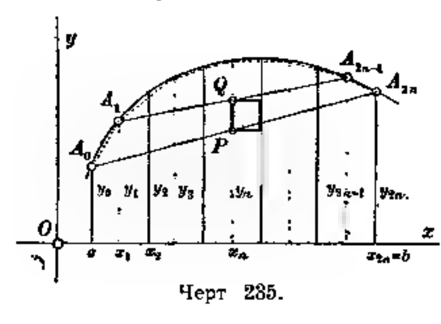
$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\left[y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}\right]. \tag{4}$$

При новой нумераціи ординатъ формула (3), дающая приближенное значеніе интеграла съ недостаткомъ, приметъ видъ

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_{2n}}{2} + y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}\right]. \tag{3'}$$

Вычисливъ обѣ суммы (4) и (3′), можно опредѣлить и степень точности: каждое изъ этихъ приближенныхъ значенiй опредѣленнаго интеграла отличается отъ истиннаго на величину меньшую ихъ разности.

Формулу (3′) можно замѣнить другою болѣе удобною для вычисленiй и опредѣленiя степени точности. Въ эту послѣднюю такъ же, какъ и въ формулу (4), войдутъ всѣ ординаты съ нечетными указателями и кромѣ нихъ только первая и послѣдняя. Эту новую формулу мы получимъ, опредѣливъ сумму площадей трапецiй, параллельными сторонами которыхъ служатъ y_0 и y_1, y_1 и y_3, y_3 и $y_5, \dots$, y_{2n-3} и y_{2n-1}, y_{2n-1} и y_{2n} (черт 235). Первая и послѣдняя имѣютъ высоту, равную $(b-a):2n$, а среднiя высоту $(b-a):n$.



Черт 235.

При выпуклости кривой, обращенной отъ оси абсциссъ, сумма этихъ площадей

$$\frac{b-a}{2n}\cdot\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_1+y_3}{2}+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_3+y_5}{2}+\dots$$

$$\dots+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_{2n-3}+y_{2n-1}}{2}+\frac{b-a}{2n}\cdot\frac{y_{2n-1}+y_{2n}}{2}$$

представляетъ величину меньшую измѣряемой и даетъ такимъ образомъ приближенное значенiе интеграла съ недостаткомъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_1}{4}+\frac{y_1+y_3}{2}+\dots+\frac{y_{2n-3}+y_{2n-1}}{2}+\frac{y_{2n-1}+y_{2n}}{4}\right]$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\left[y_1+y_3+\dots+y_{2n-1}\right]+\frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_{2n}}{2}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{2}\right]. \quad (5)$$

Обозначимъ выраженiе (4) черезъ I_1, выраженiе (3′) чрезъ I_2, а выраженiе (5) черезъ I_3. Степень погрѣшности I_1 и I_3 можно вы-

числить заранѣе, не вычисляя I_1 и I_3. Дѣйствительно,

$$I_3 - I_1 = \frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_{2n}}{2} - \frac{y_1+y_{2n-1}}{2}\right]. \tag{6}$$

Нужно знать такимъ образомъ только двѣ первыя и двѣ послѣднія ординаты. Эту разность $I_3 - I_1$ легко построить и графически. Соединимъ хордами первую точку кривой съ послѣдней и вторую съ предпослѣдней; эти хорды пересѣкутъ среднюю ординату y_n въ точкахъ P и Q, ординаты которыхъ какъ ординаты серединъ будутъ

$$\frac{y_0+y_{2n}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{y_1+y_{2n-1}}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$PQ = \frac{y_0+y_{2n}}{2} - \frac{y_1+y_{2n-1}}{2}.$$

Строя прямоугольникъ съ основаніемъ $(b-a):2n$ и высотой PQ, мы и представимъ геометрически размѣръ, котораго не превосходитъ погрѣшность. Вычисливъ заранѣе степень погрѣшности, мы можемъ опредѣлить число необходимыхъ десятичныхъ знаковъ въ ординатахъ y_i $(i = 0, 1, 3, \ldots, 2n-1, 2n)$, и тѣмъ самымъ избавляемся отъ ненужныхъ и лишнихъ вычисленій.

Примѣръ 1. Вычислить $\int_1^2 x^{-1}\,dx$. По основнымъ формуламъ интегральнаго исчисленія имѣемъ

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2\,.$$

По первоначальному опредѣленію $\log 2$ есть показатель степени, въ которую нужно возвести $e = 2{,}718\ldots$, чтобы получить 2:

$$e^z = 2 \quad \text{или} \quad (2{,}718\ldots)^z = 2; \quad z = \log 2\,.$$

Но вычисленіе по этому опредѣленію $\log 2$ практически граничитъ съ невозможностью. Такъ, напримѣръ, для вычисленія $\log 2$ съ двумя десятичными знаками пришлось бы обѣ части опредѣленнаго равенства возвесть въ сотую степень:

$$(2{,}718\ldots)^{100z} = 2^{100}\,.$$

Пришлось бы, такимъ образомъ, находить 2^{100}, пришлось бы потомъ перемножать число $e = 2{,}718\ldots$ само на себя до тѣхъ поръ, пока не получили бы подходящаго къ 2^{100} числа.

Механическія квадратуры даютъ возможность сравнительно легко опредѣлить $\log 2$ съ большою точностью. Дѣлимъ интервалъ $b-a=2-1=1$, напр., на 16 равныхъ частей:

$$2n=16\,,\qquad \frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{8}=\frac{1}{8}\,,\qquad \frac{b-a}{2n}=\frac{1}{16}\,.$$

Вычислимъ предварительно предѣлъ погрѣшности по формулѣ (6):

$$y_i=\frac{1}{x_i}\,;\quad y_0=1\,,\qquad y_1=\frac{1}{1^1/_{16}}=\frac{16}{17}=0{,}9411\ldots$$

$$y_{16}=\frac{0{,}5}{1{,}5}\qquad y_{15}=\frac{1}{2-{}^1/_{16}}=\frac{16}{31}=\frac{0{,}5161\ldots}{1{,}4572\ldots}$$

$$I_3-I_1=\frac{1}{16}\cdot\left[\frac{1{,}5}{2}-\frac{1{,}4572\ldots}{2}\right]=0{,}0013\ldots$$

Такимъ образомъ мы можемъ ожидать погрѣшности не болѣе 0,0013 ... и потому для дѣйствій съ восемью ординатами достаточно знать по четыре десятичныхъ знака.

Выпуклость данной кривой обращена къ оси абсциссъ и потому I_3 больше $\log 2$, а I_1 меньше. При вычисленіи I_3 будемъ послѣдній оставляемый знакъ ординаты увеличивать на единицу, а при вычисленіи I_1 не увеличивать, хотя бы первый отбрасываемый десятичный знакъ и былъ больше пяти; этимъ мы внесемъ новую погрѣшность, во всякомъ случаѣ не превосходящую $^1/_{16}\,(0{,}0008+0{,}0008)=0{,}0001$. Такимъ образомъ $\log 2$ можно вычислить помощью десяти ординатъ y_i ($i=0, 1, 3, \ldots, 13, 15, 16$) съ погрѣшностью, не превосходящей 0,0015.

$$y_i=\frac{1}{x_i}=\frac{1}{1+\frac{i}{16}}\,.$$

$$y_1=\frac{16}{17}=0{,}9411\ldots\qquad y_9=\frac{16}{25}=0{,}64\quad \overline{3{,}2407\ldots}$$

$$y_3=\frac{16}{19}=0{,}8421\ldots\qquad y_{11}=\frac{16}{27}=0{,}5925\ldots$$

$$y_5=\frac{16}{21}=0{,}7619\ldots\qquad y_{13}=\frac{16}{29}=0{,}5517\ldots$$

$$y_7=\frac{16}{23}=\frac{0{,}6956\ldots}{3{,}2407\ldots}\qquad y_{15}=\frac{16}{31}=\frac{0{,}5161\ldots}{5{,}5410\ldots}$$

$$I_1>\frac{1}{8}\cdot 5{,}5410\ldots=0{,}6926$$

$$I_3\leqq\frac{1}{8}\cdot 5{,}5417+0{,}0013\ldots<0{,}6941$$

$$0{,}6926<\int_1^2\frac{dx}{x}=\log 2<0{,}6941\,.$$

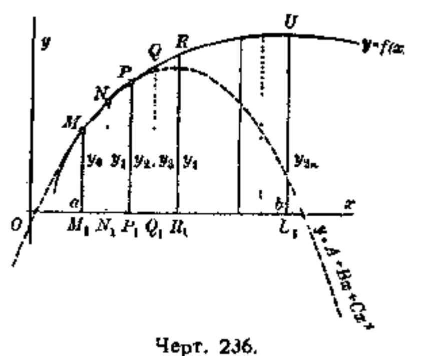
Среднее ариѳметическое I_1 и I_3 будетъ отличаться отъ $log\,2$ меньше, чѣмъ на $^1/_2 \cdot 0{,}0015 = 0{,}00075$, хотя остается неизвѣстнымъ, будетъ ли оно больше или меньше $log\,2$:

$$log\,2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \sim 0{,}693 \text{ (съ ошибкой } < 0{,}00075)$$

Истинное значеніе $log\,2 \quad 0{,}69314\ldots$

Формула Симпсона. Еще лучшее приближеніе при томъ же числѣ измѣренныхъ или вычисленныхъ ординатъ даетъ формула Симпсона. При составленіи формулы трапецій мы замѣняли данную кривую, ограничивающую измѣряемую площадь, ломаной линіей. По Симпсону замѣняются части ограничивающей кривой дугами параболъ, соотвѣтственно подобранныхъ.

Раздѣляя интервалъ (a, b) на n равныхъ частей, разобьемъ измѣряемую площадь на n полосъ MM_1PP_1, $PP_1RR_1, \ldots$ (черт. 236). Въ каждой изъ этихъ полосъ проведемъ сверхъ того среднюю ординату. Вычислимъ приближенно площадь первой полосы MM_1PP_1, замѣняя дугу MNP данной кривой дугою параболы



Черт. 236.

$$y \quad A + Bx + Cx^2, \tag{7}$$

подобравъ коэффиціенты A, B, C такъ, чтобы эта парабола проходила черезъ точки M, N, P, т.-е. чтобы имѣли мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} y_0 &- A + Bx_0 + Cx_0^2, \\ y_1 &= A + Bx_1 + Cx_1^2, \\ y_2 &= A + Bx_2 + Cx_2^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Эти три соотношенія обращаются въ уравненія для опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ A, B, C. Но можно, не опредѣляя, исключить эти коэффиціенты въ окончательномъ результатѣ. Такъ какъ точка N_1 лежитъ въ срединѣ отрѣзка M_1P_1, то $x_1 = (x_0 + x_2) . 2$ и соотношенія (8) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{gathered} y_0 = A + Bx_0 + Cx_0^2, \\ 4y_1 - 4A + 2B(x_0 + x_2) + C(x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2), \\ y_2 = A + Bx_2 + Cx_2^2. \end{gathered} \tag{8'}$$

Исходя изъ геометрическаго значенія опредѣленнаго интеграла имѣемъ

$$\text{площ. } MM_1PP_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$$

и, замѣняя кривую $y = f(x)$ параболой (7), получимъ

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \sim \int_{x_0}^{x_2} (A + Bx + Cx^2)dx.$$

Интегрируя, находимъ

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \sim A(x_2 - x_0) + B\frac{x_2^2 - x_0^2}{2} + C\frac{x_2^3 - x_0^3}{3}.$$

или

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \sim \frac{x_2 - x_0}{6}\left[6A + 3B(x_2 + x_0) + 2C(x_2^2 + x_0x_2 + x_0^2)\right].$$

Какъ слѣдуетъ изъ соотношеній (8'):

$$6A + 3B(x_0 + x_2) + 2C(x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2) = y_0 + 4y_1 + y_2.$$

Слѣдовательно,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \sim \frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Обозначая $\frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{b-a}{2n}$ черезъ h, получимъ:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \sim \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (9)$$

Подобнымъ же образомъ находимъ:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \sim \frac{h}{3}(y_2 + 4y_2 + y_4),$$

. . . .

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \sim \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Складывая соотвѣтственныя части этихъ приближенныхъ равенствъ и полагая $x_0 = a$, а $x_{2n} = b$, получимъ приближенное значеніе из-

мѣряемой площади или вычисляемаго интеграла:

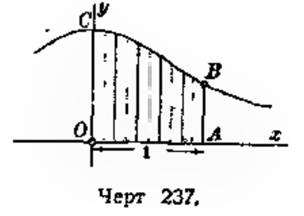
$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{h}{3}\Big[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})\Big]$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{h}{3}\Big[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})\Big] \quad (10)$$

Мы уже обозначили величину приближеннаго значенія интеграла по формуламъ трапецій (4) и (3′) соотвѣтственно черезъ I_1 и I_2. Обозначимъ соотвѣтствующую величину по формулѣ Симпсона черезъ I. Нетрудно убѣдиться въ слѣдующемъ соотношеніи этихъ величинъ:

$$I = \frac{I_2}{3} + \frac{2I_1}{3} = I_1 - \frac{I_1 - I_2}{3}.$$



Черт 237.

Примѣръ 2. Вычислить приближенно число π по формулѣ Симпсона, зная, что

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,1 = \frac{\pi}{4}.$$

Кривая $y = (1+x^2)^{-1}$ имѣетъ видъ, указанный на чертежѣ 237. Раздѣлимъ данный интервалъ $b - a = 1$ на десять равныхъ частей и вычислимъ соотвѣтственныя ординаты:

$$y_0 = 1$$
$$y_{10} = \underline{0{,}5}$$
$$1{,}5$$

$$y_1 = \frac{1}{1{,}01} = 0{,}990099\ldots \qquad y_2 = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}961538\ldots$$
$$y_3 = \frac{1}{1{,}09} = 0{,}917431\ldots \qquad y_4 = \frac{1}{1{,}16} = 0{,}862068\ldots$$
$$y_5 = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8 \qquad y_6 = \frac{1}{1{,}36} = 0{,}735294\ldots$$
$$y_7 = \frac{1}{1{,}49} = 0{,}671140\ldots \qquad y_8 = \frac{1}{1{,}64} = \underline{0{,}609756\ldots}$$
$$3{,}168656^{+4}$$
$$\times\,2$$
$$6{,}337312^{+8}$$
$$y_9 = \frac{1}{1{,}81} = \underline{0{,}552486\ldots}$$
$$3{,}931156^{+4}\ {}^{*)}$$
$$\times\,4$$
$$15{,}724624^{+16}$$

---

1) Для результата съ избыткомъ прибавляется къ послѣднему знаку 4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \sim \frac{0,1}{3}\left[1,5 + 6,337312 + 15,724624\right] = \frac{1}{3} \cdot 2,3561936^{+21}$$

$$\pi \sim \frac{4}{3} \cdot 2,3561936 = \frac{9,4247744}{3} \sim 3,1415918^{+32}$$

Сравнивая съ извѣстнымъ значеніемъ π *) полученный результатъ, мы видимъ, что онъ точенъ до пятаго десятичнаго знака включительно. Но установить критерій для оцѣнки ошибки, допускаемой при вычисленіи по формулѣ Симпсона, мы могли бы только на основаніи разложенія функціи въ рядъ; разложеніе функцій въ ряды входитъ во вторую часть дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

§ 4. Оцѣнка значенія опредѣленнаго интеграла. Въ предшествующемъ параграфѣ мы разсматривали способы вычисленія значенія того или другого опредѣленнаго интеграла съ желаемой степенью точности, которой можно достигнуть, увеличивая число дѣленій разсматриваемаго интервала. Но часто, особенно въ вопросахъ теоретическихъ, требуется знать только грубо приближенное значеніе интеграла, знать только предѣлы, хотя бы и не близкіе между собой, въ которыхъ оно заключено. Для такого грубаго опредѣленія значенія интеграла могутъ служить слѣдующія три предложенія.

1. Если въ интервалѣ $(b-a)$ подъинтегральная функція $f(x)$ имѣетъ наибольшее значеніе M и наименьшее m, то

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\, dx < M(b-a), \tag{1}$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mu\,(b-a), \qquad \text{гдѣ} \qquad m < \mu < M. \tag{1'}$$

Функція $f(x)$ предполагается непрерывной въ интервалѣ (ab) и потому принимаетъ всякое значеніе, заключенное между m и M; слѣдовательно, существуетъ такое значеніе ξ аргумента, заключенное между a и b, при которомъ значеніе этой функціи равно числу μ:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,.\,(b-a), \qquad \text{гдѣ} \qquad f(\xi) = \mu \quad \text{и} \quad a < \xi < b. \tag{1''}$$

*) $\pi \sim 3,1415926536\ldots$

Это предложеніе мы уже имѣли среди основныхъ свойствъ опредѣленныхъ интеграловъ на стр. 364.

При разбіеніи интервала $(b-a)$ на равныя части $\Delta x = (b-a):n$ мы по опредѣленію должны имѣть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n=\infty}\Delta x\Big[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\Big] =$$

$$= (b-a)\lim_{n=\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

или

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Вторая часть предыдущаго равенства есть предѣлъ средняго ариеметическаго равноотстоящихъ значеній функціи $f(x)$, а правая по предыдущему ($1''$) равна $f(\xi)$. Поэтому $f(\xi)$ или $\frac{1}{b-a}\int f(x)\,dx$ и называется среднимъ значеніемъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ $(b-a)$. Интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ геометрически означаетъ площадь, извѣстнымъ образомъ ограниченную (черт 209, на стр. 365). Для полученія средняго значенія функціи въ интервалѣ ab нужно соотвѣтствующую этому интервалу площадь раздѣлить на основаніе (интервалъ) $b-a$.

Примѣръ 1. Въ какихъ предѣлахъ заключается значеніе интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}, \quad \text{гдѣ} \quad n > 1?$$

Наибольшее значеніе функціи $\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}$ въ интервалѣ $(1-0)$ имѣетъ при $x=0$:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right]_{x=0} = 1,$$

а наименьшее при $x=1$:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right]_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ldots$$

Слѣдовательно,

$$0{,}707\ldots < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} < 1.$$

Замѣчаніе. Разсмотрѣнное выше предложеніе въ формѣ равенства ($1''$) есть не что иное, какъ теорема о конечныхъ приращеніяхъ (стр. 340), только въ иномъ видѣ. Дѣйствительно, полагая, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{и слѣд.} \quad F'(x) = f(x),$$

имѣемъ по основному предложенію интегральнаго исчисленія:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Въ силу же формулы ($1''$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = (b-a)\,f(\xi), \quad \text{гдѣ} \quad a < \xi < b,$$

или наконецъ, такъ какъ $f(x) = F'(x)$:

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(\xi).$$

А эта формула и выражаетъ теорему о конечныхъ приращеніяхъ.

2. Положимъ, что три функціи $\varphi(x)$, $f(x)$ и $\psi(x)$ таковы, что въ интервалѣ (a, b) имѣютъ мѣсто неравенства

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x). \tag{2}$$

Черт. 238.

Чертежъ 238 показываетъ геометрическое значеніе этихъ неравенствъ: графика функціи $f(x)$ заключена между графиками функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не пересѣкая ихъ въ предѣлахъ разсматриваемаго интервала.

Ясно геометрически, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, будетъ какой-нибудь средней между площадями, ограниченными кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$.

Дѣйствительно, по условію $f(x) - \varphi(x) > 0$ и $\psi(x) - f(x) > 0$ для всякаго значенія x, заключеннаго между a и b. Поэтому предполагая $a < b$ будемъ имѣть

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx > 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b [\psi(x) - f(x)]\,dx > 0,$$

такъ какъ каждый изъ этихъ интеграловъ состоитъ изъ положитель-

ныхъ элементовъ. Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx > 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b f(x)dx > 0$$

или

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx\,. \tag{3}$$

Если функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ таковы, что мы можемъ опредѣлить ихъ интегралы, то мы будемъ знать, между какими предѣлами заключенъ и интегралъ данной функціи.

Примѣръ 2. Оцѣнить по этому способу опредѣленный интегралъ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}\,, \quad \text{гдѣ} \quad n > 1$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $0 < x < 1$, а $n > 1$, то имѣютъ мѣсто для этого интервала неравенства

$$0 < x^n < x$$

и поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} > \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,.$$

Отсюда, примѣняя формулу (3), будемъ имѣть

$$\int_0^1 dx > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}\,.$$

Производя, гдѣ можно, интегрированіе, находимъ

$$\Big[\,x\,\Big]_0^1 > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > \Big[\,2\sqrt{1+x}\,\Big]_0^1,$$

т. е.

$$1 > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > 2(\sqrt{2}-1) \qquad \text{или} \qquad 1 > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > 0{,}828\ldots$$

3. Теорема о среднемъ значеніи интеграла. Наконецъ, можно предложить и такой способъ для приближенной оцѣнки интеграла. Положимъ, что подъинтегральную функцію $f(x)$ можно представить въ видѣ произведенія двухъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при

чемъ одна изъ нихъ, пусть $\varphi(x)$, въ разсматриваемомъ интервалѣ (a, b) не принимаетъ отрицательныхъ значеній. Предполагается, что $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функціи непрерывныя. Пусть наибольшее изъ всѣхъ значеній функціи $\psi(x)$ въ этомъ интервалѣ будетъ M, а наименьшее m. Поэтому для значеній x, заключенныхъ въ интервалѣ (a, b), имѣютъ мѣсто неравенства

$$m < \psi(x) < M .$$

Умножая на $\varphi(x)$, по условію не отрицательную величину при всякомъ значеніи аргумента въ интервалѣ (a, b), будемъ имѣть

$$m\varphi(x) < \varphi(x)\psi(x) < M\varphi(x) .$$

Предполагая, что $a < b$, будемъ имѣть на основаніи предыдущаго свойства

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < M\int_a^b \varphi(x)dx . \tag{4}$$

Если $a > b$, то каждый элементъ каждаго изъ этихъ интеграловъ измѣнитъ свой знакъ и потому

$$m\int_a^b \varphi(x)dx > \int_a^b f(x)dx > M\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{4'}$$

Если мы знаемъ значенія m и M и кромѣ того значеніе интеграла функціи $\varphi(x)$, то мы будемъ знать и въ какихъ предѣлахъ заключено значеніе интеграла данной функціи.

Можно написать далѣе

$$\int_a f(x)\,dx = \mu\int_a \varphi(x)dx, \quad \text{гдѣ} \quad m < \mu < M .$$

Такъ какъ функція $\psi(x)$ въ интервалѣ (a, b) непрерывна, то при нѣкоторомъ значеніи аргумента она принимаетъ значеніе μ [гл. II § 11, слѣд. 3 теор.]:

$$\mu = \psi(\xi) \quad \text{гдѣ} \quad a < \xi < b ,$$

, слѣдовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \psi(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx . \tag{5}$$

Это равенство и составляетъ теорему о среднемъ значеніи интеграла.

Въ частномъ случаѣ, положивъ $\varphi(x)=1$ и, слѣдовательно, $f(x)=\psi(x)$, получимъ разсмотрѣнное выше соотношеніе (1'').

$$\int_a^b f(x)dx=\psi(\xi)\int_a^b dx=f(\xi)\,.\,(b-a)\,.$$

Примѣръ 3. Оцѣнить интегралъ $\int_0^1 x^2e^{-x^2}dx$.

Каждый изъ множителей x^2 и e^{-x^2} подъинтегральной функціи въ предѣлахъ интегрированія не принимаетъ отрицательныхъ значеній, поэтому любой изъ нихъ можно принять за $\varphi(x)$. Пусть $\varphi(x)=x^2$, а $\psi(x)=e^{-x^2}$. Для значенія аргумента въ предѣлахъ интегрированія имѣемъ

$$\frac{1}{e}<e^{-x^2}\leqq 1\,,\quad \text{т.-е.}\quad m=\frac{1}{e}\quad \text{и}\quad M=1\,.$$

Умножая члены этихъ неравенствъ на положительное число $x^2\,dx$, будемъ имѣть

$$\frac{x^2\,dx}{e}\leq x^2e^{-x^2}\,dx\leq x^2\,dx\,,$$

откуда

$$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{e}<\int_0^1 x^2e^{-x^2}dx<\int_0^1 x^2dx\,.$$

или

$$\frac{1}{3e}<\int_0^1 x^2e^{-x^2}\,dx<\frac{1}{3}$$

УПРАЖНЕНІЯ.

1. $\int_0^\infty e^x\,dx=?$
2. $\int_{-\infty}^a e^x\,dx=e^a.$
3. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1.$
4. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}=?$
5. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}=2.$
6. $\int_0^\infty \sin x\,dx=?$
7. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}}=3\sqrt[3]{b-a}.$
8. $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a.$
9. $\int_0^{\frac{4}{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+4}}=\frac{32}{27}.$
10. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\pi}{2}$

ГЛАВА VII.

ПРИЛОЖЕНІЕ ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ КЪ ГЕОМЕТРІИ.

§ 1. **Квадратура площадей въ прямоугольныхъ и косоугольныхъ координатахъ.** Задачу измѣренія площади, ограниченной кривой линіей, двумя ординатами и осью абсциссъ, мы уже разсматривали при самой постановкѣ задачи интегральнаго исчисленія. Связь между той и другой задачей настолько тѣсная, что самое названіе задачи измѣренія площади — квадратура — перенесено на задачу вычисленія интеграла, и принято говорить, что вопросъ, хотя бы и не геометрическій, сводится къ квадратурѣ, если удалось привести его къ интегрированію нѣкотораго выраженія.

1. Если ограничивающая кривая дана уравненіемъ $y = f(x)$ относительно прямоугольной системы координатъ, то площадь (черт. 206, стр. 335), заключенная между этой кривой, осью абсциссъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b, представляется въ видѣ опредѣленнаго интеграла:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx\,. \tag{1}$$

Элементъ этого интеграла $f(x)dx$ или ydx представляетъ площадь элементарнаго прямоугольника, который соотвѣтственно различнымъ значеніямъ x, заключеннымъ между a и b, мѣняетъ свою высоту, занимая различныя положенія въ измѣряемой площади

Если кривая $y = f(x)$ пересѣкаетъ ось абсциссъ въ предѣлахъ интегрированія a, b, то интегралъ отъ a до b дифференціала $f(x)dx$ даетъ разность площадей, расположенныхъ надъ осью абсциссъ, и площадей, расположенныхъ подъ этою осью (стр. 350).

2. Случай косоугольной системы координатъ. Ограничивающая кривая $y = f(x)$ можетъ быть отнесена къ косоуголь-

ной системѣ координатъ. Въ такомъ случаѣ площадь I, ограниченная этою кривой, осью абсциссъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b, разбивается на элементарные параллелограммы (черт. 239), а не прямоугольники.

Высота элементарнаго параллелограмма равна $y \sin \omega$, а площадь его $y \sin \omega \, dx$, гдѣ ω координатный уголъ, и потому

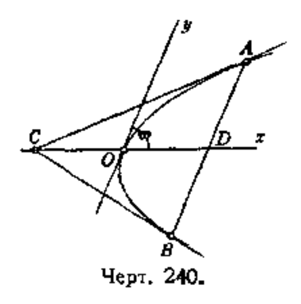
$$I = \sin \omega \int_a^b y \, dx. \qquad (2)$$

Черт. 239.

Примѣръ. Вычислить площадь какого-либо сегмента параболы. Примемъ за ось абсциссъ діаметръ, сопряженный хордѣ, служащей основаніемъ параболическаго сегмента, а за ось ординатъ касательную въ концѣ этого діаметра (черт. 240). Уравненіе параболы, отнесенной къ этимъ осямъ, имѣетъ видъ $y^2 = 2p'x$ (стр. 141). Ось абсциссъ дѣлитъ площадь сегмента I на двѣ части I_1 и I_2; для одной изъ нихъ $y = \sqrt{2p'x}$, а для другой $y = -\sqrt{2p'x}$; слѣдовательно, обѣ части по абсолютной величинѣ равны между собой и потому

$$I = 2I_1 = 2 \sin \omega \int_0^{x_1} \sqrt{2p'} \cdot \sqrt{x} \, dx = 2 \sin \omega \sqrt{2p'} \cdot \frac{2}{3} x_1^{\frac{3}{2}},$$

гдѣ x_1 абсцисса конечной точки дуги сегмента. Такъ какъ $\sqrt{2p'x_1} = y_1$, то



Черт. 240.

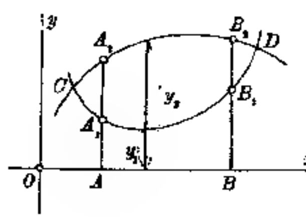
$$I = \frac{2}{3} x_1 \cdot 2y_1 \sin \omega.$$

Но $x_1 \, 2y_1 \sin \omega$ представляетъ величину площади параллелограмма съ основаніемъ равнымъ x_1 и высотой, равной основанію сегмента, а этотъ параллелограммъ равновеликъ треугольнику *), образованному основаніемъ сегмента и касательными къ параболѣ въ концахъ этого основанія. Такимъ образомъ, площадь параболическаго сегмента равна двумъ третямъ площади описаннаго треугольника.

---

*) Уравненіе касательной и въ косоугольныхъ координатахъ имѣетъ видъ $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$; въ частности уравненіе касательной къ параболѣ $y^2 = 2p'x$ имѣетъ видъ $yy_1 = p'(x + x_1)$, откуда, при $y = 0$, $x = -x_1$, а это значитъ, что отрѣзокъ діаметра, заключенный между сопряженной этому діаметру хордой и касательной въ концѣ ея, дѣлится параболой пополамъ.

§ 2. **Вычисленіе площади, ограниченной замкнутой кривой линіей.** Изъ формулъ предыдущихъ параграфовъ можно вывести способы вычисленія площади фигуры, ограниченной замкнутой непересѣкающей себя кривой линіей. Разсмотримъ сначала фигуру, ограниченную двумя кривыми линіями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b. Пусть въ интервалѣ (ab) соотвѣтствующія значенія функцій удовлетворяютъ неравенству $y_1 < y_2$, т.-е. кривая $y_1 = f_1(x)$ ограничиваетъ разсматриваемую фигуру снизу, а вторая $y_2 = f_2(x)$ сверху (черт. 241). Какъ видно изъ чертежа



Черт. 241

$$\text{пл. } A_1B_1B_2A_2 = \text{пл. } ABB_2A_2 - \text{пл. } ABB_1A_1.$$

Слѣдовательно,

$$\text{пл. } A_1B_1B_2A_2 = \int_a^b y_2\,dx - \int_a^b y_1\,dx = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx. \qquad (1)$$

Если a и b суть абсциссы двухъ послѣдовательныхъ точекъ пересѣченія данныхъ кривыхъ, то интегралъ (1) опредѣляетъ площадь, заключенную между дугами этихъ кривыхъ. Та же формула (1) даетъ возможность опредѣлить и площадь фигуры, ограниченной замкнутой не пересѣкающей себя кривой линіей, если только съ любою прямой, параллельной оси ординатъ и заключенной между двумя параллельными этой оси касательными, эта кривая пересѣкается въ двухъ точкахъ. Таковы, напр., фигуры эллипса, круга и другихъ выпуклыхъ оваловъ. Изъ уравненія такой кривой $F(x, y) = 0$ должно опредѣлить сначала двѣ ординаты y_1 и y_2, соотвѣтствующія одной и той же абсциссѣ.

Примѣръ 1. Опредѣлить площадь I круга $x^2 + y^2 = a^2$. Изъ уравненія круга имѣемъ

$$y_1 = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Слѣдовательно,

$$I = \int_{a}^{+a} (y_2 - y_1)\,dx = 2\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Но

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Слѣдовательно,

$$I = 2\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{+a} = \pi a^2.$$

Примѣръ 2. Вычислить площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Изъ уравненій эллипса имѣемъ

$$y_1 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Слѣдовательно,

$$I = \int_{-a}^{+a}(y_2 - y_1)\,dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi ab.$$

§ 3. **Случай параметрическаго представленія кривой.** Если въ уравненіи $y = f(x)$ (при прямоугольныхъ осяхъ координатъ) абсцисса точки дана какъ нѣкоторая функція параметра t, то и ордината ея будетъ нѣкоторой опредѣленной функціей того же параметра:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \text{гдѣ} \quad \psi(t) = f[\varphi(t)]. \qquad (1).$$

При такомъ параметрическомъ представленіи кривой вычисленіе площади сводится къ вычисленію преобразованнаго интеграла (1) § 1 помощью подстановки $x = \varphi(t)$ и потому здѣсь нужно имѣть въ виду тѣ условія и особенности, которыя были указаны (гл. V § 14). въ вопросѣ о преобразованіи опредѣленнаго интеграла помощью введенія новаго перемѣннаго. Такимъ образомъ, если функція $\psi(t) = f[\varphi(x)]$, а также функція $\varphi(t)$ и ея производная $\varphi'(t)$ непрерывны въ интервалѣ $(t_0 t_1)$ для t, соотвѣтствующемъ интервалу (ab) для x, то

$$I = \int_a^b y\,dx = \int_{t_0}^{t_1}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (2)$$

Черт. 242.

Примѣръ. Вычислить площадь I, ограниченную одною вѣтвью циклоиды.

Линія, описанная точкою окружности, катящейся безъ скольженія по прямой, называется циклоидой. Пусть точка M, описывающая циклоиду, въ начальномъ положеніи круга радіуса a была въ началѣ координатъ (черт. 242). За параметръ, опредѣляющій положеніе точки M, примемъ уголъ t, на который повернулся радіусъ катящагося круга, идущій въ точку M, отъ своего начальнаго (вертикальнаго) положенія. Координаты точки M въ какомъ либо ея положеніи можно выразить въ зависимости отъ этого угла t и радіуса a катящагося круга. Дѣйствительно, пусть P точка прикосновенія круга къ оси абсциссъ, а

Q основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на вертикальный радіусъ круга, какъ видно изъ чертежа

$$x = ON = OP - MQ, \quad y = NM - PA - QA;$$

но согласно условію и изъ треугольника MQA имѣемъ

$$OP = \breve{PM} = at, \quad MQ = a \sin t, \quad QA = a \cos t \quad \text{и} \quad PA = a.$$

Слѣдовательно,

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Таково параметрическое представленіе циклоиды. При измѣненіи угла t отъ 0 до 2π, x измѣняется отъ 0 до $2\pi a$, а точка M опишетъ одну вѣтвь циклоиды.

Опредѣлимъ теперь искомую площадь I Полагая $y = a(1 - \cos t)$ и $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, будемъ имѣть

$$I = \int_0^{2\pi a} y\,dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt.$$

$$\int_0^{2\pi} dt = \Big[\ t\ \Big]_0^{2\pi} = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = \Big[\ \sin t\ \Big]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos t\,d\sin t = \Big[\ \cos t \sin t\ \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt$$

или

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \pi.$$

Такимъ образомъ

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2,$$

т.-е. искомая площадь равна утроенной площади катящагося круга.

§ 4. Квадратура криволинейнаго сектора въ полярныхъ координатахъ. Пусть кривая линія дана уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ

$$r = f(\varphi), \tag{1}$$

гдѣ r радіусъ-векторъ, а φ амплитуда, т.-е. уголъ между полярною осью и радіусомъ-векторомъ. Вычисленіе площади сектора, ограниченнаго двумя данными радіусами-векторами и дугой кривой линіи, можетъ быть сведено къ вычисленію нѣкотораго опредѣленнаго интеграла.

Площадь I сектора OAM, начальный радіусъ-векторъ котораго неподвиженъ, а послѣдній перемѣщается вмѣстѣ съ измѣненіемъ φ, будетъ нѣкоторой функціей амплитуды φ; площадь сектора OMM_1, полученнаго при маломъ измѣненіи φ, будетъ приращеніемъ этой функціи:

$$\text{пл. } OMM_1 = \Delta I.$$

При достаточно маломъ измѣненіи амплитуды $\Delta\varphi$ эта площадь OMM_1 будетъ заключена между круговыми секторами OMN и OM_1P (черт. 243), гдѣ MN и M_1P дуги круговъ радіуса — одна r, другая $r+\Delta r$; если r возрастаетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ φ, то

$$\text{пл. } O\overset{\frown}{MN} < \text{пл. } O\overset{\frown}{MM_1} < \text{пл. } O\overset{\frown}{M_1P},$$

или

$$\text{пл. } O\overset{\frown}{MN} < \Delta I < \text{пл. } O\overset{\frown}{M_1P}. \qquad (2)$$

Черт. 243.

Но площадь кругового сектора равна произведенію радіуса на половину дуги сектора; а дуга круга равна радіусу на дуговую мѣру центральнаго угла:

$$\text{пл. } O\overset{\frown}{MN} = OM \cdot \frac{\overset{\frown}{MN}}{2} = r\,\frac{r\,\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{2}\,r^2\Delta\varphi. \qquad (3)$$

$$\text{пл. } O\overset{\frown}{M_1P} = OM_1 \cdot \frac{\overset{\frown}{M_1P}}{2} = \frac{1}{2}\,(r+\Delta r)^2\,\Delta\varphi \qquad (3')$$

Предыдущія неравенства (2) принимаютъ поэтому видъ

$$\frac{1}{2}\,r^2\,\Delta\varphi < \Delta I < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\varphi,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\,r^2 < \frac{\Delta I}{\Delta\varphi} < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2,$$

а послѣ перехода къ предѣлу имѣемъ

$$\frac{1}{2}\,r^2 \leq \frac{dI}{d\varphi} < \frac{1}{2}\,r^2.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{dI}{d\varphi} = \frac{1}{2} r^2 \quad \text{и} \quad dI = \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi. \tag{4}$$

Такимъ образомъ мы нашли дифференціалъ площади I, разсматриваемой какъ функція амплитуды φ. Если начальный радіусъ-векторъ, ограничивающій эту площадь, соотвѣтствуетъ амплитудѣ φ_1, то

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi} dI = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 \, d\varphi. \tag{5}$$

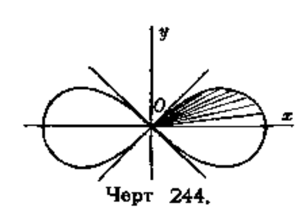
Примѣръ 1. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли. Уравненіе лемнискаты въ Декартовыхъ координатахъ

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2). \tag{6}$$

Уравненіе той же кривой въ полярныхъ координатахъ получимъ, полагая въ уравненіи $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$ (стр. 153).

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad \text{или} \quad r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi} \; ^{*)}. \tag{7}$$

Радіусъ-векторъ опишетъ четверть искомой площади, если φ мѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{4}$.



Черт 244.

$$\frac{1}{4} I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi.$$

$$\frac{1}{4} I = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d2\varphi - \frac{a^2}{4} \Big[\sin 2\varphi \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Слѣдовательно,

$$I = a^2.$$

---

*) Изъ уравненія (6) видно, что лемниската симметрично расположена относительно осей координатъ, ибо x и y входятъ только въ четныхъ степеняхъ. Изъ уравненія (7) слѣдуетъ, что въ первой четверти r дѣйствительная величина только при $2\varphi < \frac{\pi}{2}$ или $\varphi < \frac{\pi}{4}$; наибольшее значеніе по абсолютной величинѣ радіуса-вектора будетъ a; наибольшее значеніе ординаты

$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \,.\, \sin\varphi = a \sqrt{\frac{\cos 2\varphi\,(1 - \cos 2\varphi)}{2}}$$

по абсолютной величинѣ $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, соотвѣтствующая абсцисса $[x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \,.\, \cos\varphi]$ имѣетъ величину $\pm \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Сопоставляя эти результаты, можно убѣдиться, что лемниската имѣетъ видъ восьмерки въ горизонтальномъ положеніи (черт. 244).

мулѣ аналитической геометріи (стр. 31), будемъ имѣть

$$\text{пл. } OA_iA_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2}[x_i(y_i + \Delta y_i) - (x_i + \Delta x_i) y_i]$$

или по приведеніи

$$\text{пл. } OA_iA_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Слѣдовательно,

$$\text{пл. } OAA_1A_2 \ldots A_i \ldots A_{n-1} B = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n-1}(x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i)$$

и

$$\text{пл. } O\widetilde{AB} = \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\sum_{i=0}^{i=n-1}(x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i)$$

или

$$\text{пл. } O\widetilde{AB} = \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\sum_{i=0}^{i=n-1}x_i \Delta y_i - \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\sum_{i=0}^{i=n-1}y_i \Delta x_i\,.$$

Будемъ предполагать, что $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ въ интервалѣ $(t_0 T)$ не мѣняютъ знака, т.-е. $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ мѣняются монотонно (не колебательно). При такихъ условіяхъ какъ первая, такъ и вторая сумма по опредѣленію (стр. 356) стремятся къ интеграламъ и слѣдовательно,

$$\text{пл } O\widetilde{AB} = \frac{1}{2}\int_{t=t_0}^{t=T} x\,dy - \frac{1}{2}\int_{t=t_0}^{t=T} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{t=t_0}^{t=T}(x\,dy - y\,dx). \qquad (1)$$

Этотъ интегралъ соотвѣтственно тому, каково направленіе (противъ или по часовой стрѣлкѣ) движенія точки по контуру ограничивающему площадь OAB, будетъ имѣть положительную или отрицательную величину (стр. 32).

Еслибы $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ не подчинялись для данной дуги условію монотонности, то мы разбили бы такую дугу на части, удовлетворяющія этому условію.

Для каждой такой части имѣетъ мѣсто равенство (1). Складывая почленно эти равенства получимъ, что и для всей дуги это равен-

---

*) Точки, которыя разбивали бы должнымъ образомъ дугу $\widetilde{AB}$, соотвѣтствуютъ тѣмъ значеніямъ параметра t, которыя обращаютъ въ нуль производныя $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Мы предполагаемъ число корней той и другой производной конечнымъ.

Если $f(\varphi)$ однозначная непрерывная функція, принимающая при $\varphi = 2\pi$ то же значеніе, что и при $\varphi = 0$, то кривая, данная уравненіемъ $r = f(\varphi)$, будетъ замкнутой и интегралъ

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi$$

даетъ величину площади, ограниченной этимъ замкнутымъ контуромъ.

Примѣръ 2. Уравненіе круга въ полярныхъ координатахъ, если за полюсъ принять центръ круга, имѣетъ видъ $r = a$, гдѣ a постоянная величина, и такимъ образомъ не содержитъ полярнаго угла φ. Согласно предыдущему площадь круга опредѣляется слѣдующимъ интеграломъ.

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \pi a^2.$$

§ 5. **Площадь криволинейнаго сектора при параметрическомъ представленіи кривой.** Площадь криволинейнаго сектора можно выразить также непосредственно въ декартовыхъ координатахъ, которыя будемъ предполагать функціями нѣкотораго параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Пусть при измѣненіи t отъ t_0 до T, функціи $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и производныя ихъ $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ мѣняются непрерывно; соотвѣтствующая точка опишетъ при этомъ дугу AB. Если впишемъ въ эту дугу ломаную линію $AA_1A_2\ldots A_i\ldots A_{n-1}B$ и будемъ сближать вершины этой ломаной такъ, чтобы каждое звено ея стремилось къ нулю, то площадь сектора OAB можно разсматривать какъ предѣлъ площади многоугольника $OAA_1A_2\ldots A_i\ldots A_{n-1}B$ или какъ предѣлъ суммы площадей треугольниковъ OAA_1, $OA_1A_2, \ldots,$ $OA_{n-1}B$. Будемъ обозначать координаты точки A_i черезъ x_i, y_i, соотвѣтствующее значеніе параметра черезъ t_i, разность (приращеніе) двухъ послѣдовательныхъ значеній t_i, x_i, y_i соотвѣтственно черезъ Δt_i, Δx_i, Δy_i:

$$t_{i+1} - t_i = \Delta t_i, \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x_i, \quad y_{i+1} - y_i = \Delta y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n),$$

откуда

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i, \quad x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Опредѣляя площадь прямоугольника OA_iA_{i+1} по извѣстной фор-

-ство имѣетъ мѣсто. Предполагается при этомъ, что число частей конечно. Интегралъ (1) для такого рода дуги даетъ алгебраическую сумму положительныхъ и отрицательныхъ частей, что въ окончательномъ итогѣ дастъ площадь сектора, площадь, ограниченную дугой и двумя радіусами-векторами, идущими въ концы этой дуги.

Если кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ замыкается, т.-е. $\varphi(t_0)=\varphi(T)$ и $\psi(t_0)=\psi(T)$, то формула (1) дастъ площадь, ограниченную этой замкнутой кривой.

Примѣръ. Вычислить площадь I эллипса.

Координаты точки эллипса можно выразить помощью параметра слѣдующимъ образомъ:

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t.$$

Дѣйствительно,

$$\frac{x}{a}=\cos t,\quad \frac{y}{b}=\sin t\quad \text{и}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

При измѣненіи t отъ 0 до 2π точка (x,y) опишетъ весь эллипсъ въ направленіи противоположномъ движенію часовой стрѣлки и потому

$$I=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\;b\cos t-b\sin t\;(a\cos t)]\,dx.$$

$$I=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

§ 6. **Выпрямленіе дуги плоской кривой линіи.** То, что разумѣется подъ длиною дуги кривой линіи, должно быть опредѣлено такъ, чтобы имѣть возможность количественно сравнивать дугу кривой съ прямолинейнымъ отрѣзкомъ. Какъ бы ни была мала криволинейная дуга, она несравнима непосредственно путемъ наложенія съ прямолинейнымъ отрѣзкомъ. Подъ длиною дуги кривой линіи по опредѣленію разумѣется предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписанной въ эту дугу ломаной, когда звенья ломаной при безграничномъ увеличеніи числа ихъ стремятся къ нулю. При этомъ концы ломаной совпадаютъ съ концами дуги, а порядокъ вершинъ опредѣляется ихъ послѣдовательнымъ расположеніемъ на кривой.

Пусть дана плоская кривая уравненіемъ $y=f(x)$, гдѣ $f(x)$ непрерывная, имѣющая производную, функція. Въ дугу LM этой кривой вписываемъ ломаную $LA_1A_2\ldots A_i\ldots A_{n-1}M$; координаты вершины A_i обозначимъ черезъ x_i, y_i $(i=0, 1, 2,\ldots, n)$, при чемъ $x_0=a$, $y_0=f(a)$ и $x_n=b$, $y_n=f(b)$ координаты концовъ

дуги LM. По формулѣ разстоянія опредѣляемъ звено этой ломаной:

$$A_i A_{i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

По теоремѣ Лагранжа о конечныхъ приращеніяхъ (стр. 340) разность $y_{i+1} - y_i$ можно замѣнить выраженіемъ, содержащимъ производную данной функціи:

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)\, f'(\xi_i), \quad \text{гдѣ} \quad x_i < \xi_i < x_{i+1} \quad (\text{при } a < b).$$

Слѣдовательно,

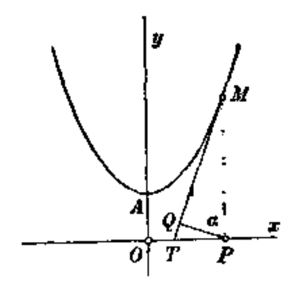
$$A_i A_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \quad \text{или} \quad A_i A_{i+1} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\delta_i,$$

гдѣ $\delta_i = x_{i+1} - x_i$. Обозначая длину измѣряемой дуги черезъ s, будемъ имѣть согласно вышеприведенному опредѣленію

$$s = \lim_{\delta_i \to 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\delta_i$$

Но по опредѣленію (стр. 355) правая часть этого равенства представляетъ опредѣленный интегралъ функціи $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ и потому

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad \text{или} \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



Черт. 245.

Примѣръ. Уравненіе

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

опредѣляетъ такъ называемую цѣпную линію; форму этой линіи принимаетъ свободно подвѣшенная въ двухъ точкахъ однородная цѣпь (черт. 245). При $x = 0$, $y = a$ будетъ минимумомъ функціи y. Вычислить длину дуги AM, гдѣ точка $A(0, a)$ — вершина цѣпной линіи, а $M(x, y)$ какая-нибудь ея точка.

Рѣшеніе.

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2;$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$$

$$\breve{AM} = \int_0^x \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\int_0^x e^{\frac{x}{a}} d\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2}\int_0^x e^{-\frac{x}{a}} d\left(-\frac{x}{a}\right);$$

$$\breve{AM} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Этотъ результатъ приводитъ къ слѣдующему свойству цѣпной линіи. Какъ видно изъ чертежа,

$$QM = PM \cdot \sin\alpha, \quad \text{или} \quad QM = y \sin\alpha.$$

Но

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) : \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

откуда

$$QM = y\sin\alpha = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

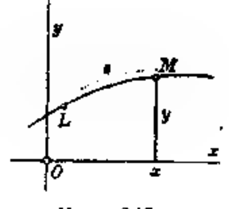
т.-е

$$QM = \breve{AM}.$$

Такимъ образомъ проекція ординаты точки M на касательную въ этой точкѣ равняется выпрямленной дугѣ AM цѣпной линіи (черт. 245).

Задача. Доказать, что $PQ = a$.

§ 7. **Элементъ дуги плоской кривой.** Будемъ разсматривать на кривой, данной уравненіемъ $y = f(x)$, перемѣнную дугу $LM = s$. Точку L, имѣющую координаты a и $f(a)$, будемъ считать начальной неподвижной точкой этой дуги, а точку $M(x, y)$ перемѣщающейся по кривой вмѣстѣ съ измѣненіемъ x (черт. 246). Длина дуги s будетъ при этомъ мѣняться въ зависимости отъ измѣненія x, будетъ функціей x; видъ этой функціи уже опредѣленъ въ предыдущемъ параграфѣ:



Черт. 246.

$$s = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\, dx. \tag{1}$$

Если условимся брать передъ радикаломъ положительный знакъ, то s будетъ функціей всегда возрастающей, при $x < a$ принимаю-

щей отрицательныя значенія, а при $x > a$ положительныя. Дифференцируя эту функцію по x, найдемъ производную ея, а потомъ и дифференціалъ или элементъ дуги:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}\,, \qquad ds = \frac{ds}{dx}\,dx = \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{2}$$

Принимая во вниманіе, что $y'dx = dy$, можно выразить элементъ дуги черезъ дифференціалы dx и dy:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,. \tag{3}$$

Элементъ дуги ds, какъ слѣдуетъ изъ опредѣленія дифференціала, является главною частью безконечно малаго приращенія дуги Δs и составляетъ также главную часть безконечно малой хорды $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, соотвѣтствующей этой дугѣ. Это послѣднее утвержденіе вытекаетъ изъ слѣдующей теоремы:

Теорема. Отношеніе дуги кривой линіи къ стягивающей эту дугу хордѣ стремится къ единицѣ какъ своему предѣлу, когда концы дуги стремятся къ совпаденію.

Доказ. Дѣйствительно, пусть x и y координаты точки M кривой $y = f(x)$ и $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ координаты точки M_1 (черт. 247). Дуга MM_1 равна Δs, а хорда $\overline{MM_1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Слѣдовательно,

$$\lim \frac{\widetilde{MM_1}}{\overline{MM_1}} = \lim \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}\,,$$

откуда на основаніи равенства (2)

$$\lim \frac{\widetilde{MM_1}}{\overline{MM_1}} = \frac{s'}{\sqrt{1+y'^2}} = 1. \qquad \text{ч. т. д.}$$

Черт. 247.

§ 8. **Выпрямленіе дуги кривой при параметрическомъ представленіи кривой и въ полярныхъ координатахъ.** Пусть кривая представлена параметрически. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Опредѣляя изъ этихъ уравненій dx и dy будемъ имѣть изъ соотношенія (3) § 7:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \tag{1}$$

и слѣдовательно,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt, \tag{2}$$

гдѣ t_0 и t_1 — значенія параметра для начальной и конечной точки дуги.

Нетрудно также получить формулу выпрямленія дугъ въ полярныхъ координатахъ помощью формулъ преобразованія декартовыхъ координатъ въ полярныя (стр. 153):

$$x = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin\varphi.$$

Дифференцируемъ обѣ части этихъ равенствъ, считая x, y, r и φ перемѣнными:

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

откуда

$$dx^2 = \cos^2\varphi\, dr^2 - 2r\cos\varphi\sin\varphi\, dr\, d\varphi + r^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2,$$

$$dy^2 = \sin^2\varphi\, dr^2 + 2r\cos\varphi\sin\varphi\, dr\, d\varphi + r^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2.$$

Слѣдовательно,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right] d\varphi^2,$$

а

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \;^{*)} \quad \text{и} \quad s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi, \tag{3}$$

гдѣ φ_0 и φ_1 — амплитуды концовъ измѣряемой дуги

---

*) Эту же формулу можно получить непосредственно изъ чертежа (черт. 248) Пренебрегая малыми высшихъ порядковъ, можно криволинейный треугольникъ MPM_1 считать за прямолинейный съ прямымъ угломъ при вершинѣ P:

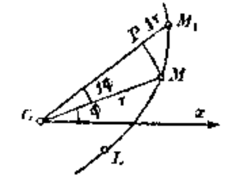
$$\breve{MM_1} = \sqrt{\breve{MP}^2 + \overline{PM_1}^2}.$$

Но

$$\breve{MM_1} = \Delta s, \quad \breve{MP} = r\,\Delta\varphi, \quad PM_1 = \Delta r$$

и слѣдовательно,

$$\Delta s = \sqrt{r^2\Delta\varphi^2 + \Delta r^2},$$



Черт. 248.

откуда

$$\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}\right)^2}; \quad \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + r'^2} \quad \text{и} \quad ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

§ 9. **Выпрямленіе дуги пространственной кривой.** Пространственная кривая, какъ линія пересѣченія двухъ поверхностей, опредѣляется двумя уравненіями, которыя можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x). \tag{1}$$

Дуга пространственной кривой такъ же, какъ и плоской, опредѣляется какъ предѣлъ периметра вписанной ломаной, когда число звеньевъ безгранично увеличивается, а каждое звено безгранично уменьшается до нуля. Пусть въ дугу AB вписана ломаная $AA_1A_2, \ldots A_i \ldots A_{n-1}B$; x_i, y_i координаты вершины $A_i (i=0, 1, 2, \ldots n)$; $x_0 = a$, $x_n = b$ абсциссы концовъ дуги AB.

По формулѣ разстоянія имѣемъ

$$A_i A_{i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}. \tag{2}$$

Можно преобразовать это выраженіе, замѣняя разности $y_{i+1} - y_i$ и $z_{i+1} - z_i$ по теоремѣ Лагранжа о конечныхъ приращеніяхъ (стр. 340):

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)\,\varphi'(\xi_i), \quad z_{i+1} - z_i = (x_{i+1} - x_i)\,\psi'(\xi_i')$$

и

$$A_i A_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + [\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi'_i)]^2}, \tag{2'}$$

гдѣ

$$x_i < \xi_i < x_{i+1} \quad \text{и} \quad x_i < \xi_i' < x_{i+1}.$$

Преобразуемъ радикальное выраженіе такъ, чтобы подъ знакъ радикала входило только одно значеніе аргумента, напр. ξ_i интервала $(x_i\, x_{i+1})$

Два радикала $\sqrt{A}$ и $\sqrt{B}$, изъ которыхъ каждый не меньше единицы, отличаются одинъ отъ другого меньше, чѣмъ на половину разности подкоренныхъ количествъ. Дѣйствительно,

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \quad \text{и} \quad |\sqrt{A} - \sqrt{B}| \leqq \frac{1}{2}|A - B|.$$

Примѣняя это общее положеніе къ радикаламъ

$$\sqrt{1 + [\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i')]^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + [\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2},$$

изъ которыхъ каждый очевидно не меньше единицы, будемъ имѣть

$$\sqrt{1 + [\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i')]^2} = \sqrt{1 + [\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} + \alpha_i, \tag{3}$$

при чемъ

$$|\alpha_i| \leq \frac{1}{2} | [\psi'(\xi_i')]^2 - [\psi'(\xi_i)]^2 | \leq M_i - m_i, \tag{4}$$

гдѣ M_i maximum, а m_i minimum функціи $\frac{1}{2}[\psi'(x)]^2$, въ интервалѣ $(x_i x_{i+1})$.

Послѣ такихъ преобразованій периметръ P_n вписанной ломаной можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$P_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{1+[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\xi_i)]^2}\, \delta_i + \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i \delta_i, \tag{5}$$

гдѣ $\delta_i = x_{i+1} - x_i$. При переходѣ къ предѣлу въ предположеніи, что $n = \infty$ и $\delta_i = 0$ ($i = 0, 1, 2, .., n-1$), первый членъ этого выраженія стремится къ интегралу функціи $\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}$, а второй, т.-е. $\sum \alpha_i \delta_i$, къ нулю, ибо въ силу соотношенія (4) и опредѣленія интеграла

$$|\lim \Sigma \alpha_i \delta_i| \leq \lim \Sigma |\alpha_i| \delta_i < \lim \Sigma M_i \delta_i - \lim \Sigma m_i \delta_i = 0\,^*).$$

Такимъ образомъ дуга пространственной кривой можетъ быть вычислена помощью опредѣленнаго интеграла:

$$s = \lim P_n = \int_a^b \sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}\, dx. \tag{6}$$

Примѣръ. Вычислить длину дуги кривой пересѣченія двухъ цилиндровъ $y = {}^1\!/_2 x^2 \sqrt{2}$ и $z = {}^1\!/_3 x^3$, считая отъ начала координатъ до точки, абсцисса которой равна a.

$$y' = x\sqrt{2}, \quad z' = x^2.$$

$$s = \int_0^a \sqrt{1+2x^2+x^4}\, dx = \int_0^a (1+x^2)\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^a = a + \frac{a^3}{3}.$$

Если въ интегралѣ (6) верхній предѣлъ перемѣнный, то дуга s будетъ функціей верхняго предѣла:

$$s = \int_a^x \sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}\, dx. \tag{7}$$

*) Предполагается, что $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ функціи непрерывныя; слѣдовательно, функція ${}^1\!/_2 [\psi'(x)]^2$ интегрируема, т.-е. $\Sigma M_i \delta_i$ и $\Sigma m_i \delta_i$ стремятся къ одному предѣлу ${}^1\!/_2 \int_a^b [\psi'(x)]^2\, dx$.

Дифференцируя этотъ интегралъ получимъ и производную и дифференціалъ или элементъ дуги пространственной кривой:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2} \qquad \text{и} \qquad ds=\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}\,dx. \quad (8)$$

Такъ какъ $\varphi'(x)dx=dy$ и $\psi'(x)dx=dz$, то элементъ дуги пространственной кривой можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\,. \quad (9)$$

Это выраженіе является главною частью соотвѣтствующей безконечно малой хорды $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, гдѣ $\Delta x=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y=y_{i+1}-y_i$, $\Delta z=z_{i+1}-z_i$. Дѣйствительно, нетрудно убѣдиться въ справедливости теоремы, аналогичной теоремѣ для дуги плоской кривой, изъ которой это положеніе вытекаетъ.

Теорема. Отношеніе дуги пространственной кривой къ соотвѣтствующей хордѣ стремится къ единицѣ какъ своему предѣлу, когда концы дуги сближаются до совпаденія.

Доказ. Обозначимъ безконечно малую дугу черезъ Δs; соотвѣтствующая хорда имѣетъ выраженіе $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. Составляемъ отношеніе дуги къ хордѣ и, преобразуя его, переходимъ къ предѣлу:

$$\lim\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\lim\frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}=\frac{s'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.$$

Но какъ слѣдуетъ изъ выраженія для производной s'(8), числитель предыдущей дроби равенъ знаменателю. Слѣдовательно,

$$\lim\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=1, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Если предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ равенъ единицѣ, то главныя части ихъ равны (стр. 264). Слѣдовательно, главная часть безконечно малой хорды $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ равна элементу дуги ds, т.-е. $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$.

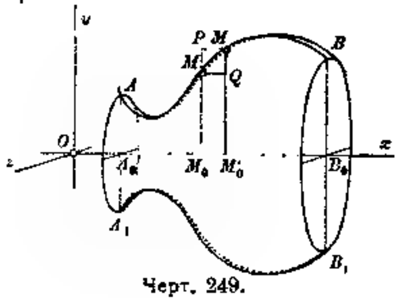
§ 10. **Кубатура тѣлъ.** Вычисленіе объема, иначе — кубатуру тѣла во многихъ случаяхъ можно свести къ квадратурѣ, т.-е. къ вычисленію опредѣленнаго интеграла. Пусть требуется вычислить объ-

емъ тѣла, ограниченнаго нѣкоторою поверхностью и двумя плоскостями перпендикулярными оси абсциссъ $x=a$ и $x=b$. Площадь сѣченія, перпендикулярнаго оси Ox, будетъ мѣняться вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ сѣкущей плоскости, т.-е. съ измѣненіемъ x, будетъ, слѣдовательно, нѣкоторой функціей $\varphi(x)$. Если эта функція дана или опредѣлена, то кубатура тѣла сводится къ квадратурѣ. Дѣйствительно, дѣлимъ интервалъ $(a\ b)$ на подъинтервалы $\delta_0\ \delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_{n-1}$, вставляя между a и b рядъ точекъ $x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}$

$$x_{i+1} - x_i = \delta_i, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad x_0 = a, \quad x_n = b).$$

Черезъ точки дѣленія проводимъ сѣкущія плоскости, перпендикулярныя оси абсциссъ, разбивая тѣмъ самымъ тѣло на рядъ слоевъ. Площади основаній слоя, соотвѣтствующаго значку i, будутъ $\varphi(x_i)$ и $\varphi(x_{i+1})$, а толщина δ_i. Замѣнимъ каждый слой цилиндромъ съ тѣмъ же основаніемъ $\varphi(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \ldots, n-1$) и тою же высотою δ_i. Объемъ такого цилиндра равенъ $\varphi(x_i)\delta_i$, а объемъ V_n всѣхъ такъ образованныхъ цилиндровъ суммѣ слагаемыхъ вида $\varphi(x_i)\delta_i$, гдѣ i при переходѣ отъ одного слагаемаго къ другому, принимаетъ значенія: 0, 1, 2, ..., $n-1$

$$V_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi(x_i)\delta_i. \qquad (1)$$



Черт. 249.

Предѣлъ этой суммы при безграничномъ увеличеніи числа дѣленій ($n=\infty$) съ одновременнымъ уменьшеніемъ до нуля толщины каждаго цилиндрическаго слоя ($\delta_i=0$), т.-е. интегралъ функціи $\varphi(x)$ въ предѣлахъ отъ a до b и составитъ объемъ разсматриваемаго тѣла:

$$V = \lim V_n = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi(x_i)\,\delta_i = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (2)$$

Объемъ тѣла вращенія. Такимъ способомъ легко вычислить, напр., объемъ тѣла вращенія, для котораго ось абсциссъ служитъ осью вращенія (черт. 249). Дѣйствительно, пусть тѣло образовано вращеніемъ площади, ограниченной осью абсциссъ, кривой

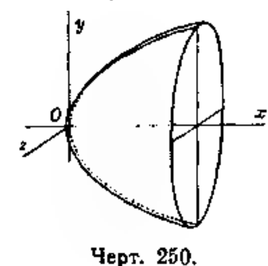
$y=f(x)$, не пересѣкающей оси Ox ($y>0$), и двумя ординатами, соотвѣтствующими значеніямъ абсциссы $x=a$ и $x=b$. Площадь перпендикулярнаго оси абсциссъ сѣченія, какъ площадь круга радіуса y, равна πy^2. Слѣдовательно, $\varphi(x)=\pi[f(x)]^2$, объемъ элементарнаго слоя $\varphi(x_i)\delta_i$, образованнаго вращеніемъ прямоугольника $M_0 M'_0 M Q$ (черт. 249), равенъ $\pi y^2 dx$ и

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Примѣръ 1. Объемъ шара. Шаръ получается при вращеніи полукруга $y=\sqrt{r^2-x^2}$ около діаметра, служащаго осью абсциссъ. При интегрированіи x мѣняется отъ $-r$ до $+r$

$$V=\pi\int_{-r}^{+r} y^2\,dx=\pi\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Примѣръ 2. Опредѣлить объемъ сегмента параболоида, полученнаго вращеніемъ параболы $y^2=2px$ около оси ея, при высотѣ сегмента равной x (черт. 250).



Черт. 250.

$$V=\pi\int_0^x y^2\,dx=\pi\int_0^x 2px\,dx=\pi px^2.$$

Если вращается около оси Ox площадь, ограниченная двумя кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ ($y_2>y_1>0$) и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, то объемъ образовавшагося тѣла вращенія опредѣляется какъ разность объемовъ двухъ тѣлъ предыдущаго типа:

$$V=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx.$$

Такимъ способомъ можно вычислить, напр., объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ замкнутой плоской кривой линіи, не пересѣкающей оси абсциссъ.

Примѣръ 3. Вычислить объемъ тора. Торъ получается вращеніемъ круга около не пересѣкающей его прямой. Пусть центръ круга лежитъ на оси орди-

натъ, на разстояніи h отъ начала, а радіусъ равенъ a:

$$x^2 + (y - h)^2 = a^2.$$

Изъ уравненія круга имѣемъ $y_1 = h - \sqrt{a^2 - x^2}$, и $y_2 = h + \sqrt{a^2 - x^2}$.

Слѣдовательно,

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (y_2^2 - y_1^2)\, dx = 4\pi h \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\pi^2 h a^2,$$

ибо

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2} \quad \text{(половина площади круга стр. 461).}$$

Приведемъ теперь примѣры вычисленія по формулѣ (2) объемовъ тѣлъ, ограниченныхъ не поверхностями вращенія.

Примѣръ 4. Опредѣлить объемъ эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Уравненіе эллипса, перпендикулярнаго оси абсциссъ сѣченія на разстояніи x отъ начала, имѣетъ видъ

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right]^2} = 1.$$

Полуоси этого эллипса

$$a' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad b' = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

а площадь (стр. 461)

$$\pi a' b' = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Слѣдовательно,

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi bc}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Примѣръ 5. Даны два эллипса, лежащіе въ перпендикулярныхъ плоскостяхъ Oxy и Oyz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Треугольникъ ABC перемѣнной формы перемѣщается такъ, что плоскость его всегда остается перпендикулярной оси абсциссъ, вершины B и C остаются на первомъ эллипсѣ, а вершина A на второмъ. Опредѣлить объемъ тѣла, образо-

вавшагося при такомъ перемѣщеніи треугольника (тѣло ограничено двумя цилиндрическими поверхностями и плоскостью Oxy).

При данномъ значеніи x, сторона треугольника $BC = 2y$, а высота $AH = z$. Слѣдовательно,

$$\text{пл. } ABC = yz = \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2), \quad \text{ибо} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Такимъ образомъ $\varphi(x) = \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)$ и

$$V = \frac{bc}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{bc}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3}abc.$$

Принципъ Кавальери. Формула (2) настоящаго параграфа служитъ основаніемъ такъ называемаго принципа Кавальери: два тѣла, заключенныя между двумя параллельными плоскостями, равновелики, если сѣченія ихъ любою плоскостью, параллельной ограничивающимъ плоскостямъ, равновелики. Дѣйствительно, объемъ того и другого тѣла выражается согласно условію однимъ и тѣмъ же интеграломъ (2).

§ 11. **Компланація поверхности вращенія.** Къ квадратурѣ сводится и вычисленіе или компланація поверхности вращенія, ограниченной двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращенія. Пусть $y = f(x)$ уравненіе той линіи, не пересѣкающей оси абсциссъ, вращеніе которой образуетъ разсматриваемую поверхность (черт. 251). Вписываемъ въ дугу AB этой кривой ломаную $AA_1A_2\ldots A_i\ldots A_{n-1}B$; x_i, y_i координаты точки A_i; $x_0 = a$, $x_n = b$ абсциссы концовъ A и B. Звено A_iA_{i+1} при вращеніи описываетъ боковую поверхность усѣченнаго конуса:

$$\text{пов. } (A_i A_{i+1}) = 2\pi\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\cdot A_iA_{i+1} = 2\pi\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Мы предполагаемъ, что $y = f(x)$ функція непрерывная и потому принимаетъ каждое промежуточное значеніе между значеніями y_i и y_{i+1}, а слѣдовательно, и значеніе равное $\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$.

Пусть

$$f(\xi_i) = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}, \quad \text{гдѣ} \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

Кромѣ того, по теоремѣ Лагранжа

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)\,f'(\xi_i'), \quad \text{гдѣ} \quad x_i < \xi_i' < x_{i+1}.$$

Черт. 251.

Такимъ образомъ

$$\text{пов. } (A_i A_{i+1}) = 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i')]^2}\,\delta_i,$$

гдѣ $\delta_i = x_{i+1} - x_i$. Но по тѣмъ же соображеніямъ, какія были примѣнены въ § 9, имѣемъ

$$\sqrt{1+[f'(\xi_i')]^2} = \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2} + \alpha_i,$$

при чемъ

$$|\alpha| < \frac{1}{2}\left\{[f'(\xi_i')]^2 - [f'(\xi_i)]^2\right\} < M_i - m_i,$$

гдѣ M_i maximum, а m_i minimum функціи $\frac{1}{2}[f'(x)]^2$ въ интервалѣ $(x_i x_{i+1})$.

Поверхность s, образованная вращеніемъ дуги AB является по опредѣленію предѣломъ поверхности P_n, образованной вращеніемъ ломаной $AA_1A_2\ldots A_i\ldots A_{n-1}B$:

$$s = lim\ P_n = lim \sum_{i=0}^{i=n-1} 2\pi\ f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\ \delta_i + lim \sum_{i=0}^{i=n-1} 2\pi f(\xi_i)\,\alpha_i\,\delta_i.$$

Первое слагаемое по опредѣленію есть интегралъ отъ a до b функціи $2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$, а второе стремится къ нулю. Дѣйствительно, пусть N наибольшее значеніе функціи $f(x)$ въ интервалѣ $(a\ b)$; въ такомъ случаѣ

$$lim\ \Sigma\, 2\pi f(\xi_i)\,\alpha_i\,\delta_i \leqq 2\pi N\ lim\ \Sigma\,|\,\alpha_i\,|\,\delta_i \leqq 2\pi N\,[lim\ \Sigma M_i\,\delta_i - lim\ \Sigma m_i\,\delta_i]$$

Но $\sum M_i\,\delta_i$ и $\sum m_i\,\delta_i$ стремятся къ одному и тому же предѣлу (мы предполагаемъ функцію $[f'(x)]^2$ интегрируемой), именно интегралу функціи $[f'(x)]^2$. Слѣдовательно, $lim\ \sum 2\pi f(\xi_i)\,\alpha_i\,\delta_i = 0$.

Итакъ

$$S = lim\ P_n = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

или, принимая во вниманіе, что $f(x) = y$ и $\sqrt{1+y'^2}\,dx = ds$,

$$s = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_{x=a}^{x=b} y\,ds.$$

Примѣръ. Вычислить поверхность сегмента параболоида, полученнаго вращеніемъ параболы $y^2 = 2px$ около оси ея при высотѣ сегмента, равной x (черт. 250).

$$y = \sqrt{2p}\,.\sqrt{x};\qquad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}};\qquad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}.$$

$$s = 2\pi\int_0^x y\,ds = 2\pi\sqrt{p}\int_0^x\sqrt{2x+p}\,dx = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\Big[(2x+p)^{3/2}\Big]_0^x;$$

$$s = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\Big[\sqrt{(2x+p)^3} - \sqrt{p^3}\Big].$$

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Опредѣлить площадь, ограниченную дугами двухъ пересѣкающихся параболъ $y = -3 + 8x - 2x^2$ и $y = 6 - 4x + x^2$.

Отв. 4 кв ед.

2. Опредѣлить площадь криволинейнаго сектора съ вершиной въ началѣ координатъ и гиперболической дугой ($xy = 1$), одинъ конецъ которой имѣетъ абсциссу 1, а другой x.

Отв. пл. $OAB = log\, x$.

3. Уравненіе въ полярныхъ координатахъ $r = a\cos\varphi + a$ представляетъ замкнутую кривую, называемую кардіоидой. Построить эту кривую и вычислить ея площадь.

Отв. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

4. Уравненіе $x^3 + y^3 = 3axy$ представляетъ декартовъ листъ. Полагая $y : x = t$, можно представить эту кривую параметрически. Когда t мѣняется отъ 0 до a, точка описываетъ замыкающуюся часть кривой, которая собственно и называется декартовымъ листомъ. Вычислить площадь этого листа.

Отв. $\frac{3}{2}a^2$.

5. Опредѣлить длину одной вѣтви циклоиды (§ 3).

Отв. $s = 8a$.

6. Опредѣлить длину дуги логариѳмической спирали $r = ae^{k\varphi}$ отъ какой-либо ея точки (r, φ) до полюса.

Отв. $|s| = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} r$.

7. Опредѣлить длину дуги пространственной кривой $y = 3x^2$, $z = 6x^3$ между точками, абсциссы которыхъ 0 и 1.

Отв. $s = 7$.

8. Опредѣлить объемъ эллипсоида вращенія: a) удлиненнаго, b) сжатаго (сфероида).

Отв. $V_1 = \frac{4}{3}\pi ab^2$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

9. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго вращеніемъ одной вѣтви циклоиды около оси абсциссъ.

Отв. $V = 5\pi^2 a^3$

10. Опредѣлить объемъ тѣла, ограниченнаго параболическимъ цилиндромъ $y^2 = 2px$, плоскостью $x = y$, плоскостью Oxy и плоскостью $x = a$.

Отв. $V = \frac{a^2 p}{2}$.

11. Опредѣлить поверхность удлиненнаго эллипсоида вращенія.

Отв. $S = 2\pi ab\left[\sqrt{1-e^2} + \frac{arc\sin e}{e}\right]$.

12. Опредѣлить поверхность циклоидальнаго тѣла вращенія.

Отв. $S = \frac{64\pi a^2}{3}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОРЪ СОДЕРЖАНІЯ ПЕРВАГО ТОМА.

1. Главными идеями, установленію и развитію которыхъ посвященъ первый томъ настоящаго курса высшей математики, являются методъ координатъ, понятія функціи, предѣла, производной и интеграла.

2. Методъ координатъ служитъ основаніемъ аналитической геометріи, основаніемъ изученія геометрическихъ формъ помощью вычисленія. Координаты суть числа, помощью которыхъ опредѣляется положеніе точки на прямой (x), на плоскости (x, y) и въ пространствѣ (x, y, z). Смотря по тому, какъ интерпретируются эти числа геометрически, координаты могутъ быть прямолинейными (прямоугольными или косоугольными) и криволинейными, къ которымъ какъ частный случай относятся полярныя координаты. Установленіе той или другой системы координатъ составляетъ первую задачу аналитической геометріи.

Второй задачей является установленіе основныхъ формулъ, дающихъ возможность геометрическое измѣреніе и простѣйшія построенія свести къ вычисленію. Таковы формулы разстоянія, формулы для вычисленія координатъ точки, дѣлящей данный координатами своихъ концовъ отрѣзокъ въ данномъ отношеніи, и формула для вычисленія площади треугольника или, общѣе, многоугольника. Основныя формулы должны обладать общностью, которая и выводится изъ правилъ дѣйствій съ направленными отрѣзками.

Третья задача аналитической геометріи интерпретація уравненій. Перемѣнныя или текущія координаты, не связанныя никакими ограниченіями или зависимостями въ своемъ измѣненіи, представляютъ всю совокупность точекъ, смотря по числу координатъ, прямой (x) или плоскости (x, y) или пространства (x, y, z).

Но если двѣ перемѣнныя координаты связаны въ своемъ измѣненіи уравненіемъ, то на плоскости тѣмъ самымъ выдѣляется

геометрическое мѣсто точекъ, линія, соотвѣтствующая этому уравненію. Уравненіе, связывающее три текущихъ координаты, опредѣляетъ въ пространствѣ поверхность, а два такихъ уравненія—линію. Такимъ образомъ то, что въ алгебрѣ называется неопредѣленнымъ уравненіемъ или неопредѣленной системой уравненій, въ аналитической геометріи представляетъ опредѣленную геометрическую форму, линію или поверхность. Изученіе этихъ геометрическихъ формъ сводится къ изслѣдованію соотвѣтствующихъ уравненій.

3. Изслѣдованіе уравненій первой степени въ этой третьей задачѣ имѣетъ особое значеніе, сближающее этотъ вопросъ со второю задачей. Соотвѣтствующія этимъ уравненіямъ геометрическія формы, т.-е. прямая и плоскость основныя формы геометріи, которыя могутъ быть поставлены на ряду съ элементомъ пространства—точкою. Съ этими формами главнымъ образомъ и имѣетъ дѣло геометрическое построеніе и измѣреніе. Исходя изъ геометрическаго значенія коэффиціентовъ уравненій прямой и плоскости, устанавливаются основныя формулы, опредѣляющія угловыя соотношенія, въ частности перпендикулярность и параллельность Сюда же относится и опредѣленіе разстоянія точки отъ прямой или плоскости. Эти формулы вмѣстѣ съ прежними основными и даютъ возможность перевести геометрическую задачу на языкъ аналитическій, на языкъ вычисленія и обратно—аналитическую задачу иллюстрировать геометрически.

4 Изученіе уравненій степени выше первой представляетъ уже спеціальную задачу аналитической геометріи, примѣненіе метода координатъ къ изслѣдованію новыхъ, болѣе сложныхъ, геометрическихъ формъ. Вопросъ здѣсь можетъ быть поставленъ двоякимъ образомъ. Та или другая линія или поверхность опредѣляется геометрически, и на основаніи такого опредѣленія составляется ея уравненіе, изслѣдованіе котораго приводитъ къ изученію свойствъ соотвѣтствующей геометрической формы. Такимъ способомъ мы изучали кругъ, эллипсъ, гиперболу и параболу.

Второй путь изученія формъ высшихъ порядковъ состоитъ въ полномъ изслѣдованіи общаго уравненія данной степени. Эту цѣль преслѣдовалъ въ настоящемъ курсѣ очеркъ общей теоріи кривыхъ второго порядка. Въ этой общей теоріи отмѣтимъ слѣдующіе пункты 1) Изысканіе безконечно удаленныхъ точекъ кривой приводитъ къ дискриминанту старшихъ членовъ уравненія, дающему возможность различить по уравненію типъ кривой 2) Параллельное перенесеніе осей координатъ даетъ возможность

отыскать центръ кривой. 3) Измѣненіе направленія осей координатъ приводитъ къ установленію понятія сопряженныхъ діаметровъ и главныхъ осей кривой. 4) Установивъ типъ кривой, можно путемъ соотвѣтствующаго преобразованія координатъ привести уравненіе кривой къ каноническому виду. 5) Кривая второго порядка можетъ быть распавшейся на пару прямыхъ (дѣйствительныхъ или мнимыхъ).

Въ пространствѣ въ настоящемъ курсѣ ради краткости общее уравненіе второй степени не изслѣдуется, а прямо даются уравненія въ каноническомъ видѣ, какъ опредѣленія соотвѣтствующихъ поверхностей второго порядка и какъ исходный пунктъ изученія вида ихъ.

5. Понятіе функціи является главнымъ предметомъ изученія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Первоначальное представленіе о функціи мы получаемъ, если въ томъ или иномъ выраженіи, имѣющемъ ариѳметическій смыслъ, мы разсматриваемъ какую-либо букву, какъ перемѣнную величину, могущую принимать различныя значенія. Такимъ образомъ устанавливается соотвѣтствіе между значеніями этой перемѣнной величины, независимой перемѣнной и величиною того выраженія, т.-е. значеніями *зависимаго перемѣннаго или функціи*. Признакъ соотвѣтствія сразу приводитъ къ общему опредѣленію понятія функціи. Но въ анализѣ соотвѣтствіе прежде всего опредѣляется вычисленіемъ. Понятіе вычисленія претерпѣваетъ рядъ обобщеній, соотвѣтственно обобщеніямъ понятія числа. Въ этихъ обобщеніяхъ существенную роль играетъ введеніе въ элементарно-ариѳметическія представленія безконечнаго процесса, переходъ къ предѣлу. Съ понятіемъ предѣла тѣсно связано понятіе безконечно-малыхъ. Помощью понятія предѣла и безконечно-малыхъ изъ общаго понятія функціи выдѣляется классъ непрерывныхъ функцій, изученіе которыхъ представляетъ наибольшій интересъ для приложеній.

6. Въ изученіи функцій, помимо ихъ классификаціи, ставятся прежде всего вопросы о возрастаніи и убываніи функціи, о maximum'ѣ и minimum'ѣ ея. Для рѣшенія этихъ вопросовъ вводится понятіе производной, какъ предѣла отношенія безконечно-малаго приращенія функціи къ соотвѣтствующему приращенію независимаго перемѣннаго. Но существованіе такого предѣла не вытекаетъ съ необходимостью изъ непрерывности разсматриваемой функціи; нужны для этого дополнительныя условія. Такимъ образомъ изъ класса непрерывныхъ функцій выдѣляется классъ дифференцируемыхъ

функцій, которыя собственно и имѣютъ значеніе въ приложеніяхъ и которыя разсматриваются въ настоящемъ курсѣ. Такъ кладется основаніе дифференціальному исчисленію.

7. Чтобы избѣжать въ каждомъ частномъ случаѣ нахожденія производной согласно первоначальному опредѣленію, устанавливаются общія правила дифференцированія и основныя формулы дифференціальнаго исчисленія, дающія производныя элементарныхъ функцій.

8. Данная начальная функція помощью метода координатъ интерпретируется геометрически какъ перемѣнная ордината точки, описывающей нѣкоторую линію, графику разсматриваемой функціи. Производная опредѣляетъ направленіе касательной къ этой графикѣ, а производная производной, т.-е. вторая производная, своимъ знакомъ даетъ указаніе о характерѣ изгиба ея. Такимъ образомъ первая и вторая производная могутъ дать полную картину хода измѣненія начальной функціи.

9. Произведеніе производной на приращеніе или дифференціалъ аргумента называется дифференціаломъ функціи и составляетъ главную часть приращенія функціи. Такимъ образомъ дифференціалъ представляетъ понятіе параллельное понятію производной, но никоимъ образомъ не совпадающее съ нимъ. Подъ дифференцированіемъ можно разумѣть и нахожденіе производной и нахожденіе дифференціала, ибо одно можно свести къ другому. Во многихъ случаяхъ удобнѣе имѣть дѣло съ производными, но иногда необходимо оперировать съ дифференціалами; дифференціальное исчисленіе тогда явно будетъ исчисленіемъ безконечно малыхъ.

10. Интегрированіе, т.-е. обратная дифференцированію операція, состоитъ въ изысканіи начальной или первообразной функціи по данной ея производной. Простое обращеніе формулъ дифференціальнаго исчисленія не даетъ исчерпывающаго отвѣта на вопросъ объ изысканіи первообразной функціи; нужно указать прямой путь вычисленія ея значеній. Если интерпретировать производную функцію какъ перемѣнную, соотвѣтственно измѣненію аргумента, ординату, то начальная или первообразная функція, при какомъ-либо опредѣленномъ значеніи аргумента какъ абсциссы, означаетъ площадь, ограниченную осью абсциссъ, графикой данной производной функціи и двумя ординатами, или точнѣе — алгебраическую сумму такого рода площадей, расположенныхъ надъ осью и подъ осью абсциссъ. Такимъ образомъ вычисленіе значеній первообразной функціи можно свести къ вычисленію площади,

опредѣленнымъ образомъ ограниченной. Это вычисленіе такъ же, какъ и вычисленіе производной, представляетъ безконечный процессъ, суммированіе безконечно-малыхъ слагаемыхъ, иначе — вычисленіе предѣла суммы элементарныхъ прямоугольниковъ, стрямящихся заполнить измѣряемую площадь. Этотъ то предѣлъ и называется интеграломъ, полнѣе—опредѣленнымъ интеграломъ. Обратно, установивъ этотъ процессъ, мы могли бы считать его опредѣляющимъ геометрическое понятіе площади.

11. Опредѣленіе интеграла, какъ предѣла суммы безконечно-малыхъ слагаемыхъ, можно примѣнить не только къ функціямъ непрерывнымъ и конечному интервалу интегрированія. Когда подъинтегральная функція въ предѣлахъ интегрированія испытываетъ разрывъ непрерывности или когда одинъ или оба предѣла становятся безконечно большими, требуются обобщенія, къ описанному процессу суммированія приходится присоединить новый переходъ къ предѣлу. Такимъ образомъ мы приходимъ къ понятію обобщенныхъ интеграловъ. Вычисленіе интеграла есть безконечный процессъ—переходъ къ предѣлу; вычисленіе обобщеннаго интеграла означаетъ двойной переходъ къ предѣлу — предѣлъ предѣла.

12. Интегралъ, если у него разсматривать верхній предѣлъ перемѣннымъ, опредѣляетъ непрерывную функцію верхняго предѣла, для тѣхъ его значеній, при которыхъ интегралъ имѣетъ смыслъ, иначе существуетъ. Эта непрерывная функція и будетъ первообразной функціей данной подъинтегральной функціи. Давая различныя значенія нижнему предѣлу интеграла, мы будемъ получать различныя первообразныя функціи, отличающіяся одна отъ другой на какое либо постоянное. Общее рѣшеніе задачи опредѣленія первообразной функціи по данной производной должно содержать произвольное постоянное и потому называется неопредѣленнымъ интеграломъ.

13. Для многихъ функцій общее рѣшеніе можетъ быть найдено путемъ обращенія соотвѣтствующихъ формулъ дифференціальнаго исчисленія или, какъ говорятъ, путемъ неопредѣленнаго интегрированія. Такимъ образомъ получаются сначала основныя формулы интегральнаго исчисленія; къ этимъ основнымъ формуламъ помощью общихъ правилъ интегрированія и стараются потомъ свести, если это возможно, интегрированіе другихъ функцій. Но не для всякой функціи можно найти такимъ способомъ первообразную функцію. Въ такомъ случаѣ процессъ суммированія является опредѣляющимъ первообразную функцію и исходнымъ пунктомъ ея изученія.

14. Интегрированіе, какъ обращеніе формулъ дифференціальнаго исчисленія, и интегрированіе, какъ процессъ суммированія, находятся въ соотношеніи, устанавливаемомъ основнымъ предложеніемъ интегральнаго исчисленія, по которому опредѣленный интегралъ вычисляется помощью неопредѣленнаго, какъ разность значеній какой-либо первообразной функціи при верхнемъ и нижнемъ предѣлахъ. Для приложеній это предложеніе имѣетъ существенное значеніе, ибо здѣсь мы имѣемъ способъ точнаго вычисленія безъ выполненія присущаго задачѣ безконечнаго процесса, который на самомъ дѣлѣ уже выполненъ, хотя и въ иной формѣ, при установленіи основныхъ формулъ дифференціальнаго исчисленія.

15. Къ процессу суммированія безконечно малыхъ слагаемыхъ сводится вычисленіе многихъ конкретныхъ величинъ. Такъ вычисленіе площади, дугъ кривыхъ линій, объемовъ и поверхностей сводится къ интегрированію, и если неопредѣленное интегрированіе соотвѣтствующихъ функцій выполнимо, то мы имѣемъ возможность точнаго вычисленія этихъ основныхъ геометрическихъ величинъ.

16. Приближенное вычисленіе тѣхъ же величинъ основано на понятіи интеграла какъ предѣла суммы (формула трапецій). Замѣна подъинтегральной функціи болѣе простой подходящей функціей даетъ возможность достигнуть лучшаго приближенія (формула Симпсона). Формулы приближеннаго вычисленія интеграла иначе—механическія квадратуры представляютъ также удобный способъ вычисленія значеній тѣхъ трансцендентныхъ функцій, которыя могутъ быть представлены какъ интегралы простыхъ алгебраическихъ выраженій; таковы, напр., функціи $\log x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Такимъ образомъ введеніе понятія интеграла не только расширяетъ понятіе вычисленія, но и даетъ указаніе упрощеній способовъ вычисленія.

Заканчивая этотъ обзоръ, мы отмѣтимъ въ заключеніе, что въ установленіи основныхъ идей анализа: функціи, предѣла, производной и интеграла, элементарно-математическая мысль получаетъ дальнѣйшее свое развитіе; а придавая помощью метода координатъ этимъ отвлеченнымъ понятіямъ форму конкретныхъ представленій, подготовляетъ себя къ конкретнымъ приложеніямъ.

КОНЕЦЪ ПЕРВАГО ТОМА.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ читать:*
15	2 сн.	$y = \sin\varphi$	$x = \sin\varphi$
62	16 св.	при k	при x
74	15 сн.	Аполоніемъ	Аполлоніемъ
137	1 „	$a_{28}\sin\beta$	$a_{23}\sin\beta$
143	5 св.	$+\left(\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}\right)\cdot\frac{1}{a_{22}}$	$+\left(\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}\right)^2\cdot\frac{1}{a_{22}}$
184	6 „	§ 10. Уравненіе	§ 10. Уравненія
201	выноска	*) Ср. гл. IV § 5.	*) Ср. гл. V § 5.
252	6 св.	должны имѣть	должно имѣть
256	11, 12 св.	предполагается	предполагаются
257	12 сн.	т.-е. $c > b_n$	т.-е. $c > \mid b_n \mid$
265	8 св.	конечная величина	конечная величина, не равная нулю;
288	14 сн.	изъ условной	изъ условій
299	2 „	$\frac{\Delta y}{\Delta y}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
301	14 „	ибо $\frac{1}{x}$ не имѣетъ	ибо $\frac{1}{x}$ при $x = 0$ не имѣетъ
319	10 св.	$\frac{\Delta x}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
341	6 сн.	$\frac{f(b)-f(a)}{b-b}$	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
352	13 св.	$\ldots \delta_i = t_{i+1} - t_i, \ldots$	$\ldots, \delta_i = t_i - t_{i-1}, \ldots$
373	7 сн.	$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$	$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$
373	5 „	$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt =$	$\int_{\Delta}^{x+\Delta x} f(t)dt =$
398	15 св.	$= \lim_{x=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt}$	$= \lim_{x=\infty} K_0\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt}$
432	Зад. 51	$= \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$	$= \frac{x - \sin x \cos x}{2}$